대한수학교육학회지〈학교수학〉제1권 제1호
Journal of the korea society of educational studies in mathematics
School Mathematics, Vol.1, No.1, 95~107, March 1999

초등학교에서 함의의 지도 가능성에 대한 고찰

서 동 엽 (한국교육과정평가원)

I. 서 론

다음은 초등학교 6학년 교과서에 제시되어 있는 'p이면 q이다' 형식의 문장이다.

(가) "2를 분모가 3인 분수로 고치면 $\frac{2\times3}{3}$이다"(교육부, 1997, p. 5).

위의 문장은 함의인가? 이를 중학교 2학년 교과서에 등장하는 다음 문장과 비교해 보자.

(나) "△ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$이면 ∠B = ∠C이다"(김연식 · 김흥기, 1998, p. 215).

함의라는 것은 무엇인가? p라는 가정에서 출발하여 q라는 결론으로 유도될 수 있다면 'p이면 q이다' 라는 문장은 함의라고 볼 수 있는가? (가)의 명제에 대하여 다음과 같이 증명을 구성해보자.

가정 : 2를 분모가 3인 분수로 고친다.

결론 : $\frac{2\times3}{3}$이다.

증명 : $2=\frac{2\times x}{3}$이라고 하자.

등식의 양변에 3을 곱하면 $6 = 2\times x$
따라서, $x=3$이다.
그러므로, 2를 분모가 3인 분수로 고치면 $\frac{2\times3}{3}$이다.

증명이 가정에서 출발하여 타당한 추론에 의하여 결론으로 유도되는 연쇄적인 고리임을 감안한다면, 그리고 등식의 성질을 이용할 수 있는 것으로 가정한다면, 위의 설명은 하나의 수학적 증명이 될 수 있을 것이다. 하지만, 우리가 흔히 'p이면 q이다' 라는 명제의 진위를 판별하기 위해 이용하는 '가정 p의 진리집합이 결론 q의 진리집합에 포함된다' 는 기준은 위의 (가) 문장에 적용되기는 어려울 것이다. 사실, 이 기준을 적절히 적용할 수 있는 명제는 (나)의 명제로서, '두 변의 길이가 같은 삼각형의 집합은 두 각의 크기가 같은 삼각형의 집합에 포함된다' 는 정도의 해석이 가능할 것이다. 그렇다면 함의란 무엇인가? 'p이면 q이다' 라는 형식의 문장은 모두 함의인가? 함의와 가정 · 결론의 진리집합의 포함관계는 어떠한 관계가 있는 것인가? 함의란 조건문과 조건명제와는 같은 것인가? 만약 다르다면 어떻게 구분되는 것인가? 처음에 제시하였던 두 문장은 서로 다른 범주로 구분되는 것인가?

본 연구에서는 우선 위와 같은 함의의 의미의 문제를 다루고자 한다. 함의가 조건문이나 조건명제와는 어떠한 관련이 있는지를 분명히 함으로써 함의가 의미하는 것이 정확히 무엇인지를 살펴보고자 한다. 여기에 이어서 초등학교에서 함의의 지도 가능성의 문제를 다루어 보고자 한다. 이를 위하여 우선 Inhelder & Piaget(1958)가 제시하고 있는 아동기 논리적 사고의 발달에 관한 연구 결과를 살펴보고 이를 바탕으로 초등학교에서 함의의 지도 가능성의 문제를 논의하면서 보다 점진적으로 함의 관계를 파악할 수 있게 하는 방법을 탐색해 보고자 하는 것이다.

Ⅱ. 함의의 의미

함의의 의미를 살펴보기 위하여 우선 혼동할 수도 있는 몇 가지 용어의 의미를 분명히 살펴볼 필요가 있다고 생각된다. 우선, 명제(proposition)란 참이나 거짓을 판단할 수 있는 문장을 말하며, 대개의 경우 영어 대문자 P, Q, R 등을 이용하여 표기한다. 여기서 명제가 참인지 거짓인지의 여부는 그 명제가 진술되는 상황에 의존한다. 명제변수(propositional variable)는 어떤 명제로 대체될 수 있는 것을 말하며, 대개의 경우 영어 소문자 p, q, r로 표기한다. 조건명제(conditional proposition)란 $P \rightarrow Q$ 형식의 명제를 말하며, P가 참이고 Q가 거짓일 때에만 조건명제는 거짓이며 그 외의 경우에는 모두 참이 된다. 조건문(conditional expression)이란 명제변수로 연결된 $p \rightarrow q$를 말하는데, 여기서 p는 전제

1) 함의에 대하여 Garnier & Taylor(1996)가 '참인 조건명제' 라고 명시적으로 말하고 있는 것은 아니다. 그러나, P가 Q를 함의할 때 P를 충분조건, Q를 필요조건이라고 부른다고 말하고 있으며, 이는 함의가 사실상 참인 조건명제를 말하는 것으로 볼 수 있는 근거가 된다.

