

論文99-36S-5-11

# SDFT 스펙트럼 해석 시 계수근사에 따른 오차영향 해석

## (The Effect of Finite-bit Approximated Twiddle Coefficients in the SDFT Spectral Analysis)

金載和\*, 張泰奎\*

(Jae-Hwa Kim and Tae-Gyu Chang)

## 요 약

본 논문에서는 sliding-DFT(SDFT)를 계수의 유한 비트 근사구현에 기초하여 실시간 구현하는 기법을 제시하고, 이의 오차영향을 해석하였다. 오차의 영향을 오차전력과 신호전력비율(noise-to-signal power ratio : NSR)로 하여 이를 해석적으로 유도하였다. 가우스 랜덤신호 및 사람의 수면 EEG 신호를 대상으로 수행한 시뮬레이션 결과가 해석식과 잘 일치하는 것을 보임으로써 본 연구에서 얻은 해석식을 확인하였다.

## Abstract

This paper presents a real-time sliding-DFT(SDFT) implementation technique which is based on the finite-bit approximation of the twiddle coefficients. The effect of the approximation is analytically investigated and its result is obtained in a closed form equation of the noise-to-signal power ratio(NSR). The result is confirmed by the computer simulations performed for random signals as well as for the actual human sleep EEG data.

## I. 서 론

연속되는 신호로부터 특징파형들을 검출하거나 패턴 분류 등의 목적으로 적용하는 신호처리기법을 크게 나누면 시간영역에서 시각적인 특징현상들을 검출에 기초한 시간영역 해석기법과, 주파수영역 해석기법으로 나눌 수 있다. 이중 시간영역 해석기법은 구현의 간편성에 의한 장점이 있으나 관련되는 문턱값(threshold)들의 설정과정에 임의성이 많고 잡음에 대한 민감성 때문에 연구가들에 의해 기피되고 있는 실정이다.

이에 비해 주파수영역 해석기법은 일정 구간의 신호

가 정지프로세스(stationary process)라는 가정을 바탕으로 신호의 스펙트럼에 대한 통계적인 특성으로 신호를 규정짓는 방법으로서 FFT등의 고속계산 알고리즘 및 디지털 하드웨어의 발달과 함께 그 응용이 매우 활발하게 이루어지고 있다<sup>[1]</sup>. 하지만 주파수영역 해석기법은 관련되는 연산량이 상대적으로 많아, 실시간 신호처리 목적에 적용하고자 하는 경우는 고속연산을 위해 DSP(digital signal processing) 칩을 비롯한 특수 하드웨어를 필요로 하는 것이 일반적이어서, 이의 경제적인 구현을 통한 광범위한 응용에는 제약이 따르는 것이 일반적이다.

이에 본 연구에서는 뇌파 신호 감지에서와 같은 버스트진동신호(oscillatory burst signal) 감지를 목적으로 고속 실시간 주파수영역 해석을 위한 SDFT(sliding-DFT) 근사구현 기법을 제시하고, 근사에 따른 오차의 영향을 해석적으로 구하는 과정을 기술하였다. 또한 본 논문에서 수행한 해석의 타당성을 확인하기 위한 목적으로 시뮬레이션 및 실제 채집한 수면뇌

\* 正會員, 中央大學校 電子電氣工學部

(Department of Electrical and Electronics Engineering, Chung-Ang University)

※ 본 논문은 한국과학재단의 특정목적기초 연구 지원

96-0102-0201-3에 의해 수행한 연구내용입니다.

接受日字:1998年7月20日, 수정완료일:1999年3月12日

파 (EEG : electroencephalogram)를 대상으로 오차에 대한 성능열화를 검토하여 보았다. 이와 같은 연구를 통하여 범용프로세서 환경이나 VLSI 구현에 있어서 근사에 의해 구현한 SDFT 주파수 해석기법의 응용 가능 범위를 제시하고, 관련 설계변수들을 설정하기 위한 설계 지침을 제공하고자 하였다.

## II. 계수근사에 의한 SDFT 구현 방법

주파수해석을 통해 연속되는 신호로부터 특징파형을 감지하기 위해 흔히 사용하는 방법의 하나로서 신호를 일정 블록으로 나누어 각 블록에 대해 DFT를 수행하는 BDFT(block discrete-time Fourier transform) 혹은 BFFT(block fast Fourier transform)를 들 수 있으며, 이 경우 블록처리에 의해 손실되는 시간 정보가 문제되는 경우는 유한한 샘플들의 중첩을 가능케 하는 순환(recursive) 구현법인 sliding DFT (혹은 hopping DFT라고도 칭함)를 적용하게 된다<sup>[2] [3]</sup>.

