

## 수학교육에서의 Maple의 활용방안<sup>1)</sup>

정 상 권 (서울대학교)

추 상 목 (서울대학교 대학원)

### I. 서 론

컴퓨터의 발달은 우리의 생활 양식과 사고 방법까지도 변화시킬 만큼 큰 영향을 끼쳤다. 이러한 변화는 전에는 없었던 컴퓨터 그래픽에 의한 프랙탈 이론, 컴퓨터 계산결과의 패턴 찾기에서 나오는 카오스 이론, 연속적 개념의 수학에서 이산적 개념을 중시하는 이산수학 등 새로운 학문연구의 영역을 만들었다. 컴퓨터의 발달은 수학의 발전에 대한 방향전환을 가져왔고, 심지어는 '4 색문제'의 증명과 같은 수학의 연구 방법에 대한 변화를 가져오고, 사람들이 어떻게 수학을 접하고 수학적 사고를 획득하는지에 대한 기존의 생각을 변화시켰다. 더욱이, '컴퓨터 세대'라 불리는 요즘 학생들에게 무엇을, 어떻게 가르치느냐하는 교육의 근본 문제를 재고하게 만들었고 이는 학교 교육의 환경에도 큰 변화를 불러왔다.

수학은 실생활에 활용되지 않는 것처럼 느껴지며, 추상적이고도 일반적 개념을 다룸으로써 대부분의 학생들은 수학을 어렵게 느낀다. 그러나 수학교육에 컴퓨터가 도입됨으로써 수학으로 부터 점점 멀어져 가는 학생들이 수학에 친숙하게 되고, 수학을 쓸모있게 사용할 수 있게 함으로써 수학을 유용한 것으로 인식하게 하는 중요한 도구가 되었다. 컴퓨터가 다음 점에서 학생들로 하여금 수학을 하게 하고 수학적 사실을 얻는데 큰 동기를 부여한다.

- 추상적 수학의 내용을 구체적으로 시각화함으로써 학생의 이해를 도울 수 있다
- 실제로 시행하기에는 시간의 제약을 받는 자료의 수집이 가능하다
- 컴퓨터의 조작을 통해 얻은 결과로부터 수학적 모델을 구성할 수 있고 시뮬레이션 등을 효과적으로 수행할 수 있다

---

1) 이 논문은 서울대학교 교육종합연구원 과학교육연구소의 지원에 의한 것임.

- 학생의 사용에 따라 반복적으로 문제풀이 연습을 하게 하고 개인교수의 도구로 사용될 수 있다
- 학습자료의 정보 제공자 역할을 한다
- 진부한 계산을 덜어 수학의 개념 획득에 전념할 수 있도록 한다

이와 같은 이유로 NCTM(1989)은 초등학교에서 뿐만 아니라 중등학교에서도 각 수준별 단계에 맞는 컴퓨터를 이용하여 교육할 것을 강조하고 있다. 우리나라에서도 제 6차 교육 과정에 계산기나 컴퓨터를 사용할 것을 교과과정 중에 명시하고 있으나 교과서에서나 실제 현장교육에서 컴퓨터의 사용이 두드러지게 나타나고 있지는 않다. 현재 각 중고등학교에는 50-60 대 이상의 컴퓨터가 보급되어 있고(류희찬, 1997), 학생 개인용 컴퓨터 보급률이 60% 이상인 반면에 학교 수업에서 컴퓨터의 사용 빈도는 미미하여 70% 이상의 학생이 오락, 편집기나 컴퓨터 통신으로만 사용하고 있다(이현영, 1996). 그렇지만, 컴퓨터를 이용한 교육환경의 성숙으로 수학교육 연구자들은 그래픽 계산기나 웹(Web) 등 컴퓨터 친화적 수업에 대한 연구와(권오남·박경미, 1997 ; 전영국, 1997 ; 황혜정, 1996) 컴퓨터 친화적 수업의 수학교육학적 인식론에 대한 연구와 교육의 유의미한 효과에 대한 연구 결과도 나와 있다(류희찬, 1997 ; 이현영, 1996).

그러함에도 불구하고, 학교 수학에서 컴퓨터 친화적 수업이 활발하게 이루어지지 않는 이유 중의 몇가지는 다음을 들 수 있다.

- 교과내용의 양에 비하여 학교수업의 시간적 제한
- 컴퓨터를 이용한 수학수업을 하기 위하여 이동식 수업을 하여야 하는 불편한 학교환경
- 컴퓨터는 또 하나의 시청각 교재라는 생각
- 컴퓨터가 단순한 계산기의 역할을 하거나 기하·함수의 그래프 등과 같은 제한적 교과 내용에만 효과적이라는 생각
- 컴퓨터를 이용한 수학교육 자료의 부족
- 컴퓨터가 수학활동 특히 추상화에 부정적 영향을 미칠 것이라는 플라톤주의적 수학 연구자/교육자의 생각
- 컴퓨터가 교사를 대신할 것이라는 생각
- 학교 현장에서 사용하기에 적합한 보급형 소프트웨어의 부족
- 컴퓨터를 이용하여 무엇을 어떻게 가르칠 것인가에 대한 연구의 부족.

그러나 무엇보다도 컴퓨터 친화적 수업의 방해가 되는 중요한 요인으로 다음을 생각해 볼 수 있다.

- 현재의 입시제도 아래에서는 고전적 지필수업 방법이 더 효과적이라는 학생·교사·학부모의 공통된 생각

그러나 우리는 현실의 입시문제 해결에 수학교육의 목표가 있는 것이 아니라 수학교육에서 무엇을, 어떻게, 왜 가르쳐야하는가(Mason, 1995)에 대한 본래의 모습으로 돌아가야 한다. 컴퓨터를 단순한 정보 제공자로 학생을 정보 전수자로 보지 않으며, 학생이 문제를 풀고, 일반화하고, 추상화하고, 추측하고, 관찰하고, 단순화하고, 실험하고, 연역하고, 기억하도록 컴퓨터를 이용한다면, 컴퓨터를 적절히 이용한 수업은 학생들에게 많은 학습효과를 줄 수 있다.

이 글의 목적은 수학용 패키지인 Maple Release 5(Version 5.00)를 소개하고, Maple을 통해 고등학교 교과서(공통수학, 수학I, 수학II)에 나오는 추상적인 개념과 성질을 어떻게 구현할 수 있는 지를 알아보려고 한다. Maple의 기본 사용법을 모르는 학생들에게 컴퓨터가 제공되지 않는 교실에서, 교사가 칠판과 더불어 수업의 보조 도구로 Maple을 수학교육에 어떻게 활용할 수 있는지 구체적인 예를 들어 교육자료로 제공하려 한다.

## II. Maple

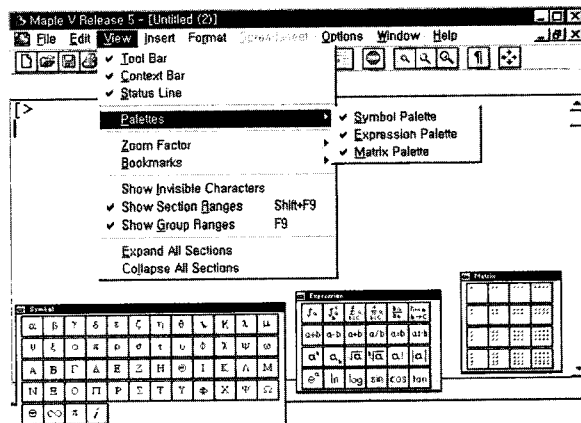
최근 다양한 수학교육용 소프트웨어의 활용 방안이 논의되고 있다. 이러한 것들로써서로 연관된 자료들의 상대적 영향력을 쉽게 알 수 있는 스프레드시트(Spreadsheet), 기하적 도형을 쉽게 작도하고 쉽게 변형할 수 있는 Cabri Geometry와 GSP, 수학학습을 위해 특별히 개발된 프로그래밍 언어 LOGO, LOGO의 단점을 보완한 MAL 등에 대한 연구가 있다(장경운, 1996; 전영국·주미, 1998; 류희찬, 1997; 조한혁, 1992). 그러나 수학적 원리를 발견하기 위해서는 기호연산이 가능한 소프트웨어를 필요로 한다. 이러한 소프트웨어로는 기호연산과 그래픽 기능이 뛰어난 Mathematica와 수학적인 알고리즘에 의해 개발된 Maple이 있다. 그러나 Maple과 같은 기호조작기가 있는 소프트웨어가 수학교육의 도구로 유용하게 사용될 수 있다 하여도 그 사용법을 모른다면 학습효과를 기대하기 어렵다(Dubinsky & Tall 1991).