(antecedent)이며 q는 결과(consequent)이다. 함의(implication)란 참인 조건명제 $P \rightarrow Q$를 말하는 것으로 이 경우에 'P는 Q를 함의한다(imply)' 고 말한다.[1] 또한, 명제 변수를 이용하여 $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge p)$와 같은 식으로 나타내는 것을 명제형식(propositional form)이라고 하며, 명제 형식을 구성하는 명제 변수에 특별한 명제를 대입하였을 때 이를 대입 예(substitution instance)라고 한다. 한편, 한 쌍의 명제형식 P_1과 P_2에 대하여, P_1이 참일 때 마다 P_2가 참일 때 P_1은 P_2를 논리적으로 함의한다(logically imply)고 하며, $P_1 \vdash P_2$와 같이 나타낸다. 한편, 논증(argument)은 전제(premise)가 되는 몇 개의 명제와 결론(conclusion)이 되는 명제로 구성되며, 논증형식(argument form)은 명제변수나 명제형식으로 표현되는 전제와 결론을 갖는다. 명제변수에 명제를 대입하여 전제와 결론이 명제가 된다면 이러한 구조를 논증이라고 부르며, 대응하는 논증 형식의 대입 예라고 말하게 된다(Garnier & Taylor, 1996). 그래서 함의란 두 개의 명제 P와 Q에 대하여 참인 조건명제 $P \rightarrow Q$를 뜻하는 것으로 볼 수 있다. 또한, 조건문이란 명제 변수를 이용하여 $p \rightarrow q$로 나타낸 것으로서, 조건문의 명제변수에 구체적인 명제가 대입될 때 조건문은 조건명제가 되며 이것이 참일 때 함의가 됨을 알 수 있다.

그러면 서론에서 제시되었던 네 개의 문장을 다시 한번 살펴보자. 우선 첫번째 문장인 '2를 분모가 3인 분수로 고치면 $\frac{2\times3}{3}$이다' 에서 P를 '2를 분모가 3인 분수로 고친다' 로, Q를 '$\frac{2\times3}{3}$이다' 로 보기로 하자. 그렇다면 P와 Q는 명제가 될 수 있는가? P는 명제임이 분명하다. 2를 분모가 3인 분수로 고친다면 참이고 고치지 않는다면 거짓이므로 상황에 따라서 참, 거짓을 결정할 수 있다. 따라서, Q도 명제로 볼 수 있으며 이는 참이다. 또한, (나)의 문장도 분명히 함의이다. 그러나 (가)의 문장과 (나)의 문장은 학생들에게 서로 다른 구조를 갖고 있는 것으로 보일 가능성이 있다.

Ⅲ. 아동의 논리적 사고의 발달에 관한 Piaget의 연구

Piaget는 그의 심리학과 수학인식론에서 수학적 지식 및 사고의 본질을 '조작'(operation)이라고 보고, 그 발생과정을 분석하여 제시하고 있다. 이는 수학적 개념을 발생된 것으로 파악하고 그 발생과정을 학습과정에서 재 성취하게 함으로써 이해와 적용이란 수학교육의 근본문제를 해결하고자 하는 발생적 방법에 새로운 빛을 던져 준 이론으로 수많은 적용 연구를 불러 일으켜 왔다(김응태, 박한식, 우정호, 1984, pp. 120-121). Piaget

는 추론의 발달과 관련하여 아동의 발달 단계를 삼단계로 나누고 있는 바, 7-8세 이전에 해당하는 감각운동기와 전조작기가 단계 I이 되며, 7-8세에서 11-12세의 구체적 조작기가 단계 II이고, 11-12세 이후의 형식적 조작기는 다시 두 하위 단계로 나뉘어진다. 하위 단계 III-A는 11-12세에서 14-15세까지이며, 하위 단계 III-B는 14-15세 이후를 나타낸다. Piaget는 하위 단계 III-B에 이르렀을 때를 청소년기의 사고라 하여 형식적 사고가 완성된다고 말하고 있다.

(1) 아동기의 논리적 사고의 발달

Piaget(1928)에 따르면 전조작기 아동들의 사고는 자기중심성, 의식적인 자각의 어려움과 사고의 영역으로의 행동의 내면화, 관계적 논리를 다루지 못한다는 점과 주의 영역의 협소함, 종합 능력의 부재와 병렬성, 혼합성(syncretism), 전환(transduction) 및 모순에 대한 무감각, 지적 실제성(intellectual realism)과 형식적 추론의 불가능성, 전인과성(precausality) 등 여덟 가지 특징을 지니며, 함의를 비롯한 성인과 같은 형태의 논리적 사고는 가능하지 않다.

