대한수학교육학회지〈학교수학〉제 1 권 제 1 호
Journal of the korea society of educational studies in mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.1, 135~156, March 1999

중 · 고등학교 수학의 시각화

문 광 호 (중경고등학교)
우 정 호 (서울대학교)

I. 서 언

많은 중 · 고등학교 학생들에게 수학은 어렵고 지루한 교과로 인식되고 있다. 그 주요한 이유 중의 하나는 추상화된 내용을 기호로 나타내고 형식적으로 전개해 나가면서 논리적 엄밀성을 강조하기 때문이다. 추상화와 논리적 엄밀성이 현대수학의 중요한 특징이긴 하지만, 처음부터 기호 표현을 제시하고 논리적 엄밀성을 강조한다고 해서 그것에 곧바로 도달될 수 있는 것이 아니다.

수학을 배우는 과정에서는 직관적인 전개를 통해 이해를 돕고 점진적인 형식화를 이루도록 지도하는 것이 필요하다. 그 중에서도 시각은 인식의 가장 중요한 기초가 되며 직관과 통찰에 도움을 주고 이해의 토대가 되므로, 시각적인 방법으로 수학적 내용을 제시하는 것은 학생들이 수학적 개념을 이해하고 나아가 점진적인 형식화를 이루는데 많은 도움을 줄 수 있을 것이다.

본고에서는 먼저 수학 교육에서 시각화의 의미와 역할을 살펴본 다음, 현행 중 · 고등학교 수학교과서에서 이용되는 시각적 자료를 대수와 기하 영역을 중심으로 분석하고 활용 가능한 여러 가지 자료를 제시하였다. 특히, 교과서에서 이용되는 시각적 자료는 동적이고 생동감있는 내용을 보여줄 수 없는 바, GSP(Geometor's Sketch Pad)와 IES(International Education Software)의 applet[1] 을 이용하여 기하 학습-지도에서 이용될 수 있는 다양한 동적인 자료를 제시하였다. 본 논문에서 언급되는 IES 는 인터넷 Website인

http://www. ies. co. jp

를 나타낸다.

---

1) 작은 컴퓨터 프로그램

Ⅱ. 수학 교육에서 시각화의 의미

'시각화'의 사전적 의미는 '눈에 보이지 않는 것을 볼 수 있는 형태로 만들어 보여주는 것'이다(교학사, 1989). 다시 말해서 시각화는 전달하고자 하는 내용을 우리 눈으로 인식할 수 있는 모든 방법, 예컨대 문자 · 도형 · 그림 · 모형 · 영상 등을 이용하여 나타내는 것이라고 할 수 있다. Zimmermann 등(1991)은 수학에서의 시각화를 '손으로 그리든, 컴퓨터를 이용하든 관계없이 수학적 개념 · 원리 · 문제 들을 기하학적으로 또는 그래프로 표현하거나, 그렇게 표현된 것을 이용하는 것'이라고 정의하고 있다. 이에 따르면, 시각화란 수학적 내용을 담은 시각적 자료를 만들거나 이용하는 것이다.

수학적 사고에서의 시각화의 중요성은 현대 추상수학의 창시자라고 할 수 있는 Hilbert의 다음과 같은 말에서 명확히 드러난다. "이중부등식 $a > b > c$와 함께 '사이에 있다'는 아이디어에 대한 기하학적 그림으로 직선 위에서 잇달은 세 점의 그림을 항상 사용하지 않는 사람이 있는가? 함수의 연속성이나 집적점의 존재에 대한 어떤 어려운 정리를 완전히 엄밀하게 증명하도록 요구될 때 거듭 에워싸고 있는 선분이나 직사각형의 그림을 이용하지 않는 사람이 있는가?(Fischbein, 1987, p.17)" Klein 역시 시각화의 중요성에 대하여 다음과 같이 말하고 있다. "논증과 관련된 그림을 계속적으로 참조하지 않고 기하학적 증명을 순전히 논리적으로 읽어가는 것은 나에게는 불가능하다.(Klein, 1973, pp.46-47)"

Bruner(1966)의 EIS 이론은 수학적 조작의 내면화 전략에서 시각적 자료가 매우 중요한 위치를 차지함을 말해주고 있으며, 연역적으로 전개되는 중등학교 수학의 전형인 '새 수학'에 대한 신랄한 비판가로 유명한 Klein(1973)은 이해를 위한 수학 학습-지도는 기본적으로 직관적으로 전개되어야 함을 주장하고 있다.

학생들이 수학적 개념을 형성하고 이해하는 정도는 교사가 제시하는 표현에 의해 크게 좌우된다. 따라서 표현 방법의 적절성은 수업의 효율성을 결정짓는 중요한 요소 가운데 하나이다. 교사가 수학적 표현을 제시할 때, 중요한 전략은 수학적 의미를 살리면서 표현 규약을 의식하도록 하는 것이다. 형식적인 표현으로 전환하는 중간 단계인 비형식적 표현과 과도기적인 시각적 표현을 이용하는 것이 효과적일 것이다.

시각화의 대표적인 유형으로는 기호로 나타내어진 수학적 내용을 도해의 형태로 제시한 정적인 것과 컴퓨터나 영화를 이용한 동영상과 같은 동적인 것이 있다. 컴퓨터는 교실 수업 현장에서 직접 다루면서 특히 학생들에게 역동적인 동영상을 통해 수학적 불변성을 보여줄 수 있다는 측면에서 수학의 시각화를 돕는 매우 뛰어난 도구이다.

지식을 직관적으로 제시하고자 할 때 대체로 시각적인 방법을 이용하게 된다. 따라서 시각화 자료는 직관적 지식의 대표적 유형이라고 할 수 있으며, Fischbein(1987)이 분석한 직관의 인지적 특성인 자명성, 내재적 확실성, 고집성, 강제성, 이론적 성격, 외삽성, 전체성이란 특성을 갖는다고 볼 수 있다. 이러한 특성은 시각화 자료가 수학적 사고에서 긍정적 측면과 함께 부정적 측면도 내포하게 됨을 말해 준다. 이를테면, 연속함수의 그래프는 시각적으로 볼 때 끊어지지 않았으므로 미분계수가 존재하는 구간이 반드시 있다고 여겨져 왔으나 Weierstrass가 모든 점에서 미분계수를 갖지 않는 연속함수를 제시함으로서 그 동안 수학자들이 시각에 의존하여 명백하리라고 생각해 왔던 것이 잘못된 인식일 수 있음을 보여 주었다.

더욱이, 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션 등을 통한 컴퓨터 소프트웨어를 이용하는 수학 학습-지도 상황에서 강렬한 시각적 자극으로 수학적 사고가 어렵게 되고, 학생들이 주어진 과제가 의도하는 지식을 얻는데 초점을 두기 보다는 주어진 과제를 해결하기 위해 도입된 시각적 수단에 대한 조작에 몰입하게 되어 소위 메타-인지적 이동이 일어날 수 있는 위험성이 있음에 유의해야 할 것이다.

Ⅲ. 수학 교육에서 시각화의 역할

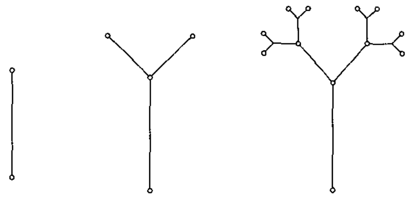
여기서는 수학의 학습-지도 과정에서 보이는 시각화의 역할을 네 가지 측면 즉, 학습 동기부여 측면, 수학적 사실의 직관 및 기억의 측면, 증명의 측면, 그리고 문제해결의 측면에서 살펴보고자 한다.