특징현상을 감지하는 시점에 대한 시간해상도가 중요한 경우에는 중첩을 최소단위인 한 샘플씩 시키는 것이 필요하고 이러한 SDFT는 BDFT의 경계문제 해결뿐만 아니라, 순환구조로 구현할 수 있으므로 마이크로컨트롤러 상에서 소프트웨어적으로 계산하거나 VLSI로 구현할 경우 상대적으로 단순한 구조로 구성할 수 있는 장점이 있다. 순환구조에 따른 구현의 단순성에 더해 DFT연산 과정에 사용하는 복소수 계수들을 유한한 수의 비트에 의한 근사치로 표현하여 계산한다면, 부동소수점 연산을 피할 수 있어 상대적으로 계산량이 적은 고정소수점 연산이 가능하여, 범용 컨트롤러 상에서 실시간 구현이 가능하고 VLSI로 구현할 경우에 부동 소수점 연산을 위한 ALU가 필요 없어 칩 면적을 대폭적으로 절약할 수 있다.

하지만 이러한 근사를 적용하였을 경우는 이로 인한 오차가 스펙트럼 추정에 미치는 성능열화를 가져올 수 있어 이에 대한 해석을 통한 관련 설계 값들의 설정이 중요한 문제로 대두된다. 특히 이러한 오차의 영향은 SDFT와 같은 순환알고리즘의 경우 심하기 때문에 근사기법의 적용에 커다란 제약이 된다<sup>[4] [5]</sup>. 따라서 본 절에서는 오차에 의한 영향이 가장 심한 SDFT를 대상으로 비트 근사에 의해 구현하는 방법을 기술하고, 이에 대해 근사가 미치는 영향을 구하는 과정을 다음 절에 기술하였다.

신호열  $x(l), x(l+1), \dots, x(l+N-1)$ 의  $N$ -point DFT는 다음의 식 (1)과 같이 입력신호  $x(l+m)$ 과 복소수 진동계수(twiddle coefficient)  $W = e^{j2\pi/N}$ 의 가중치 합으로 나타낼 수 있다.

$$X_k(l) = \sum_{m=0}^{N-1} x(l+m)W^{-km} \quad (1)$$

여기서  $X_k(l)$ 은  $l$  번째 신호블록의  $k$  번째 주파수 성분이며, 이를 이용하여  $l+1$  번째 블록의 DFT를 쓰면 식 (2)와 같이  $X_k(l)$ 과  $X_k(l+1)$ 의 관계적인 SDFT 순환식을 얻는다.

$$\begin{aligned} X_k(l+1) &= \sum_{m=0}^{N-1} x(l+1+m)W^{-km} \\ &= W^k \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} x(l+m)W^{-km} - x(l) + x(l+N) \right\} \\ &= W^k \{ X_k(l) - x(l) + x(l+N) \}, \\ &k=0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)에서 보듯이 다음 블록의 DFT 값  $X_k(l+1)$ 은 현재 블록의 DFT 값  $X_k(l)$ 에 새로 블록에 첨가되는 신호  $x(l+N)$ 을 더하고 블록에서 제외되는 신호  $x(l)$ 을 뺀 후 진동계수  $W^k$ 를 곱해서 얻을 수 있으며, 주파수 성분별로 한번의 복소수 곱셈과 두 번의 덧셈으로 계산되는 병렬 연산구조이다. 이를 하드웨어로 구현할 경우 SFFT(sliding fast Fourier transform)에 비하여 기억장소가 적게 들면서 곱셈의 수는 한번 많아 경제성 측면에서 매우 유용하다<sup>[3]</sup>.

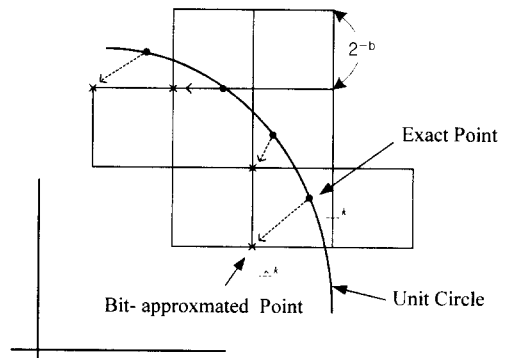


그림 1. 계수의 비트 근사화 예,  $b$  : 근사 비트수  
Fig. 1. Illustration of the bit approximation of the coefficients.  $b$  : approximation bit.

