

## 유리 Bézier 곡선의 미분계산방법의 평가

김덕수\*, 장태범\*\*

### Evaluations of Representations for the Derivative of Rational Bézier Curve

Deok-Soo Kim\* and Taeboom Jang\*\*

#### ABSTRACT

The problem of the computation of derivatives arises in various applications of rational Bézier curves. These applications sometimes require the computation of derivatives on numerous points. Therefore, many researches have dealt with the representation for the computation of derivatives with the small computation error. This paper compares the performances of the representations for the derivative of rational Bézier curves in the performances. The performance is measured as computation requirements at the pre-processing stage and at the computation stage based on the theoretical derivation of computational bound as well as the experimental verification. Based on this measurement, this paper discusses which representation is preferable in different situations.

**Key words** : Evaluation, Derivative, Rational Bézier curve, Hodograph, Experiment

#### 1. 서 론

유리 Bézier 곡선은 Bézier 곡선의 일반형으로서 2차 곡선을 포함한 다양한 곡선을 정확히 나타낼 수 있으며, CAD/CAM 분야에서 곡선이나 곡면을 표현하는 데 일반적으로 사용되고 있는 NURBS의 기초가 된다. 또한, 유리 Bézier 곡선에 적용되는 여러 기하학적 특성이나 알고리즘 등이 NURBS 형식에서도 용이하게 적용시킬 수 있기 때문에 여러 이론적인 연구들이 유리 Bézier 곡선을 다루고 있다.

유리 Bézier 곡선의 미분값은 곡선의 특징을 찾거나<sup>1)</sup>, 접선 혹은 법선 뿔을 계산하거나<sup>2)</sup>, 블렌딩이나 오프셋팅 계산 등 유리 Bézier 곡선을 활용하는데 여러 가지로 유용하게 사용될 수 있다. 특히, 이러한 활용 중 몇몇은 미분값을 여러 점에서 계산을 해야 한다. 따라서, 유리 Bézier 곡선의 미분값을 효율적으로 계산하는 방법에 대한 연구가 중요하다.

이러한 필요성으로 인해, 유리 Bézier 곡선의 미분식을 표현하기 위한 적지 않은 노력들이 있었다. Seiderberg와 Wang<sup>3)</sup>은  $n$ 차의 유리 Bézier 곡선의 미분

의 분자식을 스케일드 호도그래프라 하고, 이를  $2n-2$ 차의 비유리 Bézier 곡선으로 표현하였다. 이 연구를 바탕으로, Saito 등은 homogeneous 좌표계에서 유리 Bézier 곡선과 곡면의 미분식을 유도하였다<sup>4)</sup>. Floater는 유리 Bézier 곡선의 미분식을 주어진 조정 점들과 가중치들로 표현하였다<sup>5)</sup>. 또한, Piegl과 Tiller는 NURBS의 미분식을 NURBS간의 연산을 정의하여 구하였다<sup>6)</sup>. 다른 한편으로, 유리 Bézier 곡선의 미분식을 closed form으로 나타내었다<sup>7)</sup>. 그러나, 유리 Bézier 곡선의 미분식에 대한 여러 표현식들이 구체적으로 다양한 상황 하에서 평가되지 않고 있다.

본 논문에서는 유리 Bézier 곡선에 대한 여러 표현법들을 비교, 평가하고자 한다. 이를 위해 유리 Bézier 곡선의 미분값을 계산 시 필요한 계산량을 계산 단계와 준비 단계로 나누어 알아 보았다. 이러한 방법으로, 다양한 상황에서 어떠한 표현법이 유용한지를 밝히고자 한다.

#### 2. 관련 연구

$R(t)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있는  $n$ 차의 유리 Bézier 곡선이라고 하자.

\*정회원, 한양대학교 산업공학과

\*\*학생회원, 한양대학교 시스템 응용공학부 산업공학과

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i R_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} = \frac{N(t)}{D(t)} \quad (1)$$

여기에서  $B_i^n(t)$ ,  $R_i$ 와  $w_i$ 는 각각  $n$ 차의 Bernstein 다항식, 조정점 그리고 조정점에 대한 가중치다. 식 (1)을 미분하면, 식 (2)를 얻을 수 있다.

$$R'(t) = \frac{N'(t)D(t) - N(t)D'(t)}{\{D(t)\}^2} \quad (2)$$

여기에서  $R'(t)$ 는  $2n$ 차의 유리 다항식 곡선임을 알 수 있다. 이와 같이 표현될 수 있는 유리 Bézier 곡선의 미분값을 계산하기 위한 여러 연구들이 있었다.