### 1. Maple의 특징

위에 언급한 대부분의 소프트웨어와 마찬가지로 Maple도 한글이 아닌 영어로 된 명령어와 도움말을 사용하고 있어 교사나 학생이 쉽게 사용할 수 없다. 그러나 한편으로는, 시대가 국제화와 정보 사회를 지향하기 때문에 영어로 된 정보를 익숙하게 다룰 수 있는 기회를 학생들에게 일찍 제공해 주는 장점도 있다. 한편, Maple은 Mathematica에 비하여 더 수학적이며 표준수학기호로 결과를 출력할 수 있는 장점을 가지고 있다. 또 기존의 기능에 기호조작이 첨가된 스프레드시트가 Maple에 장착되어 있어 많은 사람들이 익숙한 스프레드시트를 이용하여 기호연산이 가능하게 되었다. Maple을 수학학습에 활용할 때 제일 먼저 나타나는 사용법의 어려움을 덜기 위해 Release 5 부터는 한글의 수식편집기와 같은 파레트(Palettes) 창이 있어 기본명령어를 쉽게 사용하고 마우스의 오른쪽 버튼을 이용하면 미분·적분과 인수분해를 하고, 그래프를 그릴 수 있도록 기능이 개선되었다.

Maple은 기호연산, 수치적 계산과 그래픽 기능이 있는 수학용 패키지로 다음과 같은 특징이 있다.

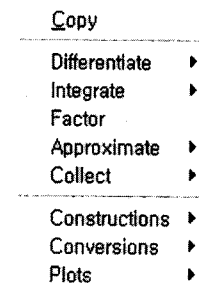
(1) 한글의 수식편집기와 같이 Maple에는 아래와 같은 파레트 기능이 있어 기본명령어의 입력이 쉽다.



(2) 마우스를 이용하여 평면도형과 공간도형을 쉽게 그릴 수 있으며, 특히 공간도형의 경우 마우스를 움직여 화면에 출력된 공간도형을 회전시킬 수 있어 여러 각도에서 입체를 관찰할 수 있다.

**예제 2.1(입체  $z=x^2+y^2$ 을 그리기)**

$x^2+y^2$ ;을 입력한 후 **Enter ↵** 를 누르면 명령문이 실행되어 화면에  $x^2+y^2$  이 출력된다. 출력된  $x^2+y^2$  에 마우스의 포인터를 고정시킨 후 마우스의 오른쪽 버튼을 누르면 오른쪽과 같은 창이 뜬다. 이 때, 이 창에 나타난 Plots를 선택한 후 나타나는 [3D-Plot]-[x,y]를 선택하면 3차함수를 그리는 명령어를 몰라도 주어진 입체를 그릴 수 있다.



**예제 2.2(화면에 출력된 입체  $z=x^2+y^2$ 을 회전시키기)**

출력된 입체에 마우스의 포인터를 고정시킨 후 마우스의 왼쪽 버튼을 누른 채 마우스를 움직이면 입체는 회전한다.

(3) 2700여 개의 함수가 내장되어 있어 집합의 연산, 명제의 참과 거짓, 방정식과 부등식, 다항함수의 그래프, 지수로그함수, 삼각함수, 행렬의 연산, 수열, 극한, 미분적분, 확률 통계 등 고등학교의 교육 내용을 모두 다룰 수 있다.

(4) Maple에 내장된 스프레드시트는 기호연산이 가능한 최초의 스프레드시트이다. 그러므로 수학교육의 도구로 Maple에 내장된 스프레드시트를 이용할 때, 스프레드시트의 활용범위를 넓힐 수 있다.

(5) Maple 언어는 C나 포트란과 같은 언어보다 익히기가 쉽고 더 많은 수업 내용을 동적으로 나타낼 수 있다.

**2. Maple을 이용한 교수/학습의 기대 효과**

컴퓨터를 이용한 수학 교수/학습에서는 도구를 적절히 이용하면 다음과 같은 교수/학습의 효과를 얻을 수 있다. 문제해결 중심의 구체적인 사례로부터 추상화에 이르는 경험을 맛볼 수 있게 해 줄 뿐만 아니라, 수학의 일반화 개념을 도와 주고 논리적 추측을 도와준다.

- 해당 학년의 교과과정 이상의 범위를 접할 수 있게 한다
- 사고과정을 되돌아 보게 하고 도전의식을 고취시킨다
- 구체적 조작이나 문제해결 과정중심에 기초한 수학학습을 진작시킨다
- 교사의 역할이 바뀔 수도 있으나 교사의 중요성을 더욱 인식하게 한다.

이러한 교육적 효과를 얻기 위하여 교사는 단순히 준비된 프로그램을 제시하는 것이 아니라 다음과 같은 3 단계의 컴퓨터를 이용한 수업의 전개가 필요하다(Manouchehri, Enderson & Pugnuccho, 1998).

(1) 자유탐험시간

- 소프트웨어를 소개하고 간단한 조작 방법을 설명한다.
- 메뉴의 항목들을 자유롭게 조작해 볼 수 있게 한다.
- 스스로 호기심을 갖고 친구들과끼리 상호 의견교환을 할 수 있게 한다.

(2) 반계획적 수업

- 특별한 소프트웨어를 사용하는 목적을 설명하고, 학습목표에 따라 수업을 진행한다.
- 시간이 많이 소요되거나 컴퓨터환경 구성 자체가 수업의 목적이 아닌 경우에는 컴퓨터에 미리 저장된 내용을 제시한다.
- 수업하여야 할 모델을 만든다.
- 학생들이 직접 추론해서 연역적 사고와 다른 예들과의 관계를 찾아내게 한다
- 학생 스스로의 정리를 만들고 증명하게 한다.

(3) 문제해결

- 개별 학생에게 문제를 제공하고 문제를 해결할 수 있을 뿐만 아니라 다른 질문과 문제를 만들게 한다.

컴퓨터를 이용한 효과적 수학교육을 위해서는 자유탐험, 반계획된 수업, 문제해결의 3 단계를 거쳐야 되나, 현실적으로 자유탐험을 갖기는 쉽지 않다. 따라서, 여기서는 학생들이 Maple의 기본 사용법을 모르더라도, 컴퓨터가 제공되지 않는 일반교실에서 교사 중심으로 Maple과 같은 수학용 패키지를 수업에 활용할 때 다음과 같은 학습효과를 기대할 수 있다.

(1) Maple의 간단한 명령문을 소개하고 이 명령문을 실행했을 때 출력되는 결과를 보여 줌으로써, 원하는 것을 어떻게 컴퓨터에 물어보고 컴퓨터가 보여주는 것을 어떻게 이해하는지 보여줄 수 있다.

(2) 추상적인 수학개념이 컴퓨터 화면에 표현되고 실행될 때, 추상적인 수학개념이 구체적으로 존재한다는 느낌을 받는다. 즉, 정적인 칠판보다 학습자가 흥미를 느끼는 동적인 컴퓨터에 추상적인 수학개념을 표현하고 실행할 때 추상적인 수학개념이 구체화되어 학습자가 받아들이는 데 어려움을 덜 수 있다.