구체적 조작기에 접어들면서 아동의 사고에는 가역성이 나타나게 되는데, Piaget에 따르면 가역성은 어떤 조작의 출발점으로 돌아갈 수 있는 가능성으로써 두 가지로 구분되는 상보적인 형식 중 하나로 나타난다. 첫번째 형식은 전도(inversion)나 부정(negation)에 의한 것으로 이미 수행된 조작을 취소하는 것이며, 이 경우 조작과 그 역조작의 곱은 영 조작 곧, 항등 조작이다. 두번째 형식은 상반(reciprocity)에 의한 것으로 차이를 보정해 주는 것이며 이 경우 조작과 상반 조작의 곱은 영 조작이 아니라 동치가 된다.[2] 이러한 가역성의 출현으로 아동의 지적활동은 유연성과 가동성을 갖게 되면서 여러 가지 기본적인 조작이 형성된다. 감각 운동기 및 전조작기의 사고는 대상의 특정한 상태나 주체의 특유한 관점에 중심화되어 있는 반면, 구체적 조작기의 사고는 여러 가지 다른 관점이 조정되어 전체성을 갖는 체계 곧 조작체계로 조직된다. 바로 이러한 구체적 조작체계가 군성체이다(김응태 · 박한식 · 우정호, 1984, p.134).

그러나 군성체는 인접조작밖에 합성되지 않는다는 점이 중요한 특성이다. 그래서 우선 유목에 관한 군성체에서 두 개의 이어지는 유목을 더하여 하나의 유목을 형성하거나

2) 예를 들어, 저울을 다룰 때 한 면에 무게를 가해 평형이 깨어진다면 가한 무게를 제거함으로써 다시 평형을 회복시킬 수 있으며(전도나 부정에 의한 가역성) 반대편에 무게를 놓아 평형을 회복시킬 수도 있다(상반에 의한 가역성)(김응태, 박한식, 우정호, 1984, pp. 140-141)

($A+A'=B$) 가법에 의해 형성된 전체에서 한 유목을 빼는 것($A=B-A'$)을 할 수 있다. 또한 두 유목을 서로 곱하거나($A_1 \times A_2 = A_1A_2$), 이런 식으로 형성된 전체에서 하나를 뺄 수 있다($A_1 A_2 : A_2 = A_1$). 그러나 상반조작은 이 체계에서는 나타나지 않는다(Inhelder & Piaget, 1958, p. 274). 관계에 관한 구체적 군성체를 특징짓는 가역성은 상반으로 구성된다. 예를 들어 $A=B$와 같은 대칭 관계는 그 상반인 $B=A$와 동일하다. 비대칭적인 관계에 대하여 만약 $A<B$가 참이라면 그 상반인 $B<A$는 거짓이다. 그러나 이러한 체계에서 전도나 부정에 의한 가역성을 다룰 수는 없는데, 부정은 관계가 아닌 유목과 관련되기 때문이다(Inhelder & Piaget, 1958, p. 274). 결과적으로 가역성의 기제는 유목에 대한 전도나 관계에 대한 상반 중 어느 하나로 구성되지만 이러한 두 가지 가역성이 하나의 단일한 체계로 통합되지는 않는다.

Piaget는 형식적 조작기의 여러 가지 인지적 특징 중에서 조합적 체계의 구성을 구체적 조작기와 구분되는 특징으로 보고 있다. 어떤 문제가 서로 간섭할 수도 있는 몇 가지 독립적으로 구조화된 요소를 포함하고 있다면 형식적 조작기의 아동은 일관성이 없거나 모순된 결과에 직면하게 되며, 실제를 더욱 정확하게 분석할수록 그는 확실히 설명할 수 없는 부분적인 규칙성과 예외를 포함하고 있다는 것을 알게 된다. 처음에 아동은 이러한 부분적인 규칙성과 예외를 무시하지만, 신중히 실험의 요구를 받아들이게 되면 스스로 구체적 용어로 되어 있는 그대로의 자료를 기술하려는 시도가 막히게 됨을 발견하게 되면서 새로운 태도가 나타난다. 이러한 새로운 태도 중에서 중요한 것은 여러 가지 요소가 복잡하게 혼합되어 있는 상황에서 한 가지 변인의 역할을 탐구하기 위해 다른 변인을 분리하는 것이다.