식 (2)의 진동계수  $W^k$ 는 복소수 평면에서 단위원

상의 점들로 표시할 수 있으며, 실수 부 허수 부를 각각 양자화 하여 비트 근사화하면 그림 1과 같이 단위원 내부의 정사각형 격자점으로 표시할 수 있다. 각 정사각형 격자들의 길이는  $b$  비트로 근사화할 경우 양자화스텝크기(quantization step-size)인  $2^{-b}$ 와 같다. 격자점의 설정은 실제 계수를 포함하는 정사각형의 모서리 중 하나를 선택함으로써 이루어지며, 실제 계수와 이루는 오차의 크기나 위상각 차이를 기준으로 선택한다. 또한 오차의 안정성을 고려하여 단위원 내부의 점 중에서 선택하여야 한다.

진동계수  $w$ 를 그림 1과 같이 비트 근사화하여 표현할 경우, 식 (2)에서 나타나 듯이 SDFT 계산의 대부분을 차지하는 계수의 곱셈을 지연(shift)연산과 덧셈의 조합으로 나타낼 수 있어 부동 소수점 연산보다 상대적으로 빠른 고정 소수점 연산이 가능해진다. 이때 근사화된 진동계수를  $\hat{w}$ 로 표시하고 이를 룩업테이블(lookup table) 형태로 저장하여 적용한 SDFT 근사 스펙트럼을  $\hat{X}_k(l)$ 로 표시하면 식 (2)에 의해 식 (3)과 같이 SDFT 근사 식을 얻는다.

$$\hat{X}_k(l+1) = \hat{w}^* \{ \hat{X}_k(l) - x(l) + x(l+N) \} \quad (3)$$

식 (3)의 근사 스펙트럼  $\hat{X}_k(l)$ 의 오차는 계수를 표현하는 비트 수와 DFT 구간길이에 따라 결정되며 이에 대한 정량적인 해석과정 및 결과를 3장에 기술하였다.

### III. 계수근사에 의한 오차 영향 해석

계수를 근사화하고 SDFT를 수행하면 블록내의 실제 스펙트럼과 근사 계산된 스펙트럼은 차이가 생겨 누적되고 이는 시간에 대한 1차 식으로 얻어진다. 이 식을 오차 방정식(error dynamics)으로 정의하고 이를 토대로 근사 비트 수에 대한 성능 열화를 구한다.

#### 1. SDFT의 오차방정식

계수를 근사화하여 식 (3)과 같이 SDFT를 수행하면 근사화된 DFT 값과 실제 DFT 값은 연산이 진행됨에 따라 차이를 가지게된다.  $l$  번째 블록에서의 근사화된 DFT 값  $\hat{X}_k(l)$ 과 실제 DFT  $X_k(l)$  값의 차이를 오차스펙트럼  $E_k(l) = \hat{X}_k(l) - X_k(l)$ 로 정의하고 식 (2)와 (3)을 이용하여 조합하면 식 (4)와 같이 오차스

펙트럼에 대한 1차 식을 얻는다.

$$E_k(l+1) = \hat{w}^* E_k(l) + (\hat{w}^* - w^*) \{ X_k(l) - x_l(0) + x_l(N) \} \quad (4)$$

여기서 근사 계수  $\hat{w}^*$ 의 기하학적 해석을 위해  $\alpha_k \triangleq \frac{\hat{w}^*}{w^*}$ ,  $\delta_k \triangleq \frac{\hat{w}^* - w^*}{w^*}$ 를 정의하고 식 (4)의 우변 두 번째 항의 갱신 항을  $U_k(l) \triangleq X_k(l) - x_l(0) + x_l(N)$ 로 정의하자. 그러면 식 (5)와 같이 1 차 차분 방정식 형태의 오차 방정식을 얻는다. 오차 방정식 (5)는 극점이  $\alpha_k w^*$ 이고 입력이  $U_k(l)$ 인 선형시스템 방정식이라 할 수 있으며, 식 (2)의 SDFT 순환식과 같이 주파수 성분  $k$ 에 따라 독립적인 구조이다. 이에 대한 신호 흐름도를 그림 2에 나타내었다.

