

## 공진주파수, 오일러 티모센코 빔 방정식을 이용한 복합재료의 동적탄성계수 측정에 관한 연구

이재혁 · 박세만 · 김형삼  
명지대학교 기계공학과

### Dynamic Elastic Constants of Composite Material using Resonance Frequencies, Euler and Timoshenko Beam Equations

C.H. Yi, S.M. Bahk, and H.S. Kim

Department of Mechanical Engineering, Myongji University, Yongin 449-728

(1999년 2월 18일 받음, 1999년 5월 15일 최종수정본 받음)

**초 록** 탄성계수의 정밀측정은 과학적인 관점과 공학적인 관점 모두 중요하다. 과학적인 관점에서 본다면 탄성계수를 측정함으로써 원자와 원자사이, 이온과 이온 사이의 bonding에 관한 해석 및 이해증진의 중요한 도구가 되며, 공학적인 측면에서 본다면 공학적인 기계설비에 반드시 고려해야 할 설계기준 중의 하나이다. 본 연구에서는 보다 정확한 탄성계수 측정을 위해 두 가지의 동적 진동실험(음향 공진법과 충격가진 방법)을 비교해 보았으며, 이 두 실험적으로 얻은 공진주파수는 Euler 빔 방정식과 Timoshenko 빔 방정식에 각각 적용하여 그 차이를 비교해 보았다.

**Abstract** Accurate measurements of elastic constants are important from the view points of both science and engineering. The measurement can be viewed from scientific principle as a service tools for analyzing and improving the understanding of the nature of bondings between atoms and between ions. Also, from engineering perspective it would become an important factor to be definitely considered for the design of machinery equipments.

In this investigation, two dynamic experimental methods of vibrations (acoustic method and Impulse technique method) are utilized and the results from the both methods are compared to obtain elastic constants data with a high degree of accuracy. The resonance frequencies obtained from the two methods are applied to both Euler and Timoshenko beam equations respectively, to determine the sources for possible differences.

### 1. 서 론

복합재료의 하나인 카본-에폭시 복합재료로 만들어진 가벼운 구조재료는 주로 항공산업과 스포츠 레저 산업에서 많이 사용된다. 현재 새로 나온 보잉 777의 수평 수직 뒷날개에도 사용이 되고 있다. 골프장갑, 활, 낚싯대, 테니스 라켓, 크리켓배트 및 스키등에서 카본-에폭시 복합재료가 사용되어 진다. 공진 주파수의 측정을 통한 탄성계수의 평가에 있어서도 연속적으로 일정한 정현파를 변화하여 가진해 줌으로서 공진점을 찾아내는 방법과 impulse technique과 같이 한번의 가진으로 고차의 모드까지 모든 공진점을 찾아내는 방법이 널리 사용되고 있다. 공진법은 재료의 고유진동수와 동일한 진동을 외부에서 가할 때 일어나는 공진현상을 이용하여 재료의 탄성계수를 측정하는 방법이다. 재료의 탄성계수의 정밀측정은 오래전부터 연구되어 왔으며 초기에는 주로 정적인 탄성계수 측정방법이며 많이 알려진 stress-strain 곡선을 이용한 방법이 주로 연구되어 졌으나 이 방법은 정적인 하중상태의 양이고 재료를 파단해야 하는 점 때문에 지금은 주로 비파괴 방법이며 동적인 하중 상태에 따른 탄성계수의 정확한 측정에 초점이 맞추어져 있다.