이와 같이 형식적 조작기에 이르면서 새로운 태도가 생겨나는 근원을 Piaget는 구체적 방법에 의해서 얻을 수 있는 해결 방법의 복잡성이 증가하는 데서 비롯되는 방향 전환에서 찾고 있다. 구체적 조작기의 아동들은 어려움을 만났을 때 단순히 의미 있는 어떤 것이 자료에서 저절로 나타나기를 희망하면서 관계를 발견하려고 시도한다. 그러나 만약 너무 복잡한 연결 고리가 구성된다면 언젠가 분석하지 않고서 남겨둔 변인이 나중에 방해 요소로서 재등장할 것이기 때문에 그들은 자신의 사고 단계를 재추적해야 한다. 아동은 변인간에 존재하는 가능한 모든 결합을 찾아볼 수도 있지만 이는 구체적 조작 수준의 단순 승법적 조작을 능가하는 것이 아니며, 이러한 기본적인 결합이 구조화되어 가능한 전체 조합에서 결정적인 조합을 선택하여 조합적 체계가 출현하는 것은 이 시점이 된다(Inhelder & Piaget, 1958, pp.283-288).

여기서 Piaget는 이렇게 구성된 조합체계가 어떻게 구조화되어 형식적 사고를 유발하는가 하는 문제를 제기하면서, 구체적 조작이 조정되는 방식을 분석함으로써 이에 대한 답을

하고 있다(Inhelder & Piaget, 1958, pp.288-293). 실험 상황에서 주어진 문제를 해결하는데 적절한 요소가 분류되고, 계열화되고, 대응이 설정된 후에도 문제를 해결하기 위해서는 이 때까지 수행된 조작을 하나의 단일한 체계로 통합할 필요가 있다. 아동들이 충분히 내면적인 일관성을 갖고 있지 못할 때 구체적 조작의 결과를 조정할 필요로부터 통합의 필요성이 생겨나서 보다 일반적인 승법적 군성체를 구성한다. 예를 들면, 두 가지 사건이나 두 가지 성질 x와 y에 대한 기본적인 연합 $x \cdot y + x \cdot \overline{y} + x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$를 구조화하는 것이다. 그러나 아동이 변인을 분리하고 그 연합 중 어떤 것이 참인지를 결정해야 하는 순간 새로운 문제가 생겨난다. 여기서 아동은 승법적 체계 $x \cdot y + x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$가 기저로 작용하는 새로운 분류 절차에 의하여 '구조화된 전체'를[3] 조직하며, 모든 군성체를 조정하는 일종의 2차 군성체가 구성된다. 일반화된 분류를 승법적 결합에 적용함으로써 형성된 2차 군성체는 조합체계이다. 이러한 형식적 조작의 발달 결과를 좀 더 상세히 살펴보면 다음과 같다.

첫째로, 연합 $x \cdot y$ 등의 분류는 새로운 양식의 합성으로 발달한다. 즉 구체적 조작기의 유목의 포함관계는 인접 조작 $A+A'=B$, $B+B'=C$와 같은 것에 국한되었으나 두 가지의 가능한 준거에 따라 구성되는 다른 분류 $A_1+A'_1=A_2+A'_2$가 가능해진다.[4] 이러한 분류가 일반화되어 $n \times n$ 조합이 구성된다. 둘째로, 구체적 군성체에서 주어진 결합의 부정은 보다 상위 분류에 포함되는 상보적인 분류인 반면, 이러한 일반화된 분류에서 어떤 결합의 부정은 전체에 대한 여집합이다. 그래서 참새의 여집합은 구체적 수준에서는 참새가 아닌 조류이지만, 형식적 수준에서는 참새를 제외한 모든 실제가 된다. 셋째로, 이런 식으로 구성되는 체계는 전도(부정)와 상반($x \supset y$와 $y \supset x$, 등등)을 포함하며, 4원군으로[5] 통합된다. 아동이 이러한 추상적인 형식의 군을 자각하지는 않지만 그의 사고에 많은 영향을 준다. 넷째로, 이제 아동은 실제적인 대상의 분류나 관계 등을 다루는 대신에 가상의 조합적 합성을 다룰 수 있게 되며, 추리는 실제를 직접적으로 다루는 것이 아니라 가능성의 세계를 다룬다. 다섯째로, 조합적 합성에 의해 명제를 다룬다. 구체적 조작의 수준에서도 명제는 다루어지지만 실제 대상에 대응하는 분류와 관계의 구조를 구성하는 그 내용 때문에 구체

3) 영어로는 structured whole이며 불어로는 structures d'ensemble이다. 조작 체계를 정의하는 구조적 속성은 통합된 전체를 형성해야 하는데, Piaget는 이러한 종류의 전체성을 말할 때 structures d'ensemble이라고 한다. 즉, 어떤 강력한 전체적 체계 내에서 부분을 형성했던 구조적인 성질이 균형 상태에 도달하면 그 특징상 고도의 독립성을 보여 준다(Flavell, 1963, p.20).

4) 이러한 더욱 일반화된 분류를 Piaget는 분단(vicariance)이라고 부른다. 예를 들면, '서울 시민 + 서울에 살지 않는 한국인 = 부산시민 + 부산에 살지 않는 한국인'과 같은 것이다.