(3) 친숙한 인터페이스인 스프레드시트를 미분과 적분의 기호적 계산 지도에 활용할 수 있다.

(4) 강력한 그래픽 기능과 매우 작은 수와 큰 수의 처리능력을 이용하여 수학적 추측을 불러 일으킬 수 있으며 그 추측을 현장에서 확인함으로써 일반화 과정을 도울 수 있다.

(5) 수학적 개념을 이해하고 그 이해를 바탕으로 문제를 해결하는 과정에서 수학용 패키지는 든든한 동반자가 된다는 사실을 경험할 수 있다. 즉, 지루하고 복잡한 계산을 대신해 주고 문제해결 과정에서 도움을 주는 수업장면은, 수학용 패키지와 함께 하는 수학세계를 경험할 수 있다. 또한 계산보다는 개념의 이해가 더 중요함을 알게 된다.

### Ⅲ. Maple을 활용한 수학 교수/학습활동

우리 나라의 고등학교 교육과정에서 Maple을 활용할 수 있도록 다양한 수학 문제를 단원별로 제시하고 교사의 입장에서 살펴보겠다.

#### 1. 집합과 명제에서 Maple의 활용

전체집합이  $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 일 때, 집합  $A=\{1,3,5,7\}$ ,  $B=\{2,3,4,5,6\}$ ,  $C=\{0,2,4,6,8\}$ 에 대하여  $(A \cap B)^c$ ,  $(A \cup B) \cap C$  와  $A \cup (B \cap C)$ 를 Maple로 구할 수 있다. Maple에는 여집합을 직접 구하는 명령어가 없으므로  $(A \cap B)^c$ 를 구하려면  $(A \cap B)^c = U - (A \cap B)$ 로 변형하여 문제를 해결해야 한다.

```
>U:={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}: A:={1,3,4,5,7}: B:={2,3,4,5,6}: C:={0,2,4,6,8}:
U minus (A intersect B);
(A union B)intersect C;
A union (B intersect C);
```

{0, 1, 2, 6, 7, 8, 9}  
 {2, 4, 6}  
 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

교사는 Maple의 기본명령어를 이용하여 여집합을 계산하려면 여집합을 차집합으로 변형할 수 있는 수학적 능력이 있어야 하고 집합의 기본연산에서 괄호의 중요성을 강조한다. 즉, 수학적 개념을 확실히 알고 있어야 수학용 소프트웨어를 더욱 잘 활용할 수 있다는 점을 강조한다.

서술문으로 된 명제의 역, 이와 대우를 한번에 구하는 Maple의 기본명령어는 없다. 이와 같이 수학용 소프트웨어가 해결할 수 있는 문제는 한정되어 있음을 교사는 학생들에게 알려주어 수학용 소프트웨어는 어디까지나 보조도구임을 분명히 할 필요가 있다.

## 2. 수와 식에서 Maple의 활용

항등식에서는 여러 개의 문자가 나타날 수 있다. 이때, 어떤 변수가 항등식인지를 분명히 해야 한다. 변수의 역할을 이해하는 것이 항등식에서의 중요한 학습목표인 데, Maple을 이용하여 이런 사실을 경험시킬 수 있다. 예를 들어,

등식  $x+3=a(x-1)+b(x-2)$ 가  $x$ 에 대한 항등식이 되도록  $a, b$ 의 값을 정하면  $a=5, b=-4$ 이다.

아래와 같은 명령어를 사용하면 항등식을 만족시키는 실수  $a, b$ 의 존재성을 판정할 수 있고,  $a, b$ 의 값을 구할 수 있다.

```
> match(x+3=a*(x-1)+b*(x-2), x, s, );s; 
      true          ← 항등식이 되도록 하는 실수 a, b가 존재한다는 의미
      {a=5, b=-4}
```

위 명령어를 `match(x+3=a*(x-1)+b*(x-2), 's');`와 같이  $x$ 를 지운 후 실행하면

*Error, (in match) match uses a 3rd argument, s3 (of type name), which is missing*

라는 error메시지가 화면에 출력된다. 이런 과정을 통해 교사는 학생들에게 항등식이란 한 문자에 어떤 값을 대입하여 항상 성립하는 식이라는 정의에서 학생들이 놓치기 쉬운 “한 문자”를 학생들이 친숙한 컴퓨터 환경에서 다시 강조할 수 있다.

## 3. 방정식에서 Maple의 활용

Maple을 이용하여 근과 계수와의 관계가 성립함을 경험시킬 수 있다.

이차방정식  $2x^2-9x+10=0$ 의 두 근의 합과 곱은 각각  $\frac{9}{2}, 5$ 이다.

```
> sol := solve(2 * x^2 - 9 * x + 10 = 0):
      sol[1] + sol[2]; sol[1]*sol[2]; 
       $\frac{9}{2}, 5$ 
```

명령어 `sol := solve(2 * x^2 - 9 * x + 10 = 0):`를 실행하면 `sol[1], sol[1]`에 이차방정식  $2x^2-9x+10=0$ 의 두 근이 저장된다.



근과 계수와의 관계를 유도하기 전에, 위와 같은 명령어를 이용하여 이차방정식의 계수 2, -9, 10 을 컴퓨터 화면에서 다른 수로 바꾸어 가면서 근과 계수와의 관계를 학생들이 직접 추론하게 할 수 있다. 아래 명령어를 이용하면 Maple로 근과 계수와의 관계를 다음과 같이 보여 줄 수 있다.

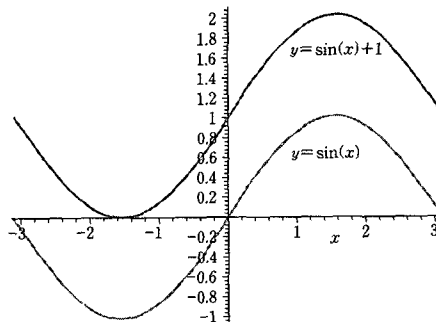
```
>sol:= solve( a * x^2 + b * x + c =0,x):
sol[1] +sol[2];expand(%); 
      -a
      b
```

기본명령어를 이용하여 단순한 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있지만 복잡한 방정식과 부등식의 문제해결은 기본명령어만으로 쉽게 구할 수는 없다. 수학적 지식을 응용할 수 있어야 복잡한 방정식과 부등식의 문제 해결에 Maple을 활용할 수 있다. 그러나 수학적 지식이 없으면 Maple의 기본명령어가 해결할 수 있는 단순한 수학문제에만 Maple을 활용할 수 있다.

#### 4. 도형의 방정식에서 Maple의 활용

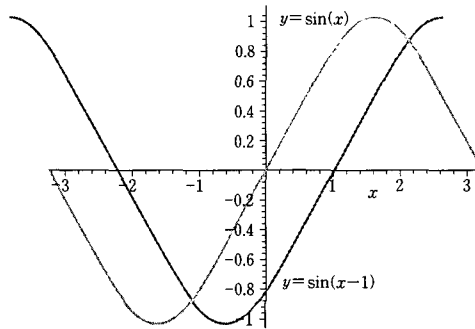
곡선  $y=\sin x$  와  $y=\sin x+1$  의 그래프를 Maple을 이용하여 그리면,  $y=\sin x+1$  는  $y=\sin x$  를  $y$ 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것임을 시각적으로 확인할 수 있다.

```
> plot1:=plot({ sin(x),sin(x) +1}, x=-Pi..Pi):
plot2:=plots[ textplot]([1.5,1.6,'y=sin(x)+1'],[1.5,0.6,'y=sin(x)'],align=ABOVE):
plots[display]({ plot1,plot2}); 
```



마찬가지로 곡선  $y=\sin x$  과  $y=\sin(x-1)$  의 그래프를 Maple을 이용하여 그리면  $x$ 축의 방향으로 평행이동했음을 시각적으로 확인할 수 있다.

```
> plot1:=plot({ sin(x),sin(x-1)}, x=-Pi..Pi):
plot2:=plots[textplot]({[0.8,-0.8,'y=sin(x-1)'], [0.8,1,'y=sin(x) '
},align=ABOVE):
plots[display]({ plot1,plot2});
```



교사는  $y=x^2$ ,  $y=x^2+1$ ,  $y=(x+1)^2$ 과 같이 학생들이 쉽게 이해할 수 있는 함수의 그래프를 그리는 명령어를 실행한다. 그 결과 손으로 그릴 때와는 달리 정확히 평행이동된 그래프를 시각적으로 확인할 수 있고, 방정식  $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형을  $x$ 축의 방향으로  $a$ ,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동한 도형의 방정식은  $f(x+a,y+b)=0$ 이 아니고  $f(x-a,y-b)=0$ 임을 경험하게 된다. 이렇게 하므로

방정식  $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형을  $x$ 축의 방향으로  $a$ ,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동한 도형의 방정식은  $f(x-a,y-b)=0$ 이다

임을 추론할 수 있도록 컴퓨터의 화면에서  $a$ ,  $b$ 의 값을 바꾸어 가면서 명령어를 실행한다.