동적, 비파괴 방법으로 재료내에서의 초음파의 전파속도나 재료 자체의 공진주파수의 측정으로부터 탄성계수를 측정하는 방법이 현재 널리 사용되고 있으며 또한 연구되어지고 있다. S. Spinner<sup>1,2)</sup>와 W. E. Tefft<sup>2)</sup>는 등방성 재료의 탄성계수를 스피커로 가진하고 전축바늘로 신호를 받아 각각의 공진점을 찾아 계산하였고, J. S. and Poole, J. M.<sup>3)</sup>은 합금물질에 대한 동적탄성계수 측정을 충격기법과 연속적 방법에 의해 행하였으며, R. F. Gibson<sup>4)</sup>은 이러한 공진법을 복합재료에 적용하여 수식을 유도하였으며 실험적 해석과 유한요소 해석, 또한 점탄성 개념을 도입하여 복소탄성계수를 측정하였다. 공진주파수를 구하는 방법에 있어서도 전통적 방법인 Euler-Bernoulli 방정식에 의한 빔의 해석이 초기에 주류를 이룬 반면, 근래에는 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 전단응력과 관성모멘트를 고려한 Timoshenko 빔 해석이 주류를 이룬다. 본 연구에서는 충격기법과 음향 공진법을 사용하여 구한 공진주파수를 Euler 빔과 Timoshenko 빔으로 유도된 각각의 결과에 대입하여 탄성계수를 구함으로써 전단변형과 관성효과의 영향을 고려한 차이를 실험적으로 증명하려 하였다.

## 2. 이 론

### 1. Euler-Bernoulli beam theory<sup>5~8)</sup>

일반적인 빔 방정식인 전통적 방법 그리고 얇은 빔 이론으로 알려진 Euler-Bernoulli 빔 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

상기 방정식에 자유단의 경계조건을 적용하면,

$$\begin{aligned} \therefore \cos \beta L \cosh \beta L &= 1 \\ \beta_1 L &= 4.730041, \beta_2 L = 7.853205, \beta_3 L = 10.995008 \end{aligned}$$

상기 방정식에 한쪽고정, 한쪽 자유단의 경계조건을 적용하면,

$$\therefore \cos \beta L \cosh \beta L = -1 \quad (2)$$

위와 같은 진동 방정식을 유도할 수 있다. 이 방정식의 해는

$$\beta_1 L = 1.875104, \beta_2 L = 4.694091, \beta_3 L = 7.854757$$

탄성계수는 다음 식에서 구할 수 있다.

$$E = \frac{\rho A I^4 (2\pi f)^2}{(\beta_n L)^4 I} \quad (3)$$

### 2. Timoshenko beam theory<sup>6, 7, 9, 10)</sup>

일반적인 빔 방정식인 Euler-Bernoulli 방법에 전단변형과 회전관성 모멘트 효과를 고려한 이론이 Timoshenko 빔 이론 또는 두꺼운 빔 이론이며 빔 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left( \rho I + \frac{EI\rho}{\kappa G} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^2 y}{\partial t^4} &= 0 \\ EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left( \rho I + \frac{EI\rho}{\kappa G} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^4} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

빔이 진동수  $\omega$ 의 조화가진을 받는다고 가정하면

$$\begin{aligned} y &= Y e^{i\omega t} \\ \psi &= \psi e^{i\omega t} \\ \zeta &= \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (5)$$

로 놓을 수 있으며 여기서  $\zeta$ 는 빔의 무차원 길이이다.

식(5)를 식(4)에 넣고 정리하면

$$Y'''' + b^2(r^2 + s^2) Y'' - b^2(1 - b^2 r^2 s^2) Y = 0$$

$$\psi'''' + b^2(r^2 + s^2) \psi'' - b^2(1 - b^2 r^2 s^2) \psi = 0 \quad (6)$$

$[(r^2 - s^2)^2 + 4/b^2]^{1/2} > (r^2 + s^2)$  일 때 식(6)의 일반해는

$$\begin{aligned} Y(\zeta) &= C_1 \cos b a \zeta + C_2 \cos b s \zeta + C_3 \cosh b a \zeta + C_4 \sinh b a \zeta \\ \psi(\zeta) &= C_1' \sin b a \zeta + C_2' \cos b a \zeta + C_3' \sinh b a \zeta \\ &\quad + C_4' \cosh b a \zeta \end{aligned} \quad (7)$$

$[(r^2 - s^2)^2 + 4/b^2]^{1/2} < (r^2 + s^2)$  일 때는

$$\begin{aligned} Y(\zeta) &= C_1 \cos b a \zeta + C_2 \sin b a \zeta + C_3 \cos b \beta' \zeta + C_4 i \sin b \beta' \zeta \\ \psi(\zeta) &= C_1' \sin b a \zeta + C_2' \cos b a \zeta + C_3' i \sin b \beta' \zeta \\ &\quad + C_4' \cos b \beta' \zeta \end{aligned} \quad (8)$$