적인 것과 연결되는 반면, 명제가 단지 가능성을 진술하고 그 합성이 그러한 가능성을 묶거나 분리하는 것으로 구성되면서 명제의 합성은 더 이상 대상을 다루는 것이 아니라 그 결합의 진리값을 다루게 된다. 그 결과 분류나 관계의 논리로부터 명제논리로의 이행이 가능해진다. 구체적 군성체를 (이차적인) 단일한 조작 체계로 조정하는 순간 대상이 아닌 가능성의 조합을 다루게 된다는 점에서 사고는 형식적이 된다. 형식적 조작기의 초기에 속과 군으로부터 유도되는 전도와 상반의 구조적 통합에 의해 특징 지워지는 새로운 형식의 균형을 지향하는 경향성을 볼 수 있으며, 균형은 하위 단계 III-B에서 획득된다.

이렇게 구성되는 16 가지의 이항 조작의 조합체계는 다음과 같다(Inhelder & Piaget, 1958, pp. 293-303).[6)]

- 완전한 단언($p \cdot q \vee p \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q \vee \overline{p} \cdot \overline{q}$)과 그 부정(o)
- 연접($p \cdot q$)과 양립불가능성($p \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q \vee \overline{p} \cdot \overline{q}$)
- 선언($p \cdot q \vee p \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q$)과 연접적 부정($\overline{p} \cdot \overline{q}$)
- 함의($p \cdot q \vee \overline{p} \cdot q \vee \overline{p} \cdot \overline{q}$)와 비함의($p \cdot \overline{q}$)
- 상반적 함의($p \cdot q \vee p \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot \overline{q}$)와 그 부정($\overline{p} \cdot q$)
- 동치($p \cdot q \vee \overline{p} \cdot \overline{q}$)와 상반적 배제($p \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q$)
- p의 단언($p \cdot q \vee p \cdot \overline{q}$)과 그 부정($\overline{p} \cdot q \vee \overline{p} \cdot \overline{q}$)
- q의 단언($p \cdot q \vee \overline{p} \cdot q$)과 그 부정($p \cdot \overline{q} \vee \overline{p} \cdot q$)

이러한 16개의 이항 명제 조작이 하나의 체계를 이룬다는 것을 자각하는 시점으로

---

5) p를 어느 한 편에 무게를 가하는 행동이고 q를 다른 한 편에서 똑같은 무게를 빼는 행동, p^*, q^*를 각각 행동의 '취소'로 정의하면 평형 문제에서의 아동의 사고 구조는 다음 4 가지 '변형'을 골격으로 하여 이루어진다.

a. $I(p)=p$, $I(q)=q$

b. $N(p)=p^*$, $N(q)=q^*$, $N(p^*)=p$, $N(q^*)=q$

c. $R(p)=q$, $R(q)=p$, $R(p^*)=q^*$, $R(q^*)=p^*$

d. $C=NR$ 즉 $C(p)=NR(p)=N(q)=q^*$, $C(q)=p^*$, $C(p^*)=q$, $C(q^*)=p$

이러한 4 가지 변형 체계는 수학적으로 Klein의 4 원군을 이룬다(김응태, 박한식, 우정호, 1984, *p*. 141).

6) 아래에서 Inhelder & Piaget(1958)가 이용하고 있는 기호의 의미를 살펴보면, $p \cdot q$는 'p이고 q이다'를, $p \vee q$는 'p이거나 q이다'를, $\overline{p}$는 'p의 부정'을 나타낸다.

Piaget는 단계 III-B를 들고 있으며, 단계 III-A까지도 점진적인 조직화가 이루어진다고 주장한다(Piaget, 1958, pp.303-304). 그러나, 16개의 이항 조작은 그 자체로 추론을 구성하지는 않으며, 복합적인 판단을 기술하는 것이다.

(2) 함의에 대한 아동기 사고의 발달

함의는 두 명제 p와 q가 있어서 $(p \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot \overline{q})$일 때 채택하게 되는데, 이는 결국 명제 p로 표현되는 어떤 원인이 q로 표현되는 어떤 결과를 산출하지만 그것이 유일한 원인이 아닐 때 채택하는 것이다. 예를 들어, 궤도를 따라 장난감 자동차를 내려오게 하는 실험에서 자동차의 하강 속도를 s, 궤도의 경사도의 증가를 p, 자동차에 싣는 짐의 증가를 q로 나타낸다면, 아동은 $p \rightarrow s$, $q \rightarrow s$임을 안다. 또한, $p \rightarrow$ s인 경우에 $p \cdot s$임을 알며, 경사도를 증가하지 않고 짐을 증가시킬 때 $\overline{p} \cdot s$라는 것과 아무 것도 작동하지 않을 때 $\overline{p} \cdot \overline{s}$임을 안다.