정교하게 잘 고안된 시각적 자료는, 수학에 대한 실패의 기억 때문에 수학을 거부하는 학생들에게 수학의 의미와 아름다움을 경험할 수 있게 해준다. 새로운 단원을 시작하면서 앞으로 배우게 될 수학적 내용을 종합한 시각적 자료를 제시하는 것은 학생들이 수학 학습 내용을 예견할 수 있게 하고 수학 수업에 대한 친근감을 가질 수 있게 해준다. 시각적으로 아름답게 제시된 내용들을 접하게 되면 학생들은 수학을 직관적으로 이해하려는 노력을 하게 된다. 그와 같이 시각적 자료를 통하여 수학 학습에 대한 학생들의 심리적 상태가 긍정적으로 변화되었을 때 학생들은 수학 학습에 의욕과 호기심을 갖게 될 것이다.

이를테면, 고등학교 수학 I의 무한급수 단원을 시작할 때 이용할 수 있는 동기부여의 방안으로, 다음과 같은 [무한히 자라는 나무]와 [코흐의 눈송이]를 사용할 수 있을 것이다.

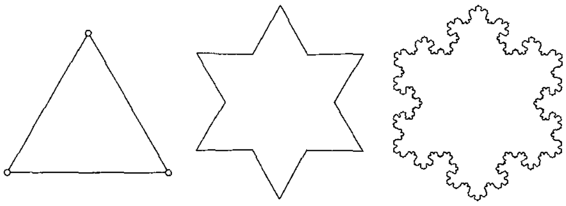
[무한히 자라는 나무] : 한달에 1m씩 자라는 나무가 있다. 첫째 달에는 지면에 수직되게 1m를

자라고, 다음 달에는 가지의 끝에서 서로 수직을 이루는 두 개의 가지가 나와서 각각 $\frac{1}{2}$ m씩 자란다. 셋째 달에도 마찬가지 방식으로 각각의 가지끝에서 두 개씩의 가지가 $\frac{1}{4}$ m씩 자란다. 이런방법으로 나무가 무한히 자란다고 할 때, 이 나무의 높이는 어떻게 되겠는가? 또 이 나무의 폭은 어떻게 되겠는가?[2)]



〈그림 1〉 무한히 자라는 나무

[코흐의 눈송이] : 처음에 한 변의 길이가 1cm인 정삼각형에서 시작한다. 다음에는 각 변을 삼등분한 두 점을 한 변으로하여 새로운 정삼각형을 만든다. 이와 같은 절차를 무한히 계속할 때, 이 다각형의 둘레의 극한은 어떻게 되는가? 또 이 다각형의 넓이는 어떻게 되겠는가?[3)]



〈그림 2〉 코흐의 눈송이

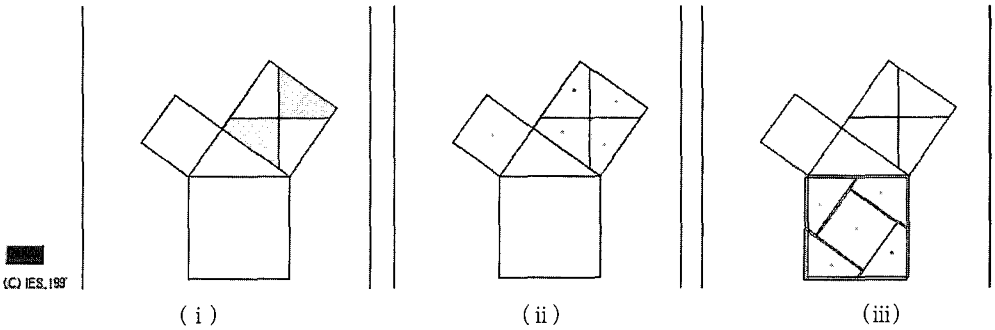
그리고, 수학적 지식에 대하여 기호 표현과 함께 시각적인 자료가 제시될 때 그 지식에 대해 보다 강한 확신을 가지게 될 것이다. 또한 그렇게 학습한 내용은 대수-논리적인 전개로만 학습할 때 보다 학생들의 기억 속에 오래도록 남아있게 된다. 논리적인 문장은 읽어가면서 점진적으로 이해되지만, 시각적 자료는 동시에 전체적으로 전달되어 기억되기 때문이다.

이를테면, 〈그림 3〉은 Dudeney가 피타고라스 정리의 증명 지도에서 이용한 방법인데 그 과정을 컴퓨터로 보여주면 다음과 같다. 처음 화면은 〈그림 3〉의 (ⅰ)과 같다. Define 을 누르면 위에 있는 색칠된 5개의 사각형에 각각 하나씩 빨간 점이 생긴다(ⅱ). 마우스를 이용하여 빨간 점을 드래그하여 아래의 정사각형을 덮는다. 먼저 오른쪽 정사각형을 나눈 4개의 사각형을 차례로 옮기고 마지막에 왼쪽의 작은 정사각형을 아래에 있는 정사각형의 중앙에 채우면 된다(ⅲ).

---

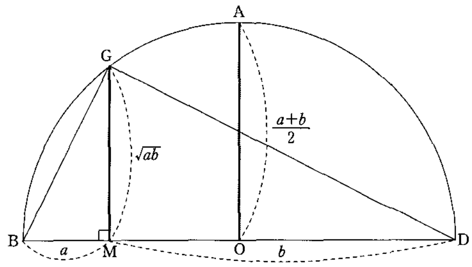
2) 높이의 극한은 $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ 이고 폭은 $\frac{2(\sqrt{2}+1)}{2}$ 이다. 동기부여가 목적이므로 즉시 답을 제시하지 않고 학생들에게 생각해보도록 하며 앞으로 수업을 통해서 학생들이 스스로 깨닫게 되리라는 것을 강조한다.

3) 제 n번째 다각형의 둘레의 길이를 a_n이라 하면 $a_{n+1}=\frac{4}{3}\times a_n$이므로 이 무한 다각형의 둘레의 길이는 발산한다. 그러나, 넓이는 $\frac{2}{5}\sqrt{3}$ 에 수렴한다.



〈그림 3〉 피타고라스 정리의 증명(Dudendy의 방법)

다음에는 고등학교 공통수학에서 다루는 산술평균과 기하평균의 대소관계에 대한 증명의 시각화 예를 살펴보자. 〈그림 4〉와 같이 선분의 길이를 비교하는 Gallant의 방법을 통해 확인할 수 있다(MAA, 1992).



〈그림 4〉 산술평균과 기하평균의 비교 (Gallant의 방법)

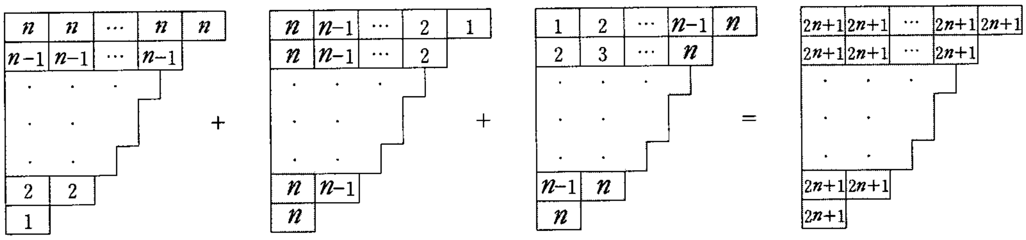
두 양수 a, b 에 해당하는 길이를 각각 $\overline{BM}$, $\overline{MD}$ 라 하고, $\overline{BD}$ 를 지름으로 하는 반원을 그린다. $\overline{AO}$ 원의 반지름이므로 $\frac{a+b}{2}$(a, b의 산술평균) 이다. 점 M에서 $\overline{BD}$에 수직인 직선이 반원과 만나는 점을 G라 하면, $\angle BGD$는 지름의 원주각이므로 90°이다. 따라서, 세 삼각형 $\triangle BGD$, $\triangle BMG$, $\triangle GMD$가 모두 닮은 직각삼각형이기 때문에, $\overline{GM} = \sqrt{ab}$ (a, b의 기하평균)가 된다. 이제 두 선분 $\overline{AO}$와 $\overline{GM}$의 길이를 비교하면, $a=b$일 때에만 $\overline{AO} = \overline{GM}$이고, 그렇지 않으면 $\overline{AO} > \overline{GM}$이다. 그러므로 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ 이다.