**2.1 직접 미분법(DD; Direct differentiation)**

이 표현법은  $R(t)$ 를 직접 미분한 결과의 분자항과 분모항을 power 기저로 나타내어 미분값을 구하는 방법이다. 계산 전 단계에서  $R'(t)$ 의 분자항과 분모항을 power 기저로 변환하는 과정에서 비교적 많은 다항식간의 연산이 필요하고, 미분식을 power 기저로 표현함으로써 심각한 수치적 오류가 발생할 수 있다.

**2.2 스케일드 호도그래프(SH; Scaled hodograph)**

Sederberg는 식 (2)에서  $R'(t)$ 의 분자항인  $\{D(t)\}^2 R'(t)$ 을  $2n-2$ 차의 비유리 Bézier 곡선으로 표현하였으며 이를 스케일드 호도그래프라 하였다<sup>13)</sup>. 스케일드 호도그래프를 이용하여 유리 Bézier 곡선의 미분값의 방향은 알 수 있지만, 미분값의 정확한 크기는 구할 수 없다. 따라서, 스케일드 호도그래프는 미분식의 방향이 필요한 활용에 이용될 수 있다. 스케일드 호도그래프는 다음과 같이 나타낼 수 있다<sup>13)</sup>.

$$\{D(t)\}^2 R'(t) = \sum_{i=0}^{2n-2} S_i B_i^{2n-2}(t) \quad (3)$$

여기에서, 조정점  $S_i$ 는 다음과 같다.

$S_i =$

$$\frac{\sum_{j=\max(0, i-n+1)}^{i+1} (i-2j+1) \binom{n}{j} \binom{n}{i-j+1} w_i w_{i-j+1} (P_{i-j+1} - P_i)}{\binom{2n-2}{i}} \quad (4)$$

**2.3 Floater의 접선식(FT; Floater's Tangents)**

Floater는 식 (2)의 Bernstein 다항식을 정리하여, 유리 Bézier 곡선의 미분식을 다음과 같이 표현하였다<sup>15)</sup>.

$$R'(t) = \frac{w_{0,n-1}(t)w_{1,n-1}(t)}{w_{0,n}(t)^2} \{R_{1,n-1}(t) - R_{0,n-1}(t)\} \quad (5)$$

여기에서,  $w_{k,m}(t)$ 와  $R_{k,m}(t)$ 은

$$w_{k,m}(t) = \sum_{i=0}^m w_{k+i} B_i^m(t) \quad (6)$$

$$R_{k,m}(t) = \frac{\sum_{i=0}^m w_{k+i} P_{k+i} B_i^m(t)}{\sum_{i=0}^m w_{k+i} B_i^m(t)} \quad (7)$$

와 같다.  $R_{0,n-1}(t)$ 와  $R_{1,n-1}(t)$ 는 de Casteljau의 알고리즘으로 유리 Bézier 곡선 위의 매개변수  $t$ 에 대한 점을 계산과정 중 마지막에서 두 번째 단계에 생기는 들로서, Floater의 접선식은 유리 Bézier 곡선  $R(t)$  위의 미분값이 이 두 점 사이의 벡터와 평행함을 보여준다.

**2.4 Floater의 호도그래프(FH; Floater's Hodograph)**

Floater의 접선식과 함께, Floater가 주어진 가중치에 대한 유리 다항식 집합을 새로이 정의하는 방식으로  $R'(t)$ 의 표현법도 만들었다<sup>16)</sup>. 새로운 다항식 집합과 식 (8)와 같이 이웃한 조정점들 간을 잇는 벡터를 이용하여 미분식을 표현하였다.

$$R'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i) \lambda_i(t) \quad (8)$$

여기에서  $\lambda_i(t)$ 는 다음과 같다.

$$\lambda_i(t) = \frac{1}{(1-t) \{w_{0,n}(t)\}^2} \sum_{j=0}^i \sum_{k=i+1}^n (k-j) B_j^i(t) B_k^n(t) w_j w_k \quad (9)$$

이 표현법은 비유리 Bézier 곡선의 호도그래프 식과 유사한 형태로 나타내어진다. 이에 반해,  $\lambda_i(t)$ 의 특성이나 이 표현법이 주는 기하학적 의미 등은 아직 충분히 연구되어 있지 않다.