그러나 Inhelder & Piaget(1958)에 따르면 함의의 경우에 어떤 다른 명제적 조작의 경우에서보다도 더 구체적 수준에서도 발견된다고 착각하기 쉽다고 한다. 유목의 관점에서 함의는 포함 $A<B$(여기서 $B=A+A'$)에 대응한다. 만약 우리가 S를 명제 s(자동차의 하강)에 의해 기술되는 사건의 집합을 포함하는 유목이라 부르고 P를 궤도의 경사도의 증가(명제 p)와 연결된 하강의 유목이라고 하면 포함 $P<$S는 $P+P'$=S를 의미할 것이다. 그래서 함의 $p \rightarrow$ s는 포함 $P<S$에 의해서 표현될 수 있다. 다른 한편으로 관계의 관점에서 위의 함의는 다변인 대응에 대응한다. 어떤 결과 S에 원인 P, Q가 대응하는 것은 $S \leftarrow P, Q$일 때이며 여기서 P는 S에 명백하게 대응하지만 이러한 관계는 상반은 아니다. 즉, 한 원인이 그 결과에만 대응하지만, 같은 결과가 여러 개의 원인에 대응할 수도 있다는 것이다.

그러나 함의와 다대일 대응의 차이는 아동의 추론이 진전함에 따라서 심리학적으로 인식될 수 있다. 단계 II의 아동이 포함이나 대응으로 진행하는 한 그는 있는 그대로의 실험 자료를 분류하고 계열화하는데 국한되는 반면, 함의의 발견은 그것을 함의가 아닌 다른 형태의 결합과 구분하는 것으로 구성된다. 그래서 주어진 상황과 양립할 수 있는 가능한 여러 결합 중에서 어떤 결합이 정확히 발생하는 지를 입증하는 것이다. 그래서 함의는 분명히 유목의 포함 관계와는 구분되는 것이지만 그 사이의 이행이 어떻게 이루어지는지를 발견하려고 노력하는 것은 여전히 가치있는 것이다. 더욱이 단계 III에 있는 아동도 자료를 분류하고 관계지음으로써 시작한다는 것을 기억하는 것이 중요하다. 다시 말해서, 구체적 조작기에서 실행되는 자료의 구조화는 명제구조의 필수적인 선결 조건이라는 것이다.

함의는 적어도 세 가지의 동치인 방식으로 표현될 수 있는데, 그것은 $p \rightarrow \overline{q}$, $p \vee q$,

$p=p \cdot q$ 등이며 이 세 가지 표현은 동일한 결과인 $p \cdot q \vee \overline{p} \cdot q \vee \overline{p} \cdot \overline{q}$로 변형될 수 있다. 예를 들어, p가 어떤 막대가 가늘다는 사실을, q가 그것이 유연하다는 사실을 나타낸다고 할 때, 위의 세 가지 형식에 따라 함의를 나타내는 명제를 쓰면 다음과 같다. '만약 막대가 가늘다면 유연성이 있다.' ($p \rightarrow q$) '막대는 가늘지 않거나 유연하다.' ($p \vee q$). '막대가 가늘다고 말하는 것은 막대가 가늘고 유연하다고 말하는 것과 동치이다.' ($p=p \cdot q$) 또한, $p=p \cdot q$는 $q=p \vee q$와 동치임을 보일 수 있다. 여기서 Inhelder와 Piaget는 함의의 가장 간단한 심리학적인 형식으로서 $p=p \cdot q$를 들고 있다. 왜냐하면, 아동이 '막대가 가늘다면 유연하다' 고 주장할 수 있기 위해서 그 아동은 가느다란 막대는 항상 가늘고 유연함을 의미한다는 것을 확실히 해야 하기 때문이다. 더욱이 $p=p \cdot q$와 $q=p \vee q$는 유목의 포함 관계에 대한 곱 $A \times B=A$와 합 $A+B=B$의 가장 직접적인 번역이며, 포함 $A<B$의 토대가 되기 때문이다.

Ⅳ. Piaget의 이론에 근거한 함의의 지도 가능성

Ⅲ장에서 살펴본 Piaget의 연구결과에 따르면, 아동이 함의를 정확히 인식하는 것은 형식적 조작기에 이르러서이지만, 구체적 조작기에서 알게되는 인접한 유목의 포함 관계가 함의 관계를 이해하기 위한 출발점이 된다는 것을 알 수 있었다. 이러한 Piaget의 연구에 따라서 이번 장에서는 Piaget의 이론에 바탕하여 함의의 지도 계열을 구성해보고자 한다. 이를 위하여 우선 도형의 포함 관계에 대하여 현재 제 6 차 교육과정에서 지도되고 있는 현황을 살펴볼 것이다.