이러한 학습활동을 통해 학생들은 왜  $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형을  $x$ 축의 방향으로  $a$ ,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼 평행이동한 도형의 방정식이  $f(x+a,y+b)=0$ 이 아니고  $f(x-a,y-b)=0$ 인지 궁금하게 된다. 이때, 교사가 그 이유를 설명해서 학생들의 지적 호기심을 충족시켜 줄 수 있다.

### 5. 부등식의 영역에서 Maple의 활용

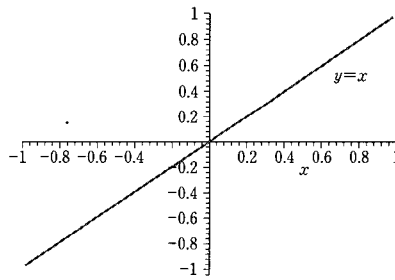
부등식의 영역에 대하여

부등식  $y > f(x)$  의 영역  $\Leftrightarrow y = f(x)$  의 위쪽 부분

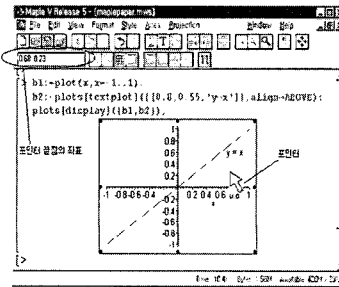
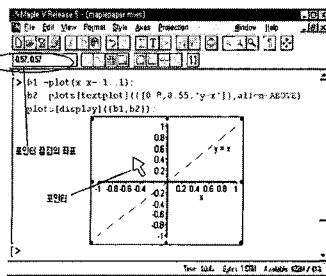
부등식  $y < f(x)$  의 영역  $\Leftrightarrow y = f(x)$  의 아래쪽 부분

의 내용을 가르칠 때, 먼저 Maple을 이용하여 아래 활동을 해보자. 예를 들어, Maple을 이용하여  $y=x$  의 그래프를 그린다.

```
> b1:=plot(x,x=-1..1):
    b2:=plots[ textplot]({[ 0.8,0.55,'y=x' ], align=ABOVE):
    plots[display]({ b1, b2});
```



Maple 작업 창에 나타난 위의 그림에서,  $y=x$ 의 위쪽 부분에 마우스의 포인터를 놓고 마우스의 왼쪽 버튼을 누르면 포인터 끝점의 좌표가 기본창의 왼쪽 상단 동그라미 친 곳에 나타난다.  $y=x$ 의 위쪽 부분의 다른 곳에 포인터를 가져다 놓고 마우스의 왼쪽 버튼을 눌러도  $y$ 좌표가  $x$ 좌표보다 큰 것을 알 수 있다. 따라서  $y=x$ 의 위쪽 부분에서는  $y > x$ 임을 추측할 수 있다. 마찬가지로,  $y=x$ 의 아래쪽 부분에 포인터를 가져다 놓고 마우스의 왼쪽 버튼을 누르면  $y$ 좌표가  $x$ 좌표 보다 작은 것을 알 수 있다. 따라서  $y=x$ 의 아래쪽 부분에서는  $y < x$ 임을 추측할 수 있다.

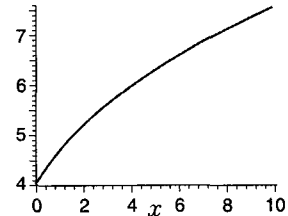


이제 교사는 자연스럽게 부등식의 영역에 대하여 목표로 하는 내용이 성립함을 지필환경에서 설명할 수 있다.

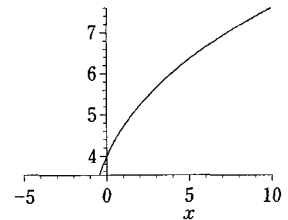
### 6. 함수에서 Maple의 활용

무리함수  $f(x)=\sqrt{2x+1}+3$ 의 정의역을 Maple을 활용하여 시각적으로 추론하고 확인할 수 있다. 다음과 같이  $x$ 의 범위를  $0 \leq x \leq 100$ ,  $-1 \leq x \leq 10$ ,  $-3 \leq x \leq 3$ 로 변화시키면서 그래프를 그려보자.

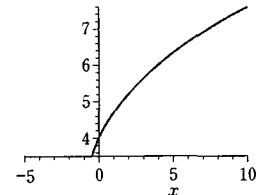
```
>plot((2 *x+1)^(1/2)+3,x=0..10);
```



```
>plot((2 *x+1)^(1/2)+3,x=-1..10);
```



```
>plot((2 *x+1)^(1/2)+3,x=-3..10);
```



교사는  $x$ 의 범위를 넓혀 가면서 무리함수  $f(x)$ 의 그래프를 그려도  $f(x)$ 의 그래프는  $x \geq a$ ( $a$ 는 양수)인 범위에서만 그려지는 사실을 강조한다. 이로부터 무리함수  $f(x)$ 의 정의역이 제한되어 있음을 학생들이 시각적으로 경험하고 추측할 수 있도록 한 후 ‘무리함수  $f(x)=\sqrt{2x+1}+3$ 에서 정의역이 주어지지 않을 때에는 근호 안을 0 이상이 되게 하는 실수  $x$ 의 집합을 정의역으로 본다’는 정의를 자연스럽게 도입한다.

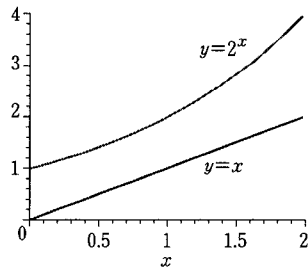
### 7. 지수함수와 로그함수에서 Maple의 활용

맬더스의 인구론에 의하면 식량은 산술급수적으로 늘어나고 인구는 기하급수적으로 늘

어나기 때문에 인류의 식량이 부족한 위기에 처할 것이라고 한다. 그러나 이 표현이 우리에게  
 계는 현실감이 없게 느껴진다. 왜냐하면, 지수적으로 증가한다고 해서 산술적으로 증가하  
 는 것보다 커질 수가 있는나 하는 것이다. 이러한 것을 설명하기 위하여 지수함수  $y=2^x$ 를  
 지도할 때 지수적으로 증가하는 느낌을 경험할 수 있는 다음과 같은 수업장면이 필요하다.