**2.5 Closed form 표현법(CF; Closed Form)**

식 (2)에서  $R'(t)$ 의 분모항이  $2n$ 차의 다항식 곡선임을 알 수 있다.  $R'(t)$ 의 분자항이 스케일드 호도그래프로서  $2n-2$ 차항의 비유리 Bézier 곡선으로 표현될 수 있음이 알려져 있다. 따라서, 적절한 방법으로 분모항을 Bernstein 다항식으로 기저변환을 하면  $R'(t)$ 를  $2n-2$ 차의 유리 Bézier 곡선으로 표현할 수 있다. 즉,  $R'(t)$ 를 주어진 형태와 동일한 형태로 표현하

여, 닫혀진 형태(closed form)로 나타내었다<sup>17)</sup>.

$$R'(t) = \frac{\sum_{i=0}^{2n} \kappa_i H_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{2n} \kappa_i B_i^n(t)} \quad (10)$$

여기에서,

$$\kappa_i H_i = \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} j(D(P_{i-j}^n, P_j^n) - D(P_{i-j}^n, P_{j-1}^n)) \\ +(n-j)(D(P_{i-j}^n, P_{j+1}^n) - D(P_{i-j}^n, P_j^n)) \end{matrix} \right\} c_{n,n,i-j,j} \quad (11)$$

$$\kappa_i = \sum_{j=0}^n w_{i-j} w_j c_{n,n,i-j,j} \quad (12)$$

$$c_{n,m,i,j} = \begin{cases} \binom{n}{i} \binom{m}{j} \\ \binom{n+m}{i+j} \end{cases}, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$$

$$= 0, \text{ elsewhere} \quad (13)$$

$$D(P_i^w, P_j^w) = w_i w_j (P_j - P_i) \quad (14)$$

이 표현법은 형태가 닫혀있으므로, 식 (10)을 필요한 만큼 반복적으로 적용하여 유리 Bézier 곡선의 고차나 임의 차수의 미분식을 구할 수 있다.

### 3. 평가 및 비교

이 논문에서는 유리 Bézier 곡선의 미분식을 위한 여러 표현식들을 미분값을 계산하는데 필요한 계산량을 기준으로 평가하였다. 이를 위해, 미분값을 계산하는 과정을 미분값을 계산하기 위한 준비 단계와 실제 미분값을 계산하는 계산단계로 나누어 필요한 계산량을 계산하였다. 준비단계는 유리 Bézier 곡선의 미분값을 계산하기 전에 필요한 변환을 하는 단계로서, 계산하고자 하는 유리 Bézier 곡선에 대해 한 번 행하게 된다. 이에 반해 계산 단계는 미분값을 계산할 때마다 필요한 단계이다. 각 단계에 실험을 통해 계산량을 알아보고, 필요한 여러 상황에 따라 어느 표현식이 유리한지를 논하였다. 실험은 Pentium II 200 MHz에서 Windows NT 4.0환경 하에서 수행하였다.

준비 단계에서 여러 표현식을 평가하기 위해 2차에서 6차까지의 곡선에 대해 필요한 계산시간을 측정하였다. 표현식 간의 계산시간의 차이를 보여주는 시간 단위를 얻기 위해, 임의로 선택된 200개의 유리 Bézier 곡선에 대하여 실험하였다.

Table 1. Time taken by the preprocessing process

차수	2	3	4	5	6
DD	300	381	620	2564	4577
FT	0	0	0	0	0
FH	671	2573	7901	23423	52946
CF	30	61	80	110	150
SH	20	20	30	40	60

\*임의의 200개의 곡선에 대해 걸린 누적시간  
 \*단위: ms (1.0×10<sup>-3</sup>second)  
 \*DD; 직접 미분법  
 FT; Floater의 점선식  
 FH; Floater의 호도그래프법  
 CF; Closed Form 표현법  
 SH; 스케일드 호도그래프법

Table 2. Time taken by the calculation process

차수	2	3	4	5	6
DD	30	30	30	50	50
FT	641	741	892	1081	1342
FH	50	70	100	131	160
CF	211	581	1161	1893	2844
SH	100	311	511	771	1082

\*1000개의 미분식의 누적 계산시간  
 \*단위: ms (1.0×10<sup>-3</sup>second)

계산단계에 필요한 계산량을 두 가지 방법으로 평가하였다. 실험을 위해 power 기저형태는 Honer의 규칙을 이용하여 구현하였으며, Bernstein 기저 형태는 de Cateljau의 알고리즘으로 구현하였다. 계산 전 단계와같은 이유로, 10,000개의 미분식 값을 계산하는 시간을 측정하여 그 결과를 Table 2에 나타내었다.