(1) 초 · 중등학교에서 도형의 포함관계의 지도

도형의 포함 관계를 처음으로 지도하게 되는 시기는 초등학교 3 학년이다.

... 두 변의 길이가 같은 삼각형을 이등변삼각형이라고 합니다.
이등변삼각형 중에서 ... 세 변의 길이가 같은 삼각형을 정삼각형이라고 합니다.
(교육부, 1997a, p. 55).

... 네 각이 모두 직각인 사각형을 직사각형이라고 합니다.(중략)
... 네 각이 모두 직각이고, 네 변의 길이가 같은 사각형을 정사각형이라고 합니다.
정사각형을 직사각형이라고 말할 수 있습니까?

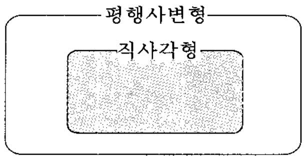
(교육부, 1997a, p. 59).

위에서 보듯이, 초등학교 3학년에서 우선 이등변삼각형과 정삼각형을 지도하면서 정삼각형은 이등변삼각형에 포함되는 것으로 지도하고 있으며, 직사각형과 정사각형을 지도하면서는 둘의 포함 관계를 묻고 있다. 다만, 삼각형 부분에서는 그 정의에서부터 이등변삼각형에 포함된다는 것을 밝히고 있는 반면, 사각형에 대해서는 직사각형과 정사각형의 정의를 제시하고서 포함 관계를 질문 형태로 제시하고 있다는 차이가 있다.

초등학교 3학년에서 다루는 삼각형에 대한 유목의 포함 관계는 '삼각형⊃이등변삼각형⊃정삼각형'이 될 것이며, 사각형에 대한 유목의 포함 관계는 '사각형⊃직사각형⊃정삼각형'이 되므로, 위의 교과서에서와 같은 포함 관계는 적어도 직사각형이나 정사각형 이외의 다른 특별한 종류의 사각형을 학습하지 않는 초등학교 3학년 단계에서는 인접 유목간의 연결로 볼 수 있다. 그리고 이 시기가 구체적 조작기의 중반이라는 점에서 '정사각형+정사각형이 아닌 직사각형=직사각형'과 같은 조작은 충분히 가능할 것으로 생각된다. 그리고 정사각형이 직사각형에 포함된다는 사실은 '정사각형은 직사각형이다'와 같은 형태로 나타나게 된다.

그리고 이러한 도형 간의 포함 관계는 몇 년 동안 잊혀졌다가 형식적 조작기에 접어든 중학교 2학년에서 다음과 같은 형태로 재등장하게 된다.

직사각형의 정의는 '네 각의 크기가 모두 같은 사각형'이다. 이 정의로부터 직사각형은 두 쌍의 대각의 크기가 같게 되어, 결국 평행사변형의 특수한 경우임을 알 수 있다.



따라서, 직사각형은 평행사변형의 성질을 모두 만족한다.

(김연식 · 김흥기 · 1998, p. 241)

위와 같은 방식으로 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 포함 관계가 지도되지만, '직사각형이면 평행사변형이다'와 같은 표현은 보이지 않는다. 그러나 중학교 2학년 평면도형 단원에서는 수십 가지의 'p이면 q이다' 형태의 명제를 증명하게 된다. 예를 들어, '△ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 ∠B=∠C이다'라는 명제를 증명했다고 할 때, 이 명제가 학생들에게는 어떠한 의미를 갖게 될 것인가? 'p이면 q이다' 형태의 문장에서 p를 가정, q를 결론, 가정에서 출발하여 결론을 유도하는 과정을 증명이라고 설명하고서 위의 명제를 증명하였을 때, $\overline{AB}=\overline{AC}$임을 가정하여 ∠B=∠C라는 결론을 얻었다는 것은 학생들의 마음 속에서 무엇을 의미하는가? 한편으로 위와 같은 증명을 지도하는 교사는 그 증명을 통하여

학생들이 무엇을 알기를 의도하고 있는가?

위의 명제를 증명하는 목표는 증명의 연습과 더불어 '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다'는 것을 알게 하는 것이다. 그러나, 위의 명제를 증명한 것이 이러한 성질로 유도되는 과정은 어쩌면 그리 단순하지 않을 것 같다. 즉, '정삼각형은 이등변삼각형이다'라는 표현이 정삼각형이 이등변삼각형에 포함된다는 의미를 갖는다면, '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다'는 표현은 이등변삼각형은 두 밑각의 크기가 같은 삼각형에 포함된다는 의미로 해석될 수 있다고 하더라도, 이등변삼각형이면 두 밑각의 크기는 같다는 것과는 관련 없이 보일 가능성이 있으며, 이렇게 보인다면 이등변삼각형이라는 가정에서 두 밑각의 크기가 같다는 것을 논리적으로 증명하더라도 그 증명이 왜 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같은지를 설명하는 데 도움이 되지 못할 가능성이 있다는 것이다. 이러한 이유로 중학교 2학년의 평면도형 단원에서 증명을 지도하기 전에 초등학교 3학년에서 도형의 포함 관계를 지도한 후에 점진적으로 포함 관계를 'p이면 q이다'라는 함의 관계의 형식문장을 인식시킬 필요성이 있다. 더욱이 서론의 (가)의 문장에서와 같이 'p이면 q이다' 형식의 문장을 자주 이용하면서도 도형의 포함관계에 대해서는 이러한 표현을 이용하지 않는 것은 선뜻 이해하기 어려운 것이기도 하다.