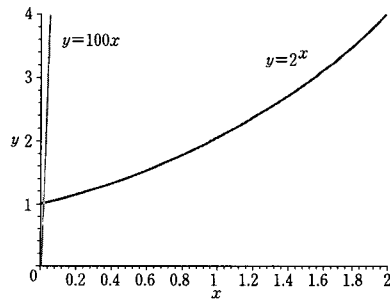
지수함수  $y=2^x$ 와  $y=x$ 의 그래프를 Maple을 이용하여 그린다.

```
> a1: =plot({2^x},x=0..2):
a2: =plots[ textplot]([ [ 1.4,1.0,'y=x' ], align=ABOVE):
a3: =plots[ textplot]([ [ 1.4,3.2,'y=2^x' ], align=ABOVE):
a4: =plots[ textplot]([ [ 1.5,3.3,'x' ], align=ABOVE):
plots[display]({ a1,a2,a3,a4});
```



지수함수  $y=2^x$ 를 고정하고 직선  $y=100x$ 의 그래프를 그린다.

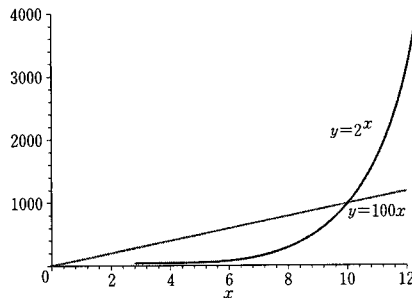
```
> a1: =plot({ 2^x,100*x }, x=0..2,y=0..4):
a2: =plots[ textplot]([ [ 0.25,3.5,'y=100x' ], align=ABOVE):
a3: =plots[ textplot]([ [ 1.4,3.2,'y=2^x' ], align=ABOVE):
a4: =plots[ textplot]([ [ 1.5,3.3,'x' ], align=ABOVE):
plots[display]({ a1,a2,a3,a4});
```



$x$ 의 값을 계속 증가시키면 지수함수  $y=2^x$ 의 그래프와 직선  $y=100x$ 의 그래프가 다시 만나는 순간이 있는지를 여러 학생에게 추측하게 한다.

$x$ 의 값을 12까지 증가시켜 지수함수  $y=2^x$ 와 직선  $y=100x$ 의 그래프를 그린다.

```
> a1:=plot({ 2^x,100*x}, x=0..12) :
a2:=plots[ textplot]({[ 11.850, "y=100x"], align=ABOVE):
a3:=plots[ textplot]({[10,2100,' y=2' ]}, align=ABOVE):
a4:=plots[ textplot]({[10.65,2200,' x' ]}, align=ABOVE):
plots[display]({ a1,a2,a3,a4});
```



위의 그림에서 보는 것처럼  $x$ 가 증가할 때, 밑이 1보다 큰 지수함수는 일차함수보다 매우 빠르게 증가함을 알 수 있다. 이런 이유 때문에 “지수적으로 증가한다”는 것은 무척 빠르게 증가한다는 것을 의미한다. 이와 같이, 지수함수의 개념과 실생활에 나타나는 표현을 연관지어 설명할 때, Maple이 하나의 도구로 이용될 수 있다.

## 8. 삼각함수에 Maple의 활용

Maple을 이용하면 육십분법과 호도법 사이의 관계를 보일 수 있고 삼각함수의 값을 얻을 수 있고 삼각방정식의 문제를 해결할 수 있다. 또 주기함수  $y=f(x)$  대하여 함수  $y=f(ax)$ 의 주기는  $a$ 에 종속됨을 plot명령어를 이용하여 쉽게 시각적으로 경험시킬 수 있다.

(1)  $20^\circ$ 을 호도법으로 나타내면  $\frac{\pi}{9}$  라디안이고  $\frac{5}{12}\pi$ 를 육십분법으로 나타내면  $75^\circ$ 이다.

```
>convert(20 * degrees,radians); □
```

$$\frac{1}{9}\pi$$

```
convert(5/12 *Pi,degrees); □
```

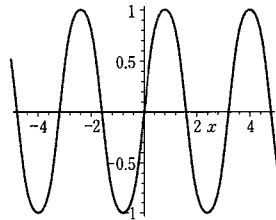
$$75 \text{ *degrees}$$

(2)  $\sin(\frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{3}) + \tan(\frac{\pi}{3})$ 의 값은  $\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}$ 이다.

$$\begin{aligned} &> \sin(\text{Pi}/3) + \cos(\text{Pi}/3) + \tan(\text{Pi}/3); \square \\ &\quad \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3) 함수  $y = \sin 2x (-5 \leq x \leq 5)$ 의 그래프를 그리면 아래 예와 같다.

$$> \text{plot}(\sin(2*x), x = -5.5); \square$$



(4) 삼각함수  $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ 을 간단히 하면  $\cos \theta$ 이다.

$$\begin{aligned} &> \text{simplify}(\sin(\text{Pi}/2 - \theta)); \square \\ &\quad \cos(\theta) \end{aligned}$$

(5) 삼각방정식  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 의 일반해는  $\theta = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi \times n + 2\pi m$ 이다.

$$\begin{aligned} &> \_EnvAllSolutions := true: \\ &\quad \text{solve}(\sin(x) = 1/2, x); \square \\ &\quad \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi\_BI \sim + 2\pi\_ZI \end{aligned}$$

## 9. 행렬에서 Maple의 활용

Maple을 이용하여 행렬의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 실수배 그리고 역행렬을 기본명령어로 구할 수 있다. 기본명령어를 이용하여 행렬의 기본 성질  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 을 여러 개의 예를 들어 쉽게 보여줄 수 있고 학생 스스로 확인할 수 있다.

- (1) 행렬  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  를 아래 예와 같이 나타낸다.

```
>A:=array([[1,2],[3,4]]); □
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (2) 행렬의 덧셈

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

```
>with(linalg):
```

```
A:=array([[1,2],[3,4]]):
```

```
B:=array([[ -1,2],[0,1]]):
```

```
matadd(A,B); □
```

$$\begin{pmatrix} -0 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

- (3) 행렬의 실수배

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ 이다.}$$

```
>with(linalg):
```

```
A:=array([[1,2],[3,4]]):
```

```
scalarmul([A,2]); □
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

- (4) 행렬의 뺄셈

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

```
>with(linalg):
```

```
A:=array([[1,2],[3,4]]):
```

```
B:=array([[ -1,2 ],[0,1 ]]):
```

```
matadd(A,B,1,-1); □ ← 1A+(-1)B를 의미한다
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$



(5) 행렬의 곱셈

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$$

>with(linalg):

A:=array([[1,2],[3,4]]);

B:=array([[-1,2],[0,1]]);

matadd(A,B);  $\square$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$$

(6) 행렬  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  의 역행렬  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$  이다.

>with(linalg):

A:=array([[2,1],[5,3]]);

matadd(A);  $\square$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

(7) 행렬  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  의 역행렬  $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$  이다.

>with(linalg):

A:=array([[1,2],[3,4]]);

matadd(A);  $\square$

$$\left\{ \begin{array}{cc} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right\}$$

## 10. 수열과 알고리즘에서 Maple의 활용

Maple을 이용하여 아래 예와 같이 일반항을 알 때 각 항을 나열할 수 있고 점화식을 정의된 수열의 일반항을 구하지 않고 각 항을 계산할 수 있다. 또한 Maple에는 자체 언어가

있어 순서도를 이용하여 프로그램을 할 수 있다.

점화식  $a_1=1$ ,  $a_n=na_{n-1}$ 으로 정의되는 수열  $\{a_n\}$ 의 10번째 항  $a_{10}$ 을 구하면  $a_{10}=362880$  이다.