이상의 두 예에서 볼 수 있듯이 시각적 방법을 이용하게 되면 수학적 정리의 내용이 한눈에 들어오고 그것의 의미 파악이 용이하며 오래 기억될 수 있게 될 것이다.

한편, 전통적으로 증명은 "주어진 여러 개의 전제들로부터 추측되는 어떤 결론을 연속적으로 연결된 논리를 통하여 추론하는 과정(Suydam, 1983)"으로 인식되어 왔다. 수학자들의 실제적인 수학적 사고에서 그러한 증명은 마지막 마무리이며 그 또한 거듭 세련되어 왔음에도 불구하고, 중등학교 수학에서는 처음부터 완성된 증명을 기성 수학의 형식적 전개 순서에 따라서 학습자에게 부여하는 연역적 전개 양식으로 지도해 왔다. 수학을 학습한다는 것은 수학을 통해 사고를 경험하는 것이며, 중 · 고등학교 학생들은 수학적 사고가 발달되는 과정이므로 증명할 때도 지나친 논리적 엄밀성의 추구보다는 먼저 시각적 자료를 이

용하여 직관적으로 이해하도록 하고 점진적으로 엄밀성을 증가시키도록 지도하는 것이 필요하다.

이를테면, 다음 〈그림 5〉는 $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$임을 보여주는 정적인 시각화의 예이다.



〈그림 5〉 $\sum_{k=1}^{n} k^2$의 증명

왼쪽의 세 그림은 1, 2, 3, $\cdots$, n 을 각각 위치를 달리하여 1번, 2번, 3번, $\cdots$, n번을 기록한 것이며 각각 그 수의 합은 $1\times1 + 2\times2 + 3\times3 + \cdots + n\times n$ 즉, $\sum_{k=1}^{n} k^2$이다. 그리고 오른쪽 마지막 그림은 왼쪽의 세 그림에서 같은 위치에 있는 수끼리 합하면 각각 $(2n+1)$이 됨을 보인 것이다. 즉, 수 전체의 합은 $(2n+1)\times(1+2+3+\cdots+n)$이다. 이것을 식으로 나타내면 다음과 같다(MAA, 1992, p.79).

(좌 변)	(우 변)
$3\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\}$	$(2n+1)\times\{1+2+3+\cdots+n\}$
$=3\times\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\}$	$=(2n+1)\times\frac{1}{2}n(n+1)$

따라서, $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

또한, $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$임을 다음과 같이 그림을 이용하여 시각적으로 보여줄 수 있다.(MAA, 1992).

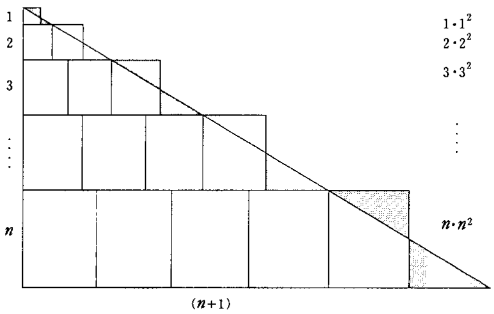
〈그림 6〉에서 삼각형의 밑변은 $(n+1)$이 n개이므로 길이가 $(n+1)n$이고 세로의 길이는

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}\times n(n+1)$$

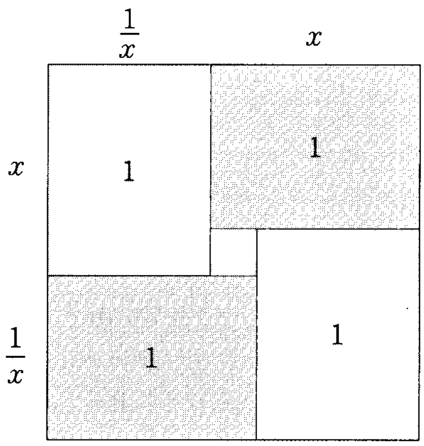
따라서, 삼각형의 넓이는

$$1\times1^2+2\times2^2+3\times3^2+\cdots+n\times n^2=\frac{1}{2}n(n+1)\times\frac{1}{2}n(n+1)=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

즉, $k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$



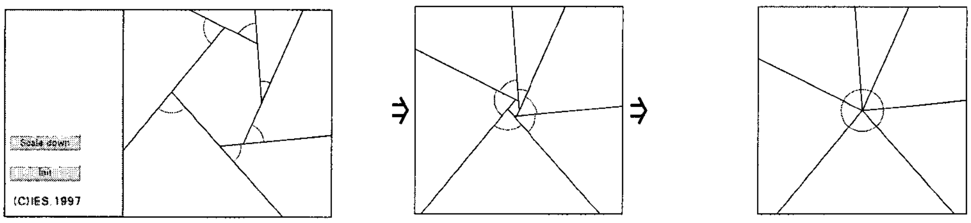
〈그림 6〉 삼각형의 넓이를 이용한 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 의 계산



〈그림 7〉 $x+\frac{1}{x}>2$의 증명

또한 〈그림 7〉은 절대부등식 「1이 아닌 양수 x에 대하여, $x+\frac{1}{x}>2$」이 성립함을 보인 시각화의 예이다. 변의 길이가 $(x+\frac{1}{x})$인 정사각형은 넓이가 1인 4개의 직사각형과 한 개의 작은 정사각형으로 나누어진다. 따라서 $x+\frac{1}{x}>2$ 임을 알 수 있다.

그리고 〈그림 8〉은 중학교 1학년에서 배우는 「다각형의 외각의 합이 360°」임을 시각적으로 보여주는 IES의 Applet이다.



〈그림 8〉 볼록 다각형의 외각의 합

다음 〈그림 9〉는 반지름의 길이가 1인 반원에서 직각삼각형의 닮음을 이용하여 삼각함수의 배각의 공식을 직관적으로 증명한 것이다(MAA, 1992).

$\triangle ACD \backsim \triangle ABC$에서

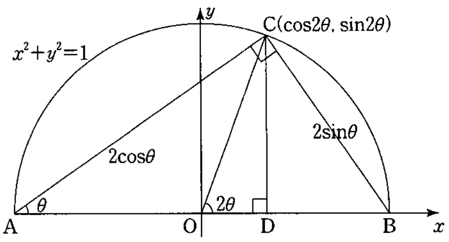
$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 이므로,

$$\frac{\sin 2\theta}{2\cos\theta} = \frac{2\sin\theta}{2}$$

$$\therefore \sin 2\theta = \sin 2\theta \cos\theta$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \frac{1+\cos 2\theta}{2\cos\theta} = \frac{2\cos\theta}{2}$$

$$\therefore \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$



〈그림 9〉 닮음을 이용한 삼각함수의 배각 공식 증명

이상과 같이 증명 지도에서 시각적 자료를 활용하게 되면 기존의 대수적 · 논리적 증명에만 의존하는 경우보다 증명 학습에 생기를 불어넣어 줄 수 있을 것이다.

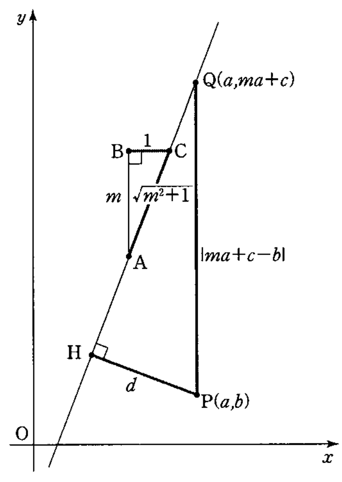
문제해결에서 그림을 그리고 기호를 붙여보는 것은 주어진 조건과 자료 및 풀이 사이의 관계를 유기적으로 생각할 수 있게 함으로서 문제를 이해하고 해결 계획을 탐색하는 데 매우 중요한 역할을 한다. Polya(1991)는 이러한 이유로 현대적 발견술에서 문제해결을 위한 중요한 전략으로 '그림을 그려 보아라' 는 권고를 하고 있다. 다음은 문제해결 과정에서 시각화의 역할을 잘 보여주는 예이다.