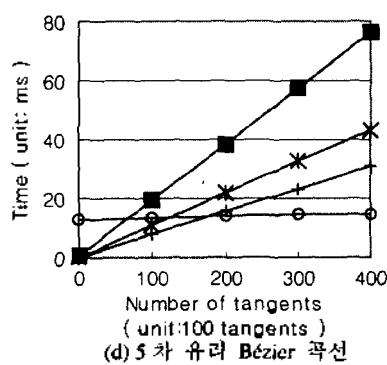
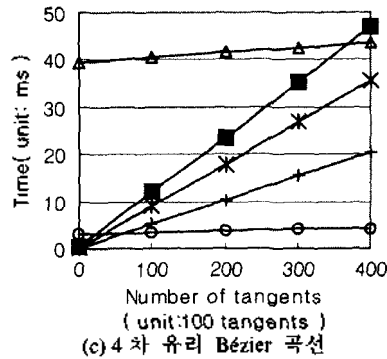
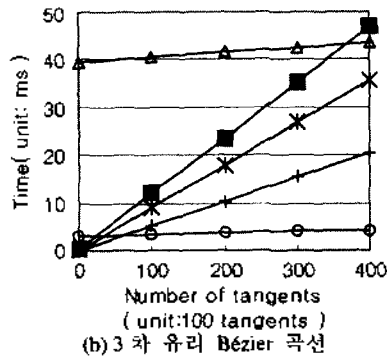
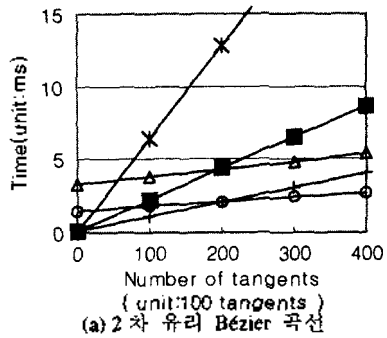
이 실험 외에 다음과 같이 각 표현법의 미분값을 계산 시 계산단계에서 필요한 이론적인 계산량은 다음과 같다.

이 실험들을 기초로 하여, 차수가 2에서 5인 유리

Table 3. Analytical time complexity of the calculation process

연산	+, -	×, ÷
DD	$d(2n-2)$	$d(2n)+1$
FF	$d(n^2+n) + \frac{5n^2+5n+2}{2}$	$d(2n^2+2n+1)+1 + 5n^2+5n+4$
FH	$d(2n-1) + 2n-2n$	$d(2n) + 2n^2-2n+1$
CF	$d(2n^2+n) + 2n^2+2n$	$d(4n^2+2n) + 4n^2+2n$
SH	$d(2n^2+3n+1)$	$d(4n^2-6n+2)$

\*d; 주어진 유리 Bézier 곡선의 차원  
 \*n; 주어진 유리 Bézier 곡선의 차수



○ DD, \* FT, △ FH, ■ CF, + SH

Fig. 1. Calculation time for rational Bézier curves of degree 2, 3, 4, and 5 (FH for degrees 4 and 5 are omitted due to too high values).

Bézier 곡선에 대한 미분 시간을 Fig. 1에 도시하였다.

미분값을 계산하는 각 표현식의 단계별로 계산시간을 살펴 보면, 직접 미분식과 Floater의 호도그래프식이 계산 전 단계에서 많은 시간을 소비하고 계산 단계에서는 다른 방법에 비해 적은 시간을 소비하고 있다. 이러한 방법 외 Floater의 접선식 등은 계산 전단계에서는 적은 계산 시간을, 계산 단계에서는 많은 계산시간을 필요로 하고 있다. 그 이유는 각각의 다항식을 표현하는 방법에서 찾아 볼 수 있다. 직접 미분식과 Floater의 호도그래프식은 power 기저형태로 유리 Bézier 곡선의 미분식을 표현하므로 계산 전 단계에서 Bernstein 기저로 표현된 것을 power 기저로 바꾸는 단계가 필요하다. 이에 반해 계산 전 단계와는 반대의 결과가 나타난다. 계산단계에서 계산시간의 상당 부분이 다항식을 계산하는데 이용되는데, 수치오차를 고려하지 않으면 일반적으로 power기저로 표현된 다항식의 계산이 Bernstein 기저로 표현하였을 때보다 효율적이라고 알려져 있다. 따라서, 직접 미분식과 Floater의 호도그래프식은 다른 표현식보다 계산 단계에서 효율적으로 계산할 수 있다.