```
>f:=n->if n=1 then 1 else n*f(n-1) fi:
f(10); 
3628800
```

## 11. 극한에서 Maple의 활용

(1) 매우 작은 수와 큰 수를 표현할 수 있는 Maple의 계산력을 이용하여, 무한등비수열  $\{r^n\}$ 에서  $r$ 의 절대값이 1보다 조금이라도 작으면 0으로 수렴하지만 조금이라도 크면 발산하는 현상을 직접 경험할 수 있다. 예를 들어,  $n=1, 10, 100, 1000, 10000$  일 때

- ①  $a_n=(0.99)^n$ ,
- ②  $a_n=(1.01)^n$

의 값을 Maple로 구해보므로써 무한등비수열의 수렴과 발산이  $r$ 의 절대값과 1의 크기에 민감하게 반응함을 보일 수 있다.

①의 경우:

```
> f:=n->(0.99)^n:
map(f,[1,10,100,1000,10000]); 
[.99, .9043820750, .3660323413, .4317124741 10-4, .2248774850 10-43]
```

②의 경우:

```
> f:=n->(1.01)^n:
map(f,[1,10,100,1000,10000]); 
[1.01, 1.104622125, 2.704813829, 20959.15564, .1635828711 1044]
```

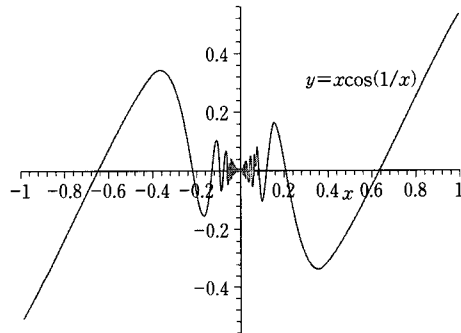
위의 결과에서 보듯이  $(0.99)^n$  인 경우  $n=10000$  이 되면  $10^{-43}$  보다 작게 되어 0에 가까워지는 것을 볼 수 있고,  $(1.01)^n$  인 경우  $10^{43}$  보다 크게 되어 발산하는 것을 경험하게 된다.

(2) 극한값  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$  을 구하는 과정을 Maple을 이용하여 함수  $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$  의 그

래프를 보여줌으로써 이 \*문제를 좀더 동적으로 접근할 수 있게 된다. 이 때, 교사는

①  $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$  ( $-1 < x < 1, x \neq 0$ )의 그래프를 그린다.

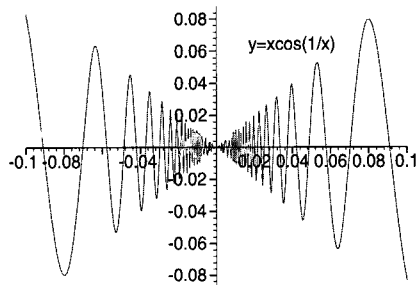
```
> a1: =plot(x*cos(1/x),x=-1..1):
a2: =plots[ textplot]([0.6,0.3, "y=xcos(1/x)" ],align=ABOVE):
plots[ display]({ a1,a2});
```



② 위의 그래프로부터  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$ 의 값을 추측하도록 한다.

③ 좀더 확신을 얻기 위해 위 그래프에서 범위  $-0.1 < x < 0.1$ 을 확대해 본다.

```
> a1: =plot(x*cos(1 / x),x=-0.1..0.1):
a2: =plots[ textplot]([ 0.04,0.06, "y=xcos(1 / x)" ], align=ABOVE):
plots[ display]({ a1,a2});
```



④ 위의 그래프로부터  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$ 의 값이 0 이라고 추측할 수 있나 질문한다.

이상과 같은 수업상황에서 학생들은 시각적으로 극한값이 0 임을 추정할 수 있지만 어떻게 정확히 보일 수 있는지 궁금해 할 것이다. 이 때, 교사는 부등식과 극한의 성질을 이용하여 극한값이 0 임을 보인다. 이런 상황을 경험하면서 학생들로 하여금 수학의 힘을 느끼게 한다.

## 12. 미분과 적분에서 Maple의 활용

Maple 버전 5 이상의 프로그램은 기존의 스프레드시트에 기호연산 기능을 첨가한 패키지가 들어 있다. 이 패키지를 기호에 관한 수학학습에 사용할 수 있다. 예를 들어 아래와 같은 화면을 통하여 양수  $n$ 에 대하여 부정적분  $\int x^n dx$ 의 값을 추정할 수 있다.

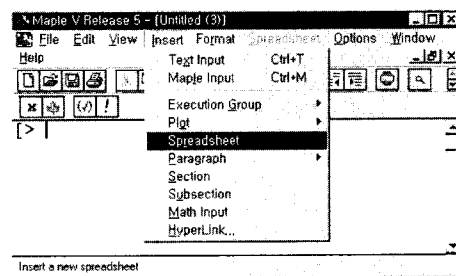
다항함수  $f(x) = x^n$ 의 부정적분  $\int x^n dx$

	A	B	C	D
1	$n$	$x^n$	$\int x^n dx$	
2	1	$x$	$\frac{1}{2}x^2$	
3	2	$x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	
4	3	$x^3$	$\frac{1}{4}x^4$	

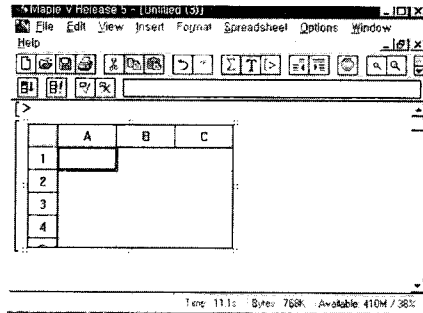
Time: 11:13 Bytes: 759K Available: 411M / 472

위의 화면을 얻는 방법은 다음과 같다.

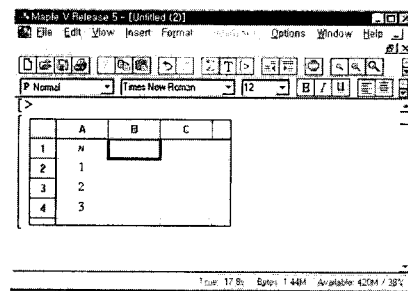
① 메뉴에 있는 insert를 선택한다.



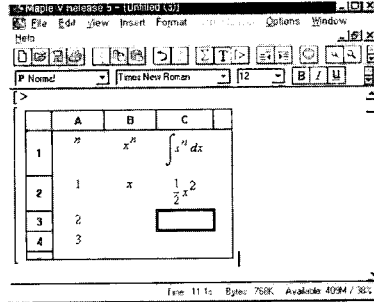
- ② Spreadsheet를 선택한다. 그 결과로 나타난 창에서 A1을 선택하면 아래와 같은 창이 나타난다.



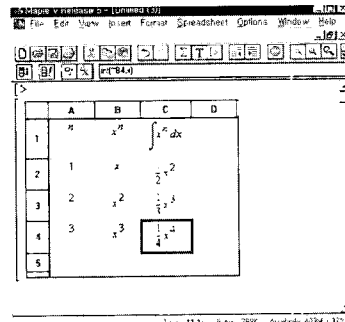
- ③  $n$ 을 입력한 후 **Enter, ↵** 를 누른다.  
 1을 입력한 후 **Shift, ⇧** 를 누른 채 **↓** 를 두 번 누른다.  
 좌측상단의 아이콘 **↵** 를 누른다  
 Step Size에 1, Stop Value에 3을 입력한 후 화면에 나타난 아이콘 **OK** 를 누른다.  
 그 결과로 나타난 창에서 B1을 선택하면 아래와 같은 창이 나온다.



- ④  $x \sim A1$ 을 입력한 후 **Enter, ↵** 를 누른다.  
 C1의 위치를 선택한 후  $\text{Int}(\sim B1, x)$ 를 입력하고 **Enter, ↵** 를 누른다.  
 B1의 위치를 선택한 후 **Ctrl**와 **C** 를 동시에 누른다.  
 B2의 위치를 선택한 후 **Ctrl**와 **C** 를 동시에 누른다.  
 C2의 위치를 선택한 후  $\text{int}(\sim B2, x)$ 를 입력하고 **Enter, ↵** 를 누르면 아래와 같은 창이 나온다.



- ⑤ B2의 위치를 선택한 후 **Ctrl**와 **C** 를 동시에 누른다.
- B3의 위치를 선택한 후 **Ctrl**와 **V** 를 동시에 누른다.
- C2의 위치를 선택한 후 **Ctrl**와 **C** 를 동시에 누른다.
- C3의 위치를 선택한 후 **Ctrl**와 **V** 를 동시에 누른다.
- B3의 위치를 선택한 후 **Ctrl**와 **C** 를 동시에 누른다.
- B4의 위치를 선택한 후 **Ctrl**와 **V** 를 동시에 누른다.
- C3의 위치를 선택한 후 **Ctrl**와 **C** 를 동시에 누른다.
- C4의 위치를 선택한 후 **Ctrl**와 **V** 를 동시에 누르면 아래와 같은 창이 나온다.



위의 과정에서 부정적분의 결과가 어떤 모양으로 나타나는지 집중시킬 때, 양수  $n$ 에 대하여 부정적분  $\int x^n dx$ 의 값을 추정할 수 있다. 마찬가지로 도함수를 구하는 공식에 스프레드시트를 이용할 수 있다.

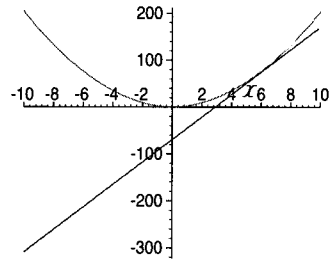
(1) 함수  $f(x)=2x^2$ 의  $x=2$ 에서의 도함수는 8 이다.

$f: x \rightarrow 2 * x^2:$

$limit(( f(2 + h) - f(2))/ h, h=0);$  □

(2) 곡선  $y=2x^2-1$  위의 점 (6, 71)에서 접선의 기울기는 4이고 접선의 그림은 아래와 같다.