각각의 경계조건은

· 자유단 :

$$\begin{aligned} \psi &= 0 \\ \frac{1}{L} Y' - \psi &= 0 \end{aligned}$$

· 단순지지 :

$$Y = 0$$

$$\psi = 0$$

· 고정단 :

$$Y = 0$$

$$\psi = 0$$

에서 한쪽고정, 한쪽 자유단의 경계조건을 적용하면

$$\begin{aligned} 2 + [b^2(r^2 - s^2)^2 + 2] \cosh b a \cos b \beta - \frac{b(r^2 + s^2)}{(1 - b^2 r^2 s^2)^{1/2}} \\ \sinh b a \sin b \beta = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)과 같은 진동방정식이 유도되고, 양단 자유의 경계조건을 적용하면

$$\begin{aligned} 2 - 2 \cosh b a \cos b \beta + \frac{b}{(1 - b^2 r^2 s^2)^{1/2}} \\ [b^2(r^2 - s^2)^2 + (3r^2 - s^2)] \sinh b a \sin b \beta = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)과 같은 진동 방정식이 유도된다.

## 3. 실험 방법

### (1) 실험장치

충격가진법 실험은 일반 상온에서 동적신호해석기(Dynamic Signal Analyzer or FFT)와 충격망치(Impulse Hammer)를 이용하는 충격기법(Impulse Technique)을 사용하였다.

Fig. 1은 본 실험에 사용된 실험장치의 개략도이다.

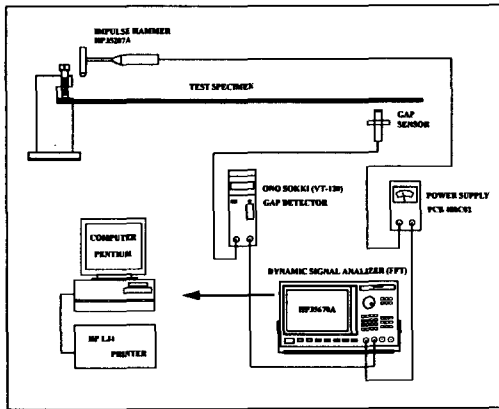


Fig. 1. General Block Diagram of In.strumentation for impulse technique.

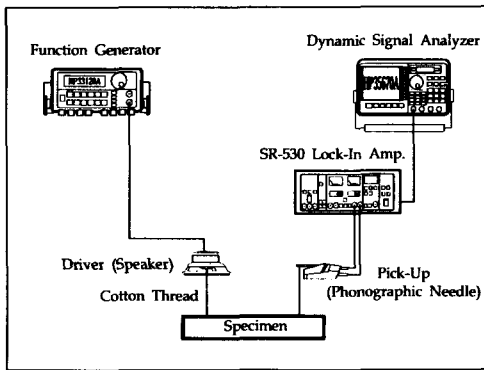


Fig. 2 General Block Diagram of In.strumentation for Acoustic sonic method.

방진테이블에 지그를 고정하고 지그에 시편을 고정시킨 다음 Impulse hammer (Model HP35207A)로 시편을 가진시킨 후 Gap sensor (Model ONO SOKKI VT-120)를 사용하여 신호를 받았다. Impulse hammer는 노이즈가 없는 정확한 신호를 가진시킬 수 있는 곳 또한 모우드 변화를 찾기 위해서 좌우로 이동할 수 있는 이송장치에 고정하였으며 10회 평균값을 얻기 위해 스프링에 고정, 일정한 힘으로 시편을 가진시킴으로써 손으로 가진했을 때의 부정확함을 피할 수 있었다.

Impulse hammer와 Gap sensor에 의한 신호는 Dynamic signal Analyzer (Model HP35670A)를 사용하여 FRF(Frequency Response Function) 분석을 행하였다.

음향 공진법의 측정장치는 재료에 연속적인 진동을 가해주는 가진기 부분(Driver), 재료의 진동을 수신하기 위한 Pick-up부분, 그리고 재료를 지지해 주기 위한 부분으로 나뉜다. 전체장비의 구성은 Fig. 2와 같다.