이러한 실험들의 결과를 분석해 보면, 우선 Floater의 접선식과 closed form 표현법이 계산전단계에서 필요한 계산이 적어 정확한 미분값을 계산해야 하는 경우에 다른 방법들보다 효율적임을 알 수 있다. 그러나, 한 미분값을 계산하는 시간이 직접 미분식보다 상대적으로 높기 때문에 직접미분식이 많은 미분값을 계산하는 경우에 효율적일 수 있다. 이에 반해, 스케일드 호도그래프와 closed form 표현법은 유리 Bézier 곡선의 미분식의 방향의 범위를 계산하는 효과적인 방법을 제공하여, 접선쌍을 계산하는데 사용할 수 있다. 즉, 스케일드 호도그래프나 closed form 표현법은 미분식을 일정한 곡선의 형식으로 표현하였기 때문에 접선쌍을 계산하는데 유용하다. 또한, closed form 닫혀진 형태로 표현하였기 때문에 고차 미분값을 동일한 함수를 반복적으로 호출하여 구할 수 있고 이는 직접 미분법의 경우에도 한번 power 기저 형태로 변환한 후에는 동일한 방법으로 고차미분값을 쉽게 구할 수 있다.

이러한 사실을 다음 Table 4로 정리하였다.

#### 4. 결 론

유리 Bézier 곡선이나 곡면을 활용하는 데 있어 미분값은 유용하게 사용되고 있으며, 여러 점에서 미

분값을 계산해야 할 경우도 있다. 따라서, 이 논문에서는 기존의 표현법을 정리하고, 각 표현법의 계산 전 단계와 계산 단계에서 필요한 계산량을 조사하였다. 이러한 방법으로, 다양한 상황 하에서 효율적인 표현식을 밝힐 수 있었다. 전체적으로, Floater의 미분식의 효율적이었으며, 미분값의 방향이 필요한 경우 스케일드 호도그래프가 효율적임을 알 수 있었다. closed form 표현식은 접선벡터를 계산할 수 있으며, 크기와 방향에 대한 정보를 제공하고, 저차에서 다른 표현식에 비해 계산시간이 크게 뒤떨어지지 않는다. 또한, closed form 표현식은 임의 차수의 미분식이 필요한 경우에 유용하게 사용될 수 있다.

3. Sederberg, T.W. and Wang, X., Rational hodographs, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 4, pp.333-335, 1987.
4. Saito T., Wang, Guo-Jin and Sederberg, T. W., Hodographs and normals of rational curves and surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.12, 1995, pp. 417-430.
5. Floater, M. S., Derivatives of rational Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 9, pp. 161-174, 1992.
6. Piegl, L. and Tiller, W., Symbolic operators for NURBS, *Computer Aided Design*, Vol. 29, No. 5, pp. 361-368, 1997.
7. 김덕수, 장태범, 조영송, "유리 Bézier 곡선과 곡면의 호도그래프", 한국 CAD/CAM 학회 논문집, Vol. 3, No. 2, pp. 135-139, 1998.

Table 4. Summary of the experiments

상 황	DD	FT	FH	CF	SH
미분값의 크기와 방향이 필요한 경우		○		○	
미분값의 방향만 필요한 경우					○
임의 차수의 미분값이 필요한 경우	○			○	
2,3차 곡선에서 비교적 많은 수의 미분값이 필요한 경우	○				
접선벡터를 계산하는 경우				○	○

\*○: 적절함

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

1. Kim, D. S., Hodograph approach to geometric characterization of parametric cubic curves., *Computer Aided Design*, Vol. 25, pp. 644-654, 1993.
2. Kim, D. S., Papalambros, P. Y. and Woo, T.C., Tangent, normal, and visibility cones on Bézier surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, pp. 305-320, 1995.



김 덕 수

1982년 한양대학교 산업공학과 학사  
 1985년 New Jersey Institute of Technology 산업공학과 석사  
 1990년 The University of Michigan 산업공학과 박사  
 1989년~1991년 Schlumberger Technology CAD/CAM Co. Senior Software Engineer  
 1991년~995년 삼성 종합 기술원 선임 연구원  
 1995년~현재 한양대학교 산업공학과 부교수  
 관심분야: geometric modeling, computational geometry, STEP and Internet application



장 태 범

1997년 한양대학교 산업공학과 학사  
 1999년 한양대학교 산업공학과 석사  
 1999년~현재 한양대학교 산업공학과 박사 과정  
 관심분야: geometric modeling, optimization, computer graphics, computational geometry