```
>f:=x->2gx*2-1:
D(f)(1); 
4
with(student):
showtangent( f, x =6 ); 
```



(3) 함수  $(x^2+1)(2x+3)$ 의 도함수는  $6x^2+6x+2$ 이다.

```
>diff(( x^2 +1) *(2 *x +3),x): simplify( %); 
6 x^2 +6 x+2
```

(4) 부정적분  $\int(3x^2 - 4x + 1)dx$ 을 구하면  $x^3-2x^2+x+C$  이다.

```
>int(3 *x^2 -4 *x +1, x); 
x^3-2x^2+x
```

(5) 정적분  $\int_{-1}^2 (x^2-3x+2) dx$ 를 구하면  $\frac{9}{2}$ 이다.

```
>int(x^2 -3 *x +2, x =-1..2); 
9/2
```

### 13. 삼수선의 정리에 Maple의 활용

지필식 수업이나 Mathematica, GSP 등과는 달리 Maple은 3차원 그림을 여러 각도에 서 쉽게 볼 수 있는 기능을 가지고 있다. 이 기능을 이용하면, 삼수선의 정리

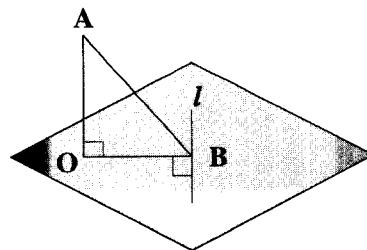
평면 위에 있지 않은 한 점 A와 평면 위에 있는 직선 l에 대하여 점 A에서 평면에 내린 수선의 발을 O라하고 O에서 직선 l에 그은 수선의 발을 B라고 하면  $\overline{AB} \perp l$ 이다

가 성립함을 시각적으로 확인할 수 있다.