진동을 가해주는 가진기로는 고음용 스피커(Tweeter Type Speaker)를 사용하였고, 함수발생기(Function Generator)로는 HP33120A Synthesized Function / Sweep Generator를 사용하였는데 15MHz까지 주파수의 분해능은 0.0001Hz이고, 외부출력은 10V의 출력을 얻을 수 있다. 그러므로 출력을 높이기 위한 증폭기는 사용하지

않았다. Pick-up 장치로는 주파수 범위가 20~20000Hz 범위의 전촉바늘(Phonographic needle)을 사용하였고 HP35670A Dynamic Signal Analyzer를 사용하여 신호를 분석하였다. 측정장치에서 가장 중요한 부분은 driver와 pick-up부분이다. driver로는 고음용 스피커, 고출력 압전 변환기(high-power piezoelectric transducer) 등이 이용될 수 있는데 이중 가장 구하기 쉬운 고음용 스피커를 사용하였다.

pick-up에서 얻어진 신호는 매우 미약하기 때문에 이의 효율적인 검출을 위하여 전촉바늘을 여러 가지 종류로 구하여 이중 최대의 효율을 낼 수 있는 세라믹 바늘을 사용하였다. 신호의 소리와 잡음을 높이기 위하여 SR-530 Lock-in amplifier를 사용하였다.

(2) 실험시편

실험에 사용된 시편은 Tetrahedron사의 Hot Press를 사용하여 5F/min heating, 350F, 2hr, 5F/min Cooling, Pressure 85 psi 경화조건으로 Hexcel사의 DMS-2224, Class-1, Type-T, Grade-2인 단일 방향 카본-에폭시 수지 침투 가공재를  $V_f = 0.6$ 으로 각각의 실험에 적합한 두께를 가질 수 있도록 적층하여 제작하였다. 카본 섬유는 Hercules Carbon Fiber Type AS4를 사용하였고 기지재료인 에폭시는 F584 Resin을 사용하였다.

Carbon-epoxy 시편은 각각 0°와 90°의 시편을 사용하였는데 그기준은 시편의 길이방향과 섬유의 방향이 서로 평행인 경우를 0°, 길이방향과 섬유 방향이 서로 수직인 경우를 90°로 놓고 섬유 방향에 따른 강도와 감쇠의 변화도 아울러 관찰하고자 하였다.

4. 결과 및 고찰

이방성 재료인 복합재료의 길이방향과 수직 방향에 해당하는 탄성계수 값을 구하기 위해 카본-에폭시 복합재료를 길이방향과 수직인 방향으로 절단하여 카본-에폭시 복합재료의 길이방향과 수직인 방향의 공진주파수를 측정하고 측정된 공진 주파수를 이론식에 대입하여 탄성계수를 산출하였다.

Fig. 3과 Fig. 4는 각 시편의 주파수 응답함수(FRF)를

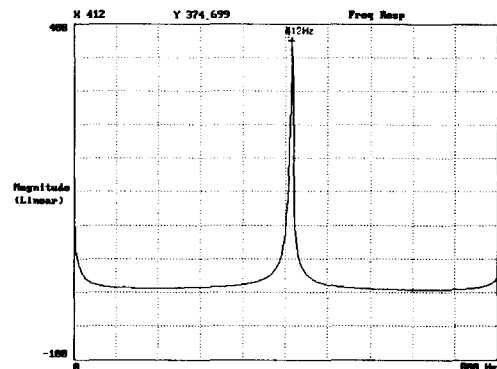


Fig. 3. Linear scale magnitude of Resonance Frequency for Carbon-epoxy(0°).

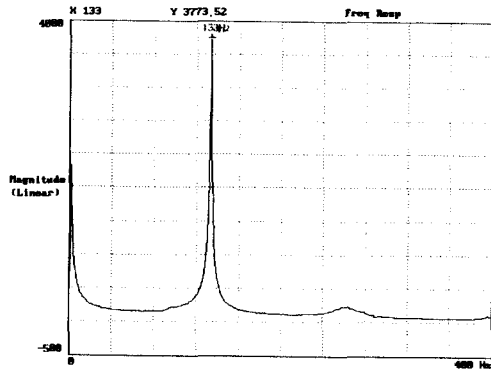


Fig. 4. Linear scale magnitude of Resonance Frequency for Carbon-epoxy(90°).