〈그림 10〉은 삼각형의 닮음을 이용하여 점과 직선 사이의 거리를 구한 것이다(MAA, 1992). 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=mx+c$와 만나는 점을 Q라 하고, 직선 $y=mx+c$ 위에 빗변을 갖는 직각삼각형 ABC를 그린다.

$\triangle PHQ \backsim \triangle ABC$ 에서

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AC}}, \quad \frac{d}{1} = \frac{|ma+c-b|}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\therefore \overline{PH} = d = \frac{|ma+c-b|}{\sqrt{1+m^2}}$$



〈그림 10〉 점과 직선 사이의 거리

역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이라는 성질과 미분계수는 그래프의 점에서 접선의 기울기라는 것을 이용하여, 다음과 같이 역함수의 도함수를 구하는 공식 을 이끌어낼 수 있다.

$y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그래프 위의 두 점 P(a, b)와 Q(b, a)에서 그은 두 접선도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 즉,

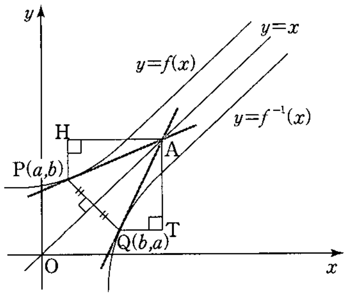
$$f'(a) = \frac{\mathrm{HP}}{\mathrm{AH}},\ (f^{-1})'(b) = \frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{QT}}$$

그런데 $\triangle \mathrm{PHA} \equiv \triangle \mathrm{QTA}$ 이므로

$$\frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{QT}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HP}}$$

즉, $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

$$\therefore\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)},$$



〈그림 11〉 역함수의 도함수

Ⅳ. 중 · 고등학교 수학에서 이용될 수 있는 시각화 자료

1. 대수 분야

1) 산술평균 · 기하평균 · 조화평균의 대소관계

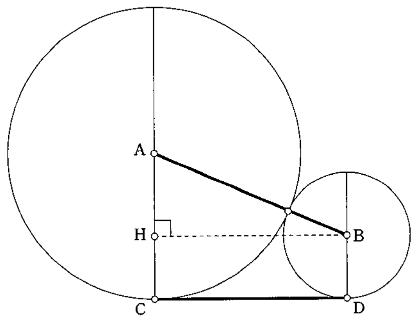
현행 교과서에서는 산술평균 · 기하평균 · 조화평균의 대소관계를 증명할 때 부등식의 성질을 이용하여 대수적으로 전개하고 있는데, 다음과 같은 자료는 두 양수의 대소를 각각 길이나 넓이로 표현하기 때문에 이해하기가 용이한 훌륭한 시각화 도구라고 생각된다.

① 외접하는 두 원을 이용하는 방법 (MAA, 1992, p.51)

지름의 길이가 각각 a, b인 두 원(단, $a \neq b$) 이 외접할 때, 두 원의 중심 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는 $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2}$로서 a, b 의 산술평균이 되고, 공통접선인 $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이는

$$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{HB}} = \sqrt{(\overline{\mathrm{AB}})^2 - (\overline{\mathrm{AH}})^2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$$



〈그림 12〉 산술평균과 기하평균
(Roland H. Eddy의 방법)

이므로, a, b 의 기하평균이다. 그런데, 〈그림 12〉에서 $\overline{\mathrm{AB}} > \overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ 이다.

② 사각형의 넓이를 이용하는 방법(MAA, 1992, p.50)

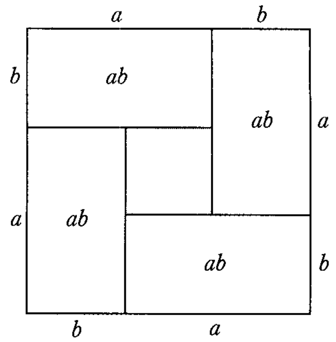
한 변의 길이가 $(a+b)$인 정사각형을 5개의 사각형으로 나누고 각각의 넓이를 비교한다.(단, $a \neq b$인 경우)

a, b가 서로 다른 양수 일 때,

$$(a+b)^2=4ab+\boxed{}$$

$$(a+b)^2>4ab$$

$$\therefore \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$



〈그림 13〉 산술평균과 기하평균
(Doris Schattschneider의 방법)

③ 직각삼각형의 닮음을 이용하는 방법(MAA, 1992, p.54)

직각삼각형 ABC의 각 변의 길이를 $\overline{AB}=\frac{a+b}{2}$, $\overline{BC}=\sqrt{ab}$, $\overline{AC}=\frac{a-b}{2}$로 정하면 △ABC는 직각삼각형이 된다(단, $a \neq b$). 점 C에서 $\overline{AB}$와 평행한 직선과, 점 B에서 $\overline{AB}$에 수직인 직선의 교점을 D라 하면, △ABC ∽ △BCD 이므로

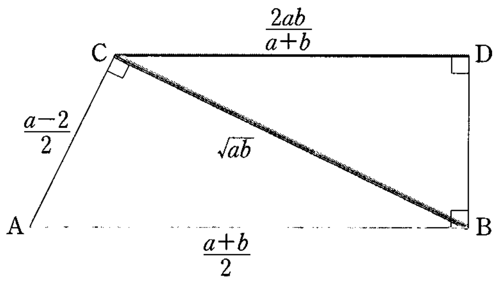
$$\overline{AB} : \overline{BC}=\overline{BC} : \overline{CD}$$

즉, $\frac{a+b}{2} : \sqrt{ab}=\sqrt{ab} : \overline{CD}$

$$\therefore \overline{CD}=\frac{2ab}{a+b}$$

한편, 직각삼각형의 빗변의 길이는 다른 두 변의 길이보다 크므로

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}$$

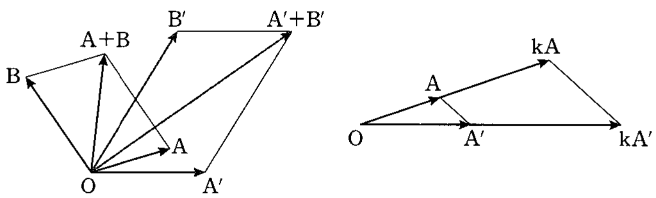


〈그림 14〉 산술 · 기하 · 조화평균의 대소관계(Simey H. Kung의 방법)

2) 행렬과 일차변환

〈그림 15〉과 같이 벡터의 변환에 대한 시각화는 일차변환의 기하학적 의미에 대한 이해를 도울 것으로 생각된다.

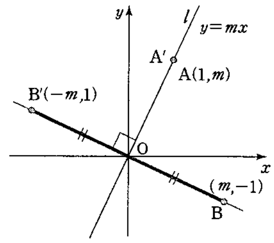
일차변환 f 와 두 점 A, B에 대하여 $f(A)=A'$, $f(B)=B'$ 이면,



〈그림 15〉 일차변환의 기하학적 의미

$f(A+B)=f(A)+f(B)=A'+B'$ $f(kA)=kf(A)=kA'$

또한, 〈그림 16〉는 직선 $l : y=mx$에 대한 대칭변환의 행렬을 구하는 문제해결에 도움을 주는 시각화로 생각된다. 평면에서 구하고자 하는 일차변환을 나타내는 2×2 행렬은 미지수가 4 개이므로 실수배가 아닌 두 점의 상에 의해 유일하게 결정된다. 이제 그림과 같이 계산이 쉬운 두 점 $A(1, m)$, $B(m, -1)$ 의 상을 각각 A', B'으로 놓으면 점 A는 $y=mx$ 위에 있으므로 $A'=A$이고, 직선 BO의 기울기는 $-\frac{1}{m}$이므로 ($\because \overline{BO} \perp l$) 점 B'는 $(-m, 1)$ 이다. 따라서 다음과 같이 일차변환의 행렬 X가 구해진다.