$$E_k(l+1) = \alpha_k w^* E_k(l) + \delta_k w^* U_k(l) \quad (5)$$

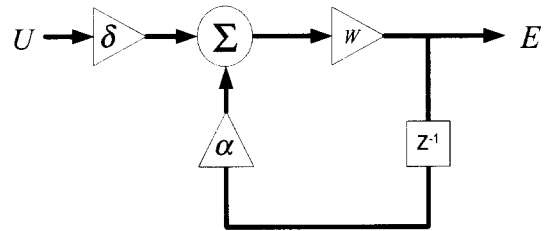


그림 2. 오차방정식의 신호 흐름도  
Fig. 2. Signal flow diagram of the error dynamics.

#### 2. 근사 비트 수에 따른 오차 영향 해석

본 논문에서는 SDFT의 오차특성을 대표 할 수 있는 관계식을 얻기 위해 SDFT 대상신호를 평균이 '0'인 비상관가우시안신호(uncorrelated Gaussian signal)로 설정하고,  $\alpha_k$ 와  $\delta_k$ 를 확률 분포를 갖는 확률변수로 처리하여 이에 따른 잡음 대 신호의 전력비율(NSR : noise-to-signal power ratio)을 구하였다. NSR은 궁극적으로  $\alpha_k$ 와  $\delta_k$ 의 기하학적 분포특성에 관계하는 비트 수  $b$ 에 관한 식으로 나타난다. 이와 같은 유도과정은 오차방정식 (5)를 이용한다.

NSR은 다음에 식 (6)과 같이, 각 블록에 대한 오차  $E_k(l)$ 의 평균전력밀도와  $X_k(l)$ 의 평균전력밀도의 기대값 비율로 정의하자.

$$\sigma_E^2 \triangleq E \{ |E_k(l)|^2 \}, \quad \sigma_X^2 \triangleq E \{ |X_k(l)|^2 \}$$

$$NSR \triangleq \frac{\sigma_E^2}{\sigma_x^2} \quad (6)$$

여기서,  $E\{\cdot\}$ 와  $\overline{\{\cdot\}}$ 는 각각 앙상블(ensemble) 기대값 연산과  $k$ -축 상에서의 평균 연산을 나타낸다. 오차의 평균전력밀도의 기대치  $\sigma_E^2$ 은 (5)의 양변에 절댓값 제곱을 취하고 주파수평균과 앙상블 평균을 취하면 (7)과 같이 나타낼 수 있다. 이를 유도하는 과정에서는 정지프로세스의 특성에 의해 정상상태에서  $E\{\overline{|E_k(l)|^2}\}$ 과  $E\{\overline{|E_k(l+1)|^2}\}$ 이  $\sigma_E^2$ 으로 같다는 사실을 이용한다<sup>[6]</sup>.

$$\sigma_E^2 = \frac{2\varepsilon\{Re\overline{\alpha_k^* \delta_k U_k(l) E_k^*(l)}\} + |\delta_k|^2 \varepsilon\{\overline{|U_k(l)|^2}\}}{1 - |\alpha_k|^2} \quad (7)$$

NSR을 구하기 위해서 (7)의 오른쪽에 있는 각 항들을 근사 비트수  $b$ 에 관한 식으로 유도하자. 입력항의 평균전력밀도  $E\{\overline{|U_k(l)|^2}\}$ 는 정의에 따라  $U_k(l)U_k^*(l)$ 를 대수적으로 전개하고 전개한 식에서 입력 신호들의 교차 항들 중 비상관된 항들을 제거해서 얻는다. 이보다 일반적인 경우를 구하기 위해  $U_k(l)U_k^*(l-m)$ 를 (2)의 관계를 이용하여 전개하면 (8)과 같다.

$$U_k(l)U_k^*(l-m) = X_k(l+1)X_k^*(l-m+1) = \sum_{p=0}^{N-1} x(l+1+p)W^{kp} \sum_{q=0}^{N-1} x^*(l-m+1+q)W^{kq} \quad (8)$$

$X_k(l)$ 은 신호열  $x(l), x(l+1), \dots, x(l+N-1)$ 과 진동계수  $W$ 의 선형 조합이므로 DFT 계수들간의 곱에서 신호 샘플들 간에 중복되지 않은 샘플들의 교차 항들은 신호의 비상관 가정에 따라 '0'이 된다. 이러한 사실을 적용하여  $E\{U_k(l)U_k^*(l-m)\}$ 을 구하면 (9)와 같이 얻는다.

$$\varepsilon\{U_k(l)U_k^*(l-m)\} = (N-m)\sigma_x^2 W^{mk} \quad (9)$$

여기서,  $\sigma_x^2 = E\{|x(n)|^2\}$ .