Table 1. Standard dimensions of Specimens for impulse technique.

사용시편 /구분	길이 (mm)	폭 (mm)	두께 (mm)	전체질량 (g)	밀도 (g/cm <sup>3</sup> )
Carbonepoxy (0°)	111.73	12.01	3.80	10.24	1.58
Carbonepoxy (90°)	111.86	12.07	4.18	11.20	1.56

Table 2. Standard dimensions of Specimens for Acoustic sonic method.

사용시편 /구분	길이 (mm)	폭 (mm)	두께 (mm)	밀도 (g/cm <sup>3</sup> )
Carbonepoxy (0°)	140.92	12	4	1.511
Carbonepoxy (90°)	140.12	12	4	1.659

Table 3. Properties of Typical Unidirectional Composite Materials.

사용시편 /구분	Fiber volume ratio(V <sub>f</sub> )	밀도 (g/cm <sup>3</sup> )	탄성계수 (E <sub>1</sub> , GPa)	탄성계수 (E <sub>2</sub> , GPa)
Carbonepoxy	0.6	1.55	131.0	11.2

선형스케일에서 측정하여 그 결과를 나타낸 것이다. 두 그림에서 peak point는 각각의 시편의 1st mode일 때의 공진 주파수를 의미하며 이 값으로 탄성계수를 계산 할 수 있다.

탄성계수는 공진 주파수만의 실험으로 구할 수 없으며, 실험적으로 얻은 공진 주파수를 식 (3)의 Euler 방정식과 식 (9), (10)에 의한 Timoshenko 방정식에 대입함으로써 그 값을 계산할 수 있다.

Table 1과 Table 2는 충격가진법과 음향공진법에 사용된 실험시편의 기본 dimension과 이를 통해 계산된 밀도값을 나타내며 Table 3은 각 실험값 및 계산값을 비교하기 위해 properties data sheet<sup>11)</sup>를 인용하여 사용하였다.

Table 4. Experimental and Theoretical values of tests from impulse technique.

구분	이론값		실험값	
	공진주파수 (Hz)	탄성계수 (GPa)	공진주파수 (Hz)	탄성계수 (GPa)
Carbonepoxy (0°)	447	131.0	412	111.0
Carbonepoxy (90°)	144	11.2	133	9.5

Table 5. Experimental and Theoretical values of tests from Acoustic sonic Method.

구분	이론값		실험값	
	공진주파수 (Hz)	탄성계수 (GPa)	공진주파수 (Hz)	탄성계수 (GPa)
Carbonepoxy (0°)	1927	131.0	1856	122
Carbonepoxy (90°)	544	11.2	564	14.5

Table 6. Comparison between Euler beam eq. and Timoshenko beam eq.

실험방법	시편	공진주파수 (Hz) (1mode)	Timo-shenko 탄성계수 (GPa)	Euler 탄성계수 (GPa)
충격 가진법	Carbonepoxy (0°)	412	111.0	108.8
	Carbonepoxy (90°)	133	9.5	9.48
음향 공진법	Carbonepoxy (0°)	1856	122	121.4
	Carbonepoxy (90°)	564	14.5	12.02

Table 1, 2와 Table 3의 properties data sheet를 비교해 볼 때 밀도의 차가 충격 가진법의 시편의 경우 0.01~0.03 g/cm<sup>3</sup>의 차이를 보였으며 음향 공진법의 경우 90° 시편에서 0.1g/cm<sup>3</sup>의 조금 큰 밀도차를 보이고 있다. 보다 정확한 실험을 위해서 서로 같은 밀도를 가진 시편을 사용하여야 한다고 사료되어지지만 본 실험에서 사용된 실험 시편을 제조상의 fiber의 밀도차로 탄성계수의 정확한 측정에 오차가 발생하였으리라 사료된다.

Table 1과 Table 2에서 시편의 길이가 다른 것은 충격 가진법을 사용했을 때 시편이 지그안으로 들어간 길이 30mm를 뺀 값 때문이다.