〈그림 16〉 직선 $y=mx$에 대한 대칭변환의 행렬

$$X\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix}$$ 이므로

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 2m \\ m & m^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & m^2+1 \end{pmatrix}^{-1}$$

3) 수열의 n항까지의 합

$\sum_{k=1}^{n} k^3$의 값을 구할 때 대수적인 방법만을 제시하지 않고, 이미 언급한 〈그림 6〉이나 다음〈그림 17〉과 같이 도형의 형태로 제시하는 것은 증명의 수단이 되고 결과를 오랫동안 기억하는데 도움이 될 것으로 생각된다(MAA, 1992).

	1	2	3	·	·	·	n
+	2	4	6	·	·	·	$2n$
+	3	6	9	·	·	·	$3n$
+	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·
+	n	$2n$	$3n$	·	·	·	n^2

	1	2	3	·	·	·	n
+	2	4	6	·	·	·	$2n$
+	3	6	9	·	·	·	$3n$
+	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·
+	n	$2n$	$3n$	·	·	·	n^2

〈그림 17〉 $\sum_{k=1}^{n} k^3$의 계산

$$(\text{좌측 계산})\ 1(1)^2+2(2)^2+\cdot\cdot\cdot+n(n)^2=\sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$(\text{우측 계산})\sum_{k=1}^{n} k+2\sum_{k=1}^{n} k+\cdot\cdot\cdot+n\sum_{k=1}^{n} k=(1+2\cdot\cdot\cdot+n)\sum_{k=1}^{n} k$$

$$\sum_{k=1}^{n} =\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \quad k=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

따라서, $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

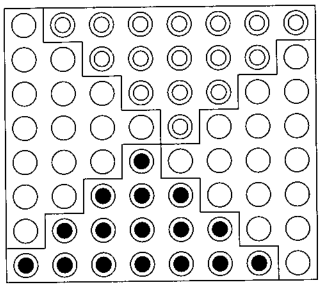
홀수의 수열에서 n항까지의 합을 구하는 문제를 교과서에서는 등차수열의 합 공식에 대입하여 간단하게 해결하고 있다. 그런데 이 문제의 해결을 위해서는 등차수열을 구하는 공식을 반드시 기억하고 있어야 한다.

반면에 〈그림 18〉은 넓이를 이용한 계산이므로 높은 수준의 선행지식을 필요로 하지 않으며 문제해결 과정을 이해하는데 도움을 주는 자료라고 생각된다(MAA, 1992).

$$4\{1+3+5+\cdot\cdot\cdot+(2n-1)\}$$

$$= (2n)^2 = 4n^2$$

$$\therefore\ 1+3+5+\cdot\cdot\cdot+(2n-1) = n^2$$



〈그림 18〉 홀수의 합

2. 기하 분야

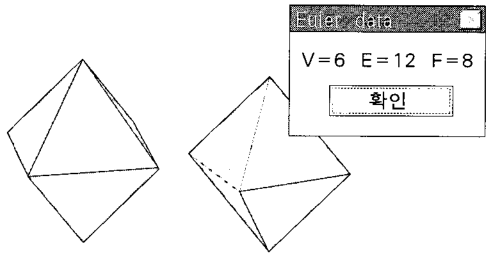
중 · 고등학교의 기하는 대부분이 도형을 그림으로 나타내어 설명하게 되므로 시각화가 가장 많이 이용되는 영역이다. 또한, 기하교육을 위한 여러 가지 컴퓨터 소프트웨어[4]가 개발 · 보급되고 있으며 교육현장에서도 이를 이용한 교육이 시도되고 있다. 여기에서는 학년별로 수업에 활동할 수 있는 시각적 자료를 살펴보고자 한다.

1) 중학교 기하

교과서에 제시되어 있는 시각적 자료는 정적인 한계 때문에 동적인 방법으로 여러 가지 상황을 보여줄 수 없다. 이러한 한계를 극복할 수 있는 하나의 대안이 컴퓨터이다. 제 7 차 교육과정에서는 삭제된 내용이지만, 도형의 위상적 불변성에 대한 지도는 컴퓨터의 동영상 기능을 이용하면 매우 효과적으로 이루어질 수 있다.

---

4) 기하교육과 관련된 소프트웨어로는 Cabri, Logo, GSP 등이 있는데, 본 연구에서는 주로 GSP를 이용하여 제시한다.



〈그림 19〉 Wingeom을 이용한 입체도형의 관찰

그리고 입체도형의 관찰과 오일러의 공식을 지도할 때, Wingeom[5] 을 이용하여 움직이는 삼차원 입체도형을 관찰함으로 학생들에게 입체도형에 대한 이해를 도울 수 있다. 정팔면체를 불러오고 이 도형을 회전[6]시켜가면서 입체의 모양을 보여줄 수 있다. 또한 Other→Euler 를 선택하면 꼭지점(V), 변(E), 면(F)의 개수가 표시되므로 오일러의 공식을 확인시킬 수 있다.

중학교 2학년 수학에서 처음 도입되는 증명의 지도는 학생들에게 많은 어려움을 제기하고 있으며, 또한 그 학업성취도 매우 낮다(우정호, 1998b). 형식적인 증명을 다루기 전에 정리의 의미를 컴퓨터의 동영상을 이용하여 제시한다면 동기부여와 함께 증명 내용에 대한 확인 및 결과의 기억에 많은 도움이 될 것으로 생각된다. 이를테면, 사각형의 중점연결정리는 동영상을 이용하여 사각형의 형태를 다양하게 변형시킬 때 각 변의 중점을 연결하는 도형이 평행사변형이란 불변성으로 유지됨을 보여줌으로써 강렬한 인상을 심어줄 수 있을 것이다.

다음은 피타고라스 정리의 여러 가지 시각적인 증명 방법으로 학습-지도에 도움이 될 것으로 생각된다.

① Garfield[7]의 방법(MAA, 1992)

사다리꼴을 두 개의 합동인 직각삼각형과 하나의 직각이등변삼각형으로 나누고 각각의 넓이를 비교하는 방법이다.

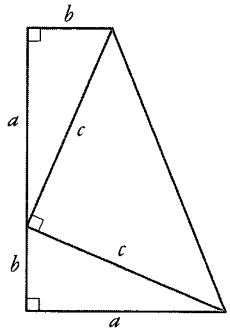
$$(\text{사다리꼴의 넓이})=\frac{(\text{밑변}+\text{윗변})}{2}\times(\text{높이})$$

$$=\frac{a+b}{2}\times(a+b)\cdots\cdots\cdots\cdots ㉠$$

$$(\text{합동인 두 직각삼각형의 넓이})+(\text{직각이등변삼각형의 넓이})$$

$$=2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2\cdots\cdots\cdots\cdots ㉡$$

㉠ = ㉡ 에서 $a^2+b^2=c^2$



〈그림 20〉 피타고라스 정리의 증명(Garfield의 방법)

5) http://www.exeter.edu/~rparris에서 Wingeomz.exe를 다운받는다.
6) 메뉴의 View → Observer → Turn 순으로 선택한다. 단축키는 F9.
7) James A. Garfield-미국의 제20대 대통령

② Michael Hardy의 방법(MAA, 1992)

빗변을 반지름으로 하는 원의 내부에 있는 직각삼각형의 닮음을 이용하여 증명하는 방법이다.