```

>with(plots):
a1:=plot3d([s, s, 0],s=1/4..3/4, t=0..1):
a2:=plot3d([s, t, 0], s=0..1, t=0..1, grid=[2, 2]):
a3:=plot3d([0.8, 0.2, t], s=0..1, t=0..1):
a4:=plot3d([s, -(s-0.8)+0.2, 0], s=1/2..0.8, t=0..1):
a5:=plot3d([sg3/10+1/2, -sg3/10+1/2, s],s=0..1, t=0..1):
a6:=textplot3d([8.5/10, 2/10, 1.1, 'A']
,align = LEFT, color=black, font=[TIMES, BOLD, 15]):
a7:=textplot3d([1/2, 0.6, 0, 'B']
,align = LEFT, color=black font=[TIMES, BOLD, 15]):
a8:=textplot3d([9.5/10, 2/10, 0, 'O']
,align = LEFT, color=black, font=[TIMES, BOLD, 15]):
a9:=textplot3d([0.9/4, 0.9/4, 0, 'l']
,align = LEFT, color=black, font=[TIMES, BOLDITALIC, 15]):
a10:=plot3d([s, -(s-0.8)+0.2, 0.1], s=7.5/10..8/10, t=0..1):
a11:=plot3d([7.5/10, -(7.5/10-0.8)+0.2, t], s=0..1, t=0..0.1):
a12:=plot3d([s, (s-0.55)+(-0.55+1), 0], s=0.55..0.65, t=0..1):
a13:=plot3d([s, -(s-0.65)+(0.65-0.55)+(-0.55+1), 0] □
,s=(0.65+(0.65-0.55)+(-0.55+1))/2..0.65, t=0..1):
display3d(a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12,a13);

```

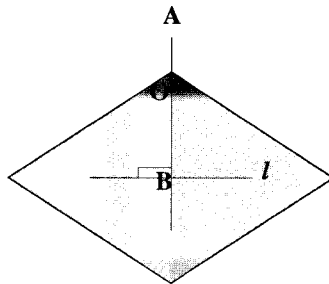


위 그림은

평면 위에 있지 않은 한 점 A와 평면 위에 있는 직선  $l$ 에 대하여 점 A에서 평면에 내린 수선의 발 O와 O에서 직선  $l$ 에 그은 수선의 발 B를 그린 것이다.



Maple 작업창에 나타난 위의 그림 위에 마우스의 포인터를 갖다 놓은 후, 마우스의 왼쪽 버튼을 누른 채 시계방향으로 적당히 천천히 움직이면 아래 그림이 나타난다. 즉, 선분 AB에 선분 BO가 완전히 가려지는 그림으로부터 선분 AB가 직선  $l$ 과 수직임을 추측할 수 있다. Maple의 줌기능(zoom factor)을 이용하여 그림을 크게 만든 후 도형을 회전시키면 선분 AB에 선분 BO가 완전히 가려지는 현상을 더욱 확실하게 볼 수 있다.



#### 14. 문제해결 방법으로 Maple의 활용

Maple에는 2700여 개의 함수가 내장되어 있어 집합의 연산, 명제의 참과 거짓, 방정식과 부등식, 다항함수의 그래프, 지수로그함수, 삼각함수, 행렬의 연산, 수열, 극한, 미분적분, 확률통계 등의 문제해결에 직접 활용될 수 있다. 예를 들어

가로 길이가 16cm, 세로 길이가 10cm인 직사각형의 두꺼운 양철판의 네 귀에서 크기가 같은 정사각형을 잘라내고, 나머지 부분을 접어서 상자를 만들 때, 상자의 부피의 최대값을 구하여라.

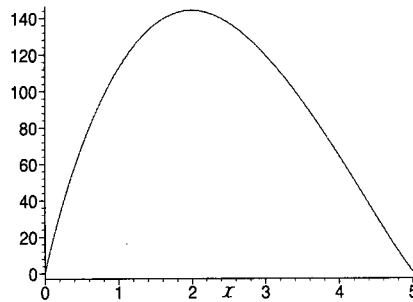
는 문제를 Maple을 이용하여 해결하는 과정을 살펴보자.

잘라내는 정사각형의 한 변의 길이를  $x$  cm, 상자의 부피를  $V(x)$   $\text{cm}^3$  라고 하면

$$V(x) = (16-2x)(10-2x)x \quad (0 < x < 5)$$

개구간  $(0, 5)$ 에서 함수  $V(x)$ 의 그래프를 그려 최고점을 찾으면 그 값이 구하려는 최대값이다. 이를 위하여 먼저 함수  $V(x)$ 의 그래프를 그리자.

> plot((16-2\*x)\*(10-2\*x)\*x,x=0..5); □



최고점은 접선의 기울기가 0인 점이므로 미분을 이용하여 접선의 기울기가 0인 점의  $x$  좌표를 찾자. 즉,  $V'(x)=0$ 인  $x$ 의 값을 찾으면 된다.  $V(x)$ 를 미분하면

$$\begin{aligned} &> \text{diff}((16-2*x)*(10-2*x)*x,x); \quad \square \\ &-2(10-2x)x-2(16-2x)x+(16-2x)(10-2x) \end{aligned}$$

이것을 인수분해하면

$$\begin{aligned} &> \text{factor}(\%); \quad \square \\ &4(x-2)(3x-20) \end{aligned}$$

따라서  $x=2$ 에서 접선의 기울기는 0이다. 그러므로 최대값은  $x=2$ 일 때  $V(2) = 144$ 이다.

Maple을 이용하여 미분과 인수분해를 쉽게 계산하고 최대값을 구할 수 있음을 알아 보았다. 위의 과정에서 알 수 있듯이 수학교육에서는 수학적 개념(미분과 접선)과 사고력(최고점을 접선과 미분을 이용하여 구함)을 훈련하는 것이 계산력보다 중요하다는 사실을 학생들에게 강조할 필요가 있다.

참고로, `maximize`라는 명령어를 사용하면 아래와 같이  $V$ 의 최대값을 직접 구할 수 있다.

$$> \text{maximize}((16-2*x)*(10-2*x)*x, \{x\}, \{x=0..5\});$$

#### IV. Maple을 사용할 때 주의할 점

Glass(1984)가 지적했듯이 컴퓨터는 모든 문제를 해결하는 만병통치약이 아니며 다른 교구와 다를 바 없는 또 하나의 교구이지 교사의 대용물이 아니다. Maple의 사용도 다른

소프트웨어의 사용과 마찬가지로 다음과 같은 여러 가지 주의할 점이 있다.

- (1) 교사가 Maple의 사용법에 자신감을 가지고 적극적으로 자신있게 수업을 해야 한다.
- (2) 학생들이 알고 있는 간단한 수학의 내용을 Maple을 통해서 수행하는 명령문과 이를 실행했을 때 출력되는 결과를 간단히 소개함으로써 Maple이라는 소프트웨어를 자연스럽게 소개한다.
- (3) 학생들에게 Maple사용법을 익힐 수 있는 방법을 제공해야 한다.
- (4) 수학 내용보다 Maple 그 자체에 중점을 두어서는 안 된다.
- (5) 칠판과 적절한 배합으로 사용하여야 한다.
- (6) Maple을 언제 어떻게 사용할 것인가에 대한 교육적·심리적 고려를 숙고한 후 사용하여야 한다.
- (7) Maple을 일회적이 아니고 자주 사용하여 그 효과를 극대화하여야 한다.
- (8) 효과적 수업은 복잡하고 시간이 많이 드는 것이므로 인내를 가지고 준비하여야 한다.
- (9) Maple을 사용하는 동안에도 수학적 사고를 할 수 있도록 왜라는 질문을 자주 던져야 한다.

## V. 결 론

수학은 지필수업만으로 잘 이루어지지 않는다는 점을 Maple을 도입함으로써 교사 스스로에게 뿐만 아니라 학생으로 하여금 수학에 흥미를 느끼게 해주고 새로운 방향에서 수학의 이용을 맛보게 하는 것은 꼭 필요하다고 본다.

Maple을 이용한 수업은 교사에게 사용상의 어려움과 많은 주의점을 준다. Maple의 기능을 능숙하게 익혀야 하고 수업내용에 맞는 명령문을 작성하여야 한다. 이러한 어려움은 교사의 재교육을 통해서 잘 이루어 질 수 있다고 본다. 무엇보다도 화면에 출력된 결과를 학생이 보면서 가질 수 있는 수학적 오개념의 형성과 같은 부정적 결과가 나타나지 않도록 세심한 주의가 필요하다. 컴퓨터를 수학교육에 효과적으로 사용하기 위해서는 여러 방향으로 세심한 연구가 이루어져야 한다.

이 글에서는 기호연산이 가능하고 그래픽 기능이 뛰어난 Maple을 사용하여 교사가 어떻게 수업을 할 수 있는지 여러 가지 예를 들어 보았다. 이러한 Maple 사용의 실제 예들이 교사로서 하여금 Maple을 가지고 무엇을, 어떻게, 왜 하여야 하는지를 이해하게 하고 Maple을

이용한 수업 준비의 소재가 될 수 있다고 본다. 여기서는 지면의 한계성으로 인해 교과과정에서 나오는 문제의 해결 방법을 모두 제시하지 못하였다. 교과과정에 맞는 Maple의 사용 지침서와 다양한 이용 방법을 개발하면 교사가 사용하기에 좋은 교육 준비자료가 될 것이다. 교실현장에서 Maple을 이용한 수업의 효과분석에 대해 앞으로 연구하겠다.

### 참 고 문 헌

- 권오남, 박경미 (1997). 그래픽 계산기를 활용한 수학교육. *청람수학교육*, 6, 23 - 238.
- 류희찬 (1997). 수학교육에서의 컴퓨터의 활용 : 현황과 과제. *청람수학교육*, 6, 1 - 21.
- 류희찬, 조완영(1998). 컴퓨터 수학교육론의 인식론적 심리학적 기초. *대한수학교육학회 추계 수학교육학 연구발표대회 논문집* 99 - 117.
- 이현영 (1996). 프로그래밍 수업을 통한 학습자들의 수학과 컴퓨터의 연계성 인식의 변화에 대한 연구. *대한수학교육학회 논문집*, 6, 295-301.
- 장경윤 (1996). 컴퓨터와 수학, 수학교육. *대한수학교육학회 논문집*, 6, 33 - 44.
- 전영국 (1997). WWW와 Mathematica를 이용한 CAI 개발. *대한수학교육학회 논문집* 7, 281 - 292.
- 전영국, 주 미(1998). 기하문제해결에서의 GSP를 활용한 탐구학습 신장. *대한수학교육학회 추계 수학교육학 연구발표 대회 논문집*, 413 - 427.
- 조한혁 (1992). 교육용 컴퓨터 언어 말. 아가페교육연구소.
- 황우형 (1996). 그래픽 계산기 활용의 실제 : 함수의 그래프와 방정식의 해를 중심으로. *대한수학교육학회 추계 수학교육학 연구발표대회 논문집*, 105 - 122.
- 황혜정 (1996). 안내적 발견학습방법에 따른 수학과 문제해결력 신장을 위한 CAI 프로그램. *대한수학교육학회 논문집*, 6, 87-98.
- Dubinsky, E., & Tall, D. (1991). Advanced mathematical thinking and the computer. In Tall, D.(Ed.), *Advanced mathematical thinking*(pp.231~248). Kluwer Academic Pub.
- Glass, E. M. (1984). Computers: Challenge and opportunity. In Hansen, V.P. & Zweng, M.J.(Eds.), *Computers in mathematics education*(pp.10~14). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hatfield, L. L. (1984). Toward comprehensive instructional computing in

- mathematics. In Hansen, V.P. & Zweng, M.J.(Eds.), *Computers in mathematics education*, (pp.1~9). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Manouchehri, A., Enderson, M.C., & Pagnucco, L.A. (1998). Exploring geometry with technology. *Mathematics teaching in the middle school*, 3, 436 ~ 442.
- Mason, J. (1995). What, why and how in mathematics. *Micromath*, 10 ~ 14.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA : Author.

## Application of Maple to School Mathematics

Sang Mok Choo(Seoul National University, Graduate School)

Sang Kwon Chung(Seoul National University)

Maple is introduced for school mathematics. Many applications of Maple to school mathematics are given in order for teachers to have ideas how to use it. Effects of computer softwares including Maple are also discussed. Some points which teachers have to consider are listed when they use softwares in school mathematics.