Table 4, 5는 각 실험방법에 대해 길이방향으로 절단한 시편(0°)의 공진주파수와 탄성계수의 값과 길이방향과 수직인 방향으로 절단한 시편(90°)의 공진주파수와 탄성계수 값을 나타내었다.

Table 4, 5에 나타난 탄성계수 실험값을 티모센코 방정식에 의해 구해진 탄성계수이다. 이론값과 실험값은 정확히

일치하지 않았으며, 그 차이는 식(3)과 식(9), (10)을 보았을 때 시편의 치수를 측정하는데서 발생한 오차와 이를 통해 측정된 밀도 그리고 실험식에서 발생한 주파수 측정시 발생하는 오차에 의해 발생한 것으로 사료된다.

Table 4, 5의 실험적 값들은 방법의 차이에 따라 1.5~9 GPa의 조금 큰 차이를 보였다. 본 연구에 사용된 시편은 두께/길이가  $0.028 \sim 0.037 > 0.025$ 이므로 Timoshenko 빔일 때 보다 이론값과 근접해 있음을 두 방법 모두에서 증명할 수 있었다. 그러나 1mode에서만 실험값이었으므로 그렇게 큰 차이를 볼 수 없었다.

일반적으로 길이방향을 절단한 시편의 공진주파수를 측정하여 이방성 재료인 카본-에폭시 복합재료의  $E_1$  값을 구할 수가 있고 길이방향과 수직인 방향으로 절단한 시편의 공진주파수를 측정하여  $E_2$ 에 해당하는 값을 산출할 수가 있다.

Table 6은 각 시편 측정 공진 주파수에 오일러 빔 방정식과 티모센코 빔 방정식을 각각 적용하여 구한 탄성계수 값을 나타내었다.

## 5. 결 론

본 실험을 통해 두 가지 실험 방법을 사용하여 Timoshenko 방정식과 Euler 방정식을 이용 탄성계수를 측정할 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

1) 두 실험 방법(충격 가진법과 음향 공진법)은 모두 동적 탄성계수를 측정하는 좋은 방법이었다. 그러나, 충격 가진법인 경우 음향 공진법에 비해 보다 신속하게 그 탄성계수를 측정할 수 있었으며 그 값은 음향 공진법이 보다 이론값과 일치함을 알 수 있었다.

2) 두 방정식에 의해 구한 값의 차이는 두께/길이  $> 0.025$  경우인 본 연구에선 Timoshenko 빔 방정식이 Euler 방정식 보다 정확한 차이를 보기 위해선 고차 모드의 연구가 이루어져야 하리라 사료된다.

## 참고 문헌

1. S. Spinner and R. C. Valore, Jr. J. Res. Nat. Bur. Stand. 60(5), 459-464 (1958).
2. S. Spinner, T. W. Reichard, and W. E. Tefft, J. Res. Nat. Bur. Stand. A. Phys. Chem. 644(2), 147-155 (1960).
3. J.S. Smith and J.M. Poole. J. Sound. Vib 11, 608-614 (1985).
4. Ronald F. Gibson, Principles of Composite Material Mechanics, (McGraw-Hill, New-York, 1994).
5. Daniel. J. Gorman, Free Vibrations Analysis of Beams & Shaft (John-wiley, 1975).
6. D.Hardie and R.N. Parkins., British J.Appl. Phys. 1, 77-85 (1968).
7. D.P.N. Hasselman, Tables for the Compilation of the Shear Modulus and Young's Modulus of Elasticity from the resonant Frequencies of Rectangular Prisms. (New York: The Carborundum Company, Niagara Falls, 1961).
8. E. Schreiber, O. L. Anderson, and N. Sega, Elastic Constants and Their Measurement, (McGraw-Hill, New-York, 1974).
9. G. Herrmann, J.Appl. Mech. 22, 53-56 (1955).
10. Carl L. HERAKOVICH "Mechanics of fibrous composites." (John-wiley, 1998).
11. Edward Schreiber, Orson L. Anderson, and Naohiro Soga, Elastic Constants and Their Measurement, (McGraw-Hill, 1973).
12. J. S. Smith. and J. M. Pool, J. Acoust. Soc, Vol. 42, No. 6, 1023 (1982).
13. A. S. Kobayashi, Handbook on Experimental Mechanics. SEM. (1993).