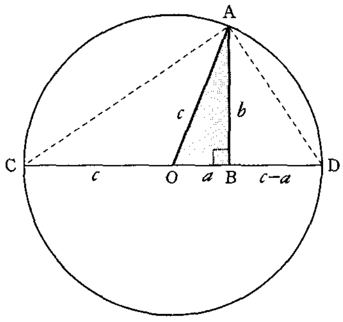
$\triangle ABC \backsim \triangle DBA$ 에서

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DB} : \overline{BA}$

$\overline{AB} \cdot \overline{BA} = \overline{BC} \cdot \overline{DB}$

$b^2=(c+a) \cdot (c-a)=c^2-a^2$

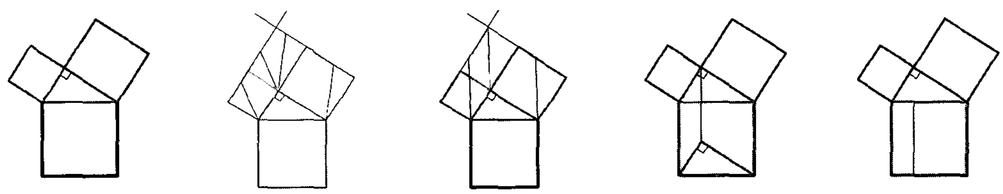
$\therefore a^2+b^2=c^2$



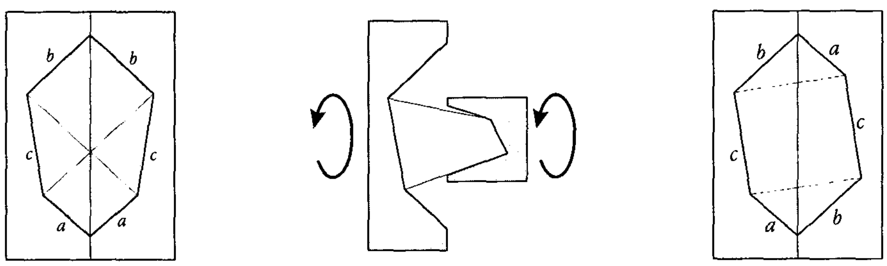
〈그림 21〉 피타고라스 정리의 증명(Michael Hardy의 방법)

③ 컴퓨터의 동영상을 이용한 방법

다음 그림과 같이 넓이를 보존하는 도형의 연속적 변형에 의해서 직각을 낀 두 변 위에 있는 두 정사각형의 넓이의 합이 직각삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 같음을 보인다.


〈그림 22〉 피타고라스 정리의 시각적 증명

④ 컴퓨터의 동영상을 이용한 도형 뒤집기 방법(IES)



〈그림 23〉 피타고라스의 정리의 증명(도형 뒤집기)

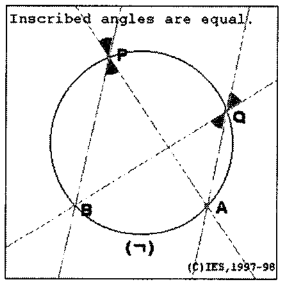
〈그림 23〉은 직사각형을 반으로 나누고 직사각형 안에 한 변의 길이가 각각 a, b인 정사각형과 세 변의 길이가 각각 a, b, c (c는 빗변)인 두 개의 직각삼각형을 오려낸 모양이다. applet의 Hint 를 누르면 직사각형의 한쪽 부분이 뒤집혀서 붙는다. 오려낸 부분의 넓이가

처음에는 a^2+b^2+(2개의 직각삼각형)이었고 나중에는 c^2+(2개의 직각삼각형) 이므로 $a^2+b^2=c^2$이 성립한다.

원과 사각형, 접선과 현이 이루는 각에 관한 다음 세 가지 정리를 하나의 동영상으로 확인할 수 있다. 교과서에서는 이 세 개의 정리를 각각 다른 방법으로 증명하고 있는데 하나의 Applet으로 아래와 같이 확인시킬 수 있다. 원주 위의 세 점(A, P, Q)을 원주 위에서 자유롭게 움직일 수 있는데 아래의 그림은 점 P만을 움직인 것이다. 점 P를 움직여가면 그림에 해당하는 정리가 영문으로 제시된다. 이 세 가지 정리의 기본이 되는 것은 〈그림 24〉에서 보여주는 원주각의 불변성이다.

[정리 1] 동일한 호에 대한 원주각의 크기는 일정하다

〈그림 24〉로부터 두 원주각 ∠P, ∠Q 의 크기는 모두 중심각의 크기의 반이다.



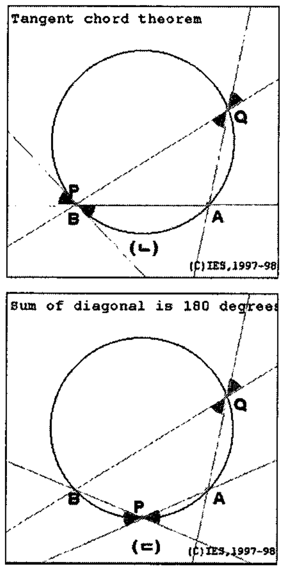
〈그림 24〉

[정리2] 원 위의 한 점에서의 접선과 현이 이루는 각의 크기는 현의 원주각의 크기와 같다.〈그림 25, 상〉

점 P가 점 B에 가까이 가서 일치하게 될 때, 점 B에서의 접선이 현 AB와 만나는 각으로 된다.

[정리3] 원에 내접하는 사각형의 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180°이다.〈그림 25, 하〉

점 P가 점 B를 지나서 그림과 같이 호 AB의 사이에 오면 사각형의 마주보는 두 각 ∠P, ∠Q 의 합은 180°가 된다.



〈그림 25〉 원주각, 접선, 사각형

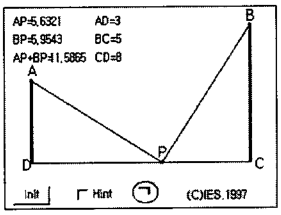
2) 고등학교 기하

기하 영역에서 중학교와 고등학교 수학의 차이점 가운데 하나는 해석 기하의 도입이다. 이는 Euclid의 공리적인 방법에서 Descrates의 대수적인 방법으로의 전환을 의미한다. 좌표가 없는 유크리드 평면에서는 점과 직선 사이의 거리를 생각할 수 없었지만 좌표평면에서는 거리를 수치로, 도형을 방정식으로 표현하게 된다. 그런데 이렇게 좌표로 나타내는 것에 집착하다보면 도형의 개념과 관련된 문제해결에 실패할 수도 있다. 예를 들면, '두 점 A(−5, 3), B(3, 5)에서 x축 위에 있는 점 P까지 거리의 합의 최소값을 구

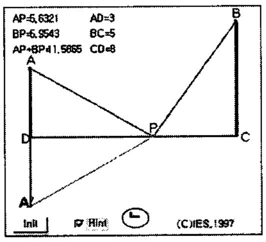
하라'는 문제에서 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$를 각각 식으로 표현한 다음에 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값을 구하려고 하면 무리식이 되어서 고등학생에게는 불가능하게 된다. 그러나 점 A를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점 A′을 그려보면, 답은 $\overline{A'B}$임을 알 수 있다. 〈그림 26〉은 이것을 Applet으로 만든 IES 자료이다. 직선 CD 위의 점 P를 움직일 때마다 선분 AP, BP의 길이와 그 합인 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 주어진다(i). Hint 를 누르면, 점 A를 직선 CD에 대하여 대칭이동시킨점(A′)이 표시되고 선분 A′P가 그려진다(ii).

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$$

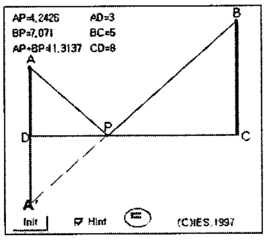
이므로 선분 A′B와 CD의 교점을 P로 선택하면 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값은 최소가 된다(iii).