(2) 함의 지도의 계열화

이제 Piaget의 이론에 따라서, '정사각형이면 직사각형이다'라는 함의를 지도하는 계열을 생각해 보자. 정사각형이 바로 위의 유목에 해당하는 직사각형에 포함된다는 것은 받아들일 수 있을 것이므로, 다음 단계에서 할 일은 정사각형인 것은 직사각형과 같다는 것을 인식시키는 것이 될 것이다. 이 단계에서 이러한 관계를 '정사각형이면 직사각형이다'라고 부른다는 것을 언급하는 것도 좋을 것 같다. 구체적 조작기에서 형식적 조작기로 이행하게 되는 초등학교 5-6학년 정도에서 정사각형이면서 직사각형인 예와 정사각형이 아니지만 직사각형인 예와 정사각형도 직사각형도 아닌 예가 있을 수 있다. 그러나 정사각형이지만 직사각형이 아닌 경우는 없음을 인식시키는 것이 다음 단계가 될 것이며, 정확히 이러한 경우를 '정사각형이면 직사각형이다'라고 부른다는 것을 알려줄 필요가 있다.

이러한 함의 관계의 지도는 도형뿐만 아니라 배수 관계에 대해서도 가능할 것이다. 예를 들어 '4의 배수는 2의 배수이다'와 같은 표현으로부터 '4의 배수이면 2의 배수이다'를 유추하여 지도할 수 있을 것이다.

V. 결　　론

본 연구에서는 우선 함의의 의미를 분명히 한 다음 아동기 논리적 사고의 발달에 관한 Inhelder와 Piaget의 이론을 알아 보았다. 그런 다음 도형의 포함 관계를 중심으로 초등학교와 중학교에서 지도되는 사례를 살펴서 초등학교에서 함의의 지도 가능성의 문제를 다루어 보았다. 이분법적으로 말한다면 초등학교에서 함의의 지도는 불가능하다고 말할 수 있을 것이다. 다만, 중학교 2 학년의 평면도형 단원에서 등장하는 수많은 함의 관계의 의미를 파악하고 그럼으로써 증명에 의미를 부여하기 위해서는 초등학교에서부터 포함 관계에서 출발하여 점진적으로 함의 관계를 인식시킬 필요가 있으며, 또한 이러한 과정은 Inhelder와 Piaget제시한 이론에 따라 구성될 수 있을 것으로 생각된다. Inhelder와 Piaget가 제시한 이론이 적절하다고 말하기 위해서는 후속 검증 작업이 필요할 것이지만, 중학교 2 학년에서 증명을 학습하기 전에 학생들에게는 함의 관계에 대한 관념이 전혀 없을 수도 있게끔 현행 교육과정이 구성되어 있다는 점에서 충분히 시도해 볼만한 가치가 있을 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

교육부(1997a). 수학 3-1. 서울: 교육부.

교육부(1997). 수학 6-1. 서울: 교육부.

김연식, 김흥기(1998). 중학교 수학 2. 서울: 두산동아.

김응태, 박한식, 우정호(1984). 증보 수학교육학개론. 서울: 서울대학교출판부.

Flavell, J. H.(1963). *The development of psychology of Jean Piaget*. Toronto: Van Nostrand Reinhold Company.

Garnier, R., & John, T.(1996). 100% *Mathematical Proof*. Chichester: John Wiley & Sons.

Inhelder, B., & Piaget, J.(1958). A. Parsons, & S. Milgram(Trans.), *The growth of logical thinking: From childhood to adolescence*. London: Routledge & Kegan Paul Ltd.

Piaget, J.(1928). M. Warden(Trans.). *Judgment and reasoning in the child*. London: Routledge & Kegan Paul Ltd.

Investigations on the Possibility of Teaching of Implication in the Elementary School

Seo, Dong−Yeop(Korea Institute of Curriculum and Evaluation)

In this study, we tried to make clear the meaning of implication, and inquired into Piaget's theory on the development of children's logical thinking focussing on implication. Because the progressive development of the notion of implication is very important to learn the meaning of conditional proposition, we searched a sequence for the learning implication on basis of Piaget's theory.