〈i〉



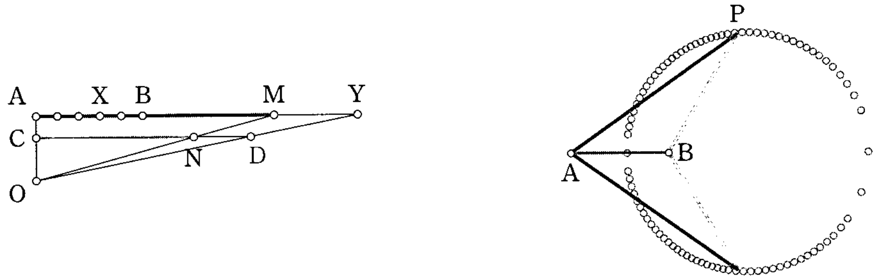
〈ii〉



〈iii〉

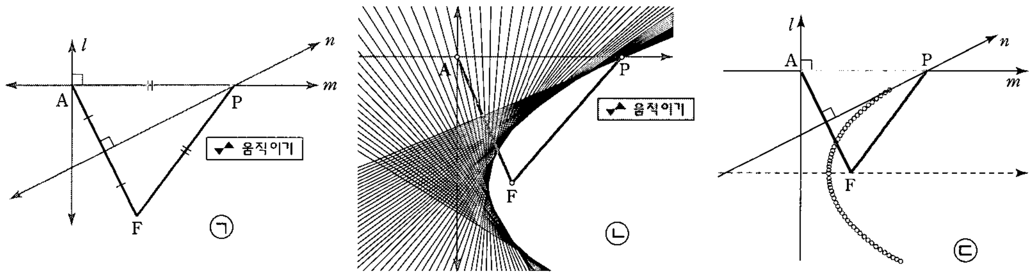
〈그림 26〉 최소거리 구하기

두 점 A, B에서 거리의 비가 일정한 점의 자취는 원(아폴로니우스의 원)이 되는 것을 〈그림 27〉과 같이 GSP를 이용하여 보여줄 수 있다. 예를 들어 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$인 점 P의 자취를 구할 때, 그림과 같이 선분 AB를 하나 더 그리고 선분 AB를 3 : 2로 내분, 외분하는 점을 각각 X, Y라 하고, $\overline{AB}\perp\overline{OA}$, $\overline{OA}:\overline{OC}=3:2$를 만족하는 $\overline{OA}$위의 점을 C, $\overline{CD}$는 $\overline{AB}$와 평행한 직선이라고 하면, $\overline{AM}:\overline{CN}=3:2$이다. $\overline{AP}=\overline{AM}$, $\overline{BP}=\overline{CN}$되게 점 P를 정하고 점 P의 자취를 남기도록 하면 구하고자 하는 원이 그려진다.



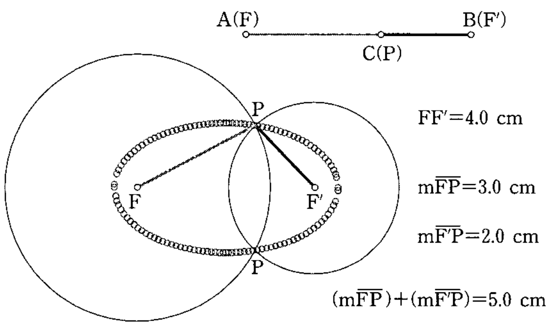
〈그림 27〉 Appolonious의 원

또한, 포물선의 정의에 따라 〈그림 28〉과 같이 GSP를 이용하여 포물선의 작도를 보여줄 수 있다. 한 정직선 l과 그 위에 있지 않은 한 정점 F에 이르는 거리가 같은 점의 자취가 포물선이다. 직선 l 위의 점 A에서 l에 수직인 직선 m과 선분 AF의 수직이등분선 n의 교점 P의 자취를 남기도록 하면 ㉢과 같이 포물선이 그려진다.



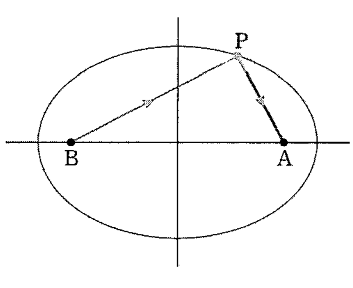
〈그림 28〉 포물선의 작도

교과서에서는 실을 이용하여 타원의 자취를 그리는 방법을 제시하고 있다. 그런데 GSP를 이용하여 〈그림 29〉와 같이 동영상으로 보여주면 학생들의 이해를 도울 수 있을 것으로 생각된다. 두 정점(초점) F, F′ ($\overline{FF'}=4$)로 부터 거리의 합이 일정한 점 P의 자취를 알아보는 것이므로 $\overline{AB}=5$, 점 C를 $\overline{AB}$ 위를 움직이도록 하고, 점 F, F′을 중심으로 반지름의 길이가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ 인 원을 그려서 그 교점을 P로 놓으면 점 P가 그리는 자취가 구하려는 타원이다. 점 C가 움직일 때 마다, $\overline{FP}(=\overline{AC})$, $\overline{F'P}(=\overline{CB})$의 길이를 보여주고 $\overline{FP}+\overline{F'P}=\overline{AB}$로 일정함을 확인시켜줄 수 있다.

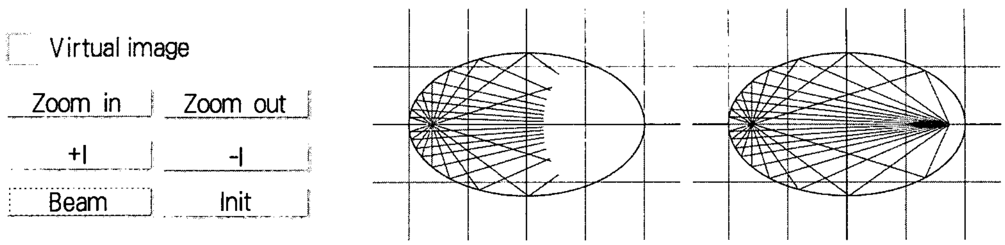


〈그림 29〉 타원의 작도

또한 〈그림 30〉은 타원의 초점이 의미하는 물리학적인 의미 즉, 한 초점에서 나간 빛은 타원경에서 반사되어 다른 초점으로 모인다는 것을 보여주는 IES 의 applet 자료를 이용하면 초첨의 의미를 동영상으로 확인할 수 있다. $\boxed{\text{Zoom in}}$을 누르면 그림이 확대되고 $\boxed{\text{IF}}$

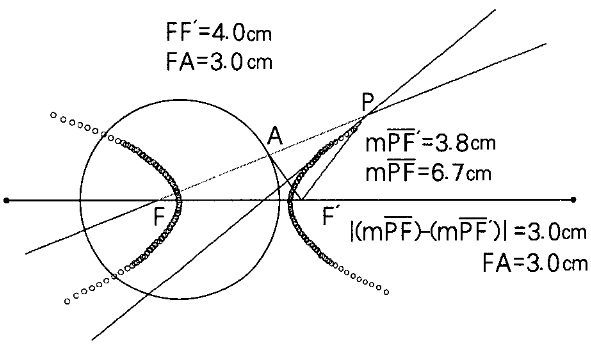


〈그림 30〉 타원의 초첨의 의미



〈그림 31〉 타원의 초점의 성질

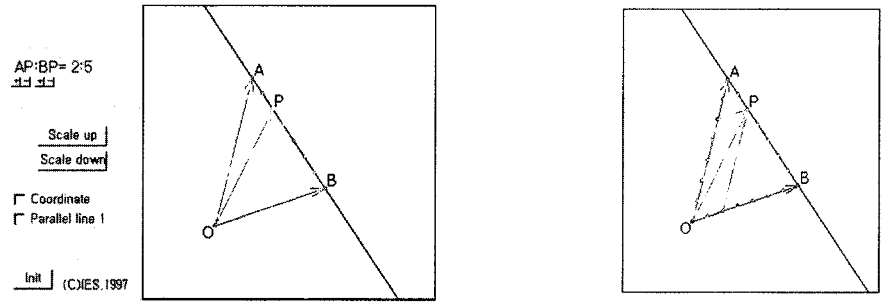
를 누르면 초점 사이의 거리가 증가한다. $\boxed{\text{Beam}}$을 누르면 한 초점에서 나간 빛이 타원에서 반사되어 다른 초점으로 들어감을 보여준다. 〈그림 31〉은 그 과정을 단계적으로 제시한 것이다.



〈그림 32〉 쌍곡선의 작도

교과서에서는 실을 이용하여 쌍곡선의 자취를 그리는 방법을 제시하고 있다. 그런데 GSP를 이용하여 다음과 같이 동영상으로 보여주면 학생들의 이해를 도울 수 있을 것으로 생각된다. 〈그림 32〉은 두 정점 F, F′ ($\overline{F'F}=4$)으로부터 거리의 차가 3인 점 P의 자취를 구하는 예를 제시한 것이다. 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원주위의 점을 A라 하자, 직선 FA와 $\overline{AF'}$의 수직이등분선의 교점을 P라 하고, 점 A를 원주위에서 움직이도록 할 때, 점 P의 자취를 남기도록 하면 쌍곡선이 그려진다.

그리고, 벡터에 관한 다음 IES 의 applet을 이용하면 학생들의 이해에 도움을 줄 수 있을 것으로 여겨진다. 〈그림 33〉는 두 위치벡터의 종점을 지나는 직선 위의 점을 두 위치벡터의 합으로 표현하는 것을 보여주는데 특히, 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 위치벡터는 $\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OB}$을 확인시켜준다. 그림은 선분 AB를 2 : 5로 내분하는 점 P의 위치벡터를 구하기 위해서 선분 OA, OB를 각각 7등분하고, 평행선들을 그려서 벡터 $\overrightarrow{OP}$는 $\overrightarrow{OP}=\frac{5}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{7}\overrightarrow{OB}$임을 시각적으로 보여주고 있다.



〈그림 33〉 내분점의 벡터 표현

V. 결 언

이상으로 수학교육에서의 시각화의 의미와 역할을 살펴보고 중 · 고등학교 수학의 대수와 기하영역에서 학습-지도 과정에서 이용할 수 있는 시각적 자료를 제시하였다.

시각화를 기하화라고 부르기도 하듯이, 현행 교과서에서는 기하 영역에서 시각적 자료를 많이 이용하고 있다. 그러나 교과서에서 제시한 시각적 자료들은 정적인 한계 때문에 동적이고 생동감있는 내용을 보여줄 수 없다. 위에서 컴퓨터 소프트웨어인 GSP와 IES 의 Applet을 중심으로 살펴본 역동적인 시각화 자료를 학습-지도 과정에서 적절하게 활용한다면 학생들의 수학에 대한 관심을 고취시키고, 수학적 사실을 확인하여 그 결과를 오랫동안 기억할 수 있도록 도와준다. 또한 이 적절한 활용이 증명 방법의 다양함을 경험하게 하고, 시각화가 주는 상상능력의 향상으로 문제해결 과정에 도움을 얻게 될 것으로 생각된다.

그러나, 수학 학습-지도에서 시각화는 긍정적인 측면뿐만 아니라 부정적인 측면이 있는 바, 그 면밀한 연구를 통하여 긍정적인 측면을 강화시키고 부정적인 측면을 최소화할 수 있는 방안이 모색되어야 한다. 그리고 다양한 시각적 자료를 학년별 · 영역별 · 유형별로 조사하고 각각의 시각적 자료가 교수-학습 과정에서 어떠한 역할을 하는지에 대한 연구가 요구된다.

그리고 보고에서 살펴본 컴퓨터를 이용한 시각화의 연구 결과는 대부분 기하용 소프트웨어인 Cabri, GSP, LOGO 등의 활용에 관한 것들인데, 그 외에도 Spredsheet[Excel], Equation Grapher, Graphmatica, Sketchpad, Mathview, Mathematica, Simulation s/w 등 다양한 소프트웨어를 이용한 시각화 연구가 필요하다.

학생들이 중 · 고등학교에서 수학을 배우는 시간을 통해서 수학의 가치와 매력을 경험시켜야 함에도 불구하고, 수학이라는 교과내용의 아름다웠던 추억보다는 수학 때문에 마음의

상처를 입은 채로 학교를 졸업하고, 결국은 수학에 대한 부정적인 추억들로 수학을 거부하게 만드는 것은 비인간적인 현실이다. 교과서에 기술되어있는 내용을 '그대로' 학생들에게 가르치는 것이 수학교육의 바람직한 모습은 아니다. 중 · 고등학교 학생들이 가장 많은 시간을 할애하여 수학을 공부함에도 불구하고 수학에 대한 자신감을 갖지 못하고, 대학에 진학해야하기 때문에 마지못해 수학 공부를 하고 졸업하면 모두 잊어버린다는 교육적 비극을 극복하는데 시각화에 대한 연구는 의미있는 기여를 할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육부(1992). 제6차 교육과정(고등학교 수학과) 해설.

교학사(1989). 뉴-에이스 새국어사전.

구광조 외 2인 (공역) (1995).수학 교육과정과 평가의 새로운 방향. 경문사.

김응태 외 2인(1995). 수학교육학 개론. 서울대학교 출판부.

남호영 외 3인(1998). GSP 활용예제(중1,2학년용) 및 CD 수학사랑.

류희찬(1998). 컴퓨터를 이용한 수학교육의 실제. 대한수학교육학회. 추계 수학교육학 연구발표대회 논문집, 29-43.

우정호(1998a). 고등학교 수학II. 지학사.

_____(1998b). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

우정호 (역)(1991). 어떻게 문제를 풀 것인가. 천재교육.

이종영(1998). 컴퓨터 환경에서 다루어지는 수학적 대상에 관한 고찰. 대한수학교육학회. 추계 수학교육학 연구발표대회 논문집. 119-143.

장혜원(1997). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구 : 표상 모델 개발을 중심으로 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

이홍우(역)(1997). 브루너 교육의 과정. 배영사.

Clements, K.(1981). Visual imagery and school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 2(2).

Davis, P. J.(1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 333 ~344.

Fischbein, E.(1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-24.

__________(1987). *Intuition in science and mathematics, an educational approach.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

Freudental, H.(1973). *Mathematics as an educational task.* D. Reidel Publishing Company.

Hilbert, D., & Cohn−Vossen, S.(1995). *Geometry and the imagination. GSP(The Geometer's Sketchpad) User Guide and Reference Manual.* NY : Key Curriculum Press.

Kline, M.(1973). Why Johny can't add : the failure of the new math. st. Martin press.

Leslie, A., Kenneth, L. S., & Norma, C. P.(1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics,* 33, 301−317.

MAA(1995). *Proofs without words − Exercises in visual thinking.*

Presmeg, N. C.(1986). Visualization in high school mathematics, *For the Learning of Mathematics,* 6(3), 42∼46.

Suydam, M. N.(1983). *Classroom ideas from research on secondary school mathematics* − Part 2 : Geometry. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Zimmermann, W., & Cunningham, S.(1990). Editors' introduction : What is mathematical visualization?. In Zimmermann, W. & Cunningham S.(Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics.* MAA.

A Study on the Visualization of Middle & High School Mathematics

Kwang Ho Mun(Jung Kyeong Senior High School)
Jeong Ho Woo(Seoul National University)

The purpose of this study is to discuss about the role of the visualization as an

effective method of teaching abstracted mathematics, to analyze visual materials in middle and high school mathematics and to suggest various visualized materials for teaching mathematics effectively.

Though formal, symbolic and analytical teaching method is a major characteristic of mathematics, the students should be taught to understand through intuition and insight, and formalize the mathematical concepts progressively. Especially the sight is one of the most important basics of cognition for intuition and insight. Therefore, suggesting mathematical contents through the visual method makes the students understand and formalize the mathematical concepts more easily.

In this study, we tried to investigate the meaning and role of visualization in mathematics teaching. And, we discussed about the four roles of visualization in the process of mathematics teaching and learning : confirmation and memorization of the mathematical truth, proving theorem and solving problems which is one of the most important purposes of teaching mathematics.

According to the roles of visualization, we analyzed visual materials currently taught in middle and high school, and suggested various visual materials useful in teaching mathematics. The investigated fields are algebra where visual materials are little used, and geometry where they are use the most. The paper-made-textbook can't show moving animation vigorously. Hence we suggested visual materials made by GSP and applets in IES .