입력항의 평균전력밀도  $E\{\overline{|U_k(l)|^2}\}$ 는 (9)의 특수한 경우로  $m=0$ 을 대입하여 (10)과 같이 얻는다.

$$\varepsilon\{\overline{|U_k(l)|^2}\} = N\sigma_x^2 = \sigma_x^2 \quad (10)$$

$\delta_k$ 와  $\alpha_k$ 는 근사 비트 수에 따라 형태가 결정되는

공간상의 확률분포를 갖는다. 부호를 제외하고 진동계수의 실수부 및 허수부의 크기만을  $b$  비트로 근사화하면, 그림 1에서 보였듯이 근사계수  $\widehat{W}$ 는 복소수 평면 상에서  $2^{-b}$ 길이를 갖는 정사각형 격자점으로 표시할 수 있다. 격자점을 오차 방정식의 안정성을 고려하여 단위원 내부의 점 중에서 선택하고, 실수축 허수축을 각각 버림(truncation)하는 경우를 가정하여 실제 계수  $W^k$ 의 대각 방향으로 근사하면, 근사계수 오차  $\delta_k W^k$ 와  $\alpha_k$ 는 각각 그림 3의 (a)와 (b)와 같이 한 변의 길이가  $2^{-b}$ 인 사각형들로 구성된 형태의 평등분포(uniform distribution)라 가정할 수 있다.

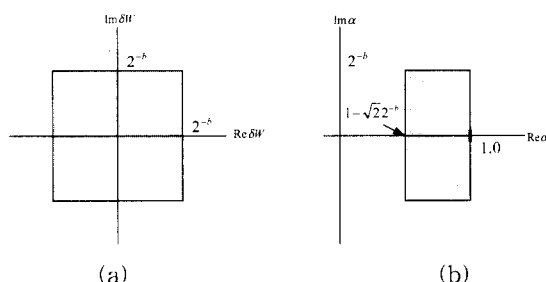


그림 3. 비트 근사에 따른 계수근사 오차  $\delta_k W^k$ 와 계수근사 비율  $\alpha_k$ 의 확률분포 (a) :  $\delta_k W^k$ 의 분포, (b) :  $\alpha_k$ 의 분포

Fig. 3. Spatial distribution of the coefficients error  $\delta_k W^k$ , and coefficients error ratio  $\alpha_k$ . (a) : distribution of  $\delta_k W^k$ , (b) : distribution of  $\alpha_k$

식 (7)의  $\overline{|\delta_k|^2}$ 을 구하기 위해  $\delta_k W^k$ 의 평등분포 가정을 토대로  $|\delta_k W^k|^2$ 의 기대값을 구하면 식 (11)과 같다.

$$\overline{|\delta_k|^2} = \overline{|\delta_k W^k|^2} = \int \int_R \delta^2 \cdot p_\delta dR = \frac{2}{3} \Delta^2 \quad (11)$$

여기서,  $\Delta = 2^{-b}$ ,  $p_\delta = \frac{1}{4\Delta^2}$ .

식 (7)의  $\overline{|\alpha_k|^2}$ 을 구하기 위해 식  $\alpha_k$ 와  $\delta_k$ 의 관계식을 조합하면 다음의 식 (12)와 같이 되고,

$$\overline{|\delta_k|^2} = (\alpha_k - 1)(\alpha_k^* - 1) = \overline{|\alpha_k|^2} - 2Re\overline{\alpha_k} + 1 \quad (12)$$

$\overline{|\delta_k|^2}$ 에 (11)의 결과를 대입하고  $Re\overline{\alpha_k}$ 의 값을  $\alpha_k$ 의 기하학적 분포를 관찰하여 실수부 분포범위의 중간값인  $1 - \frac{\Delta}{2}$ 로 대입하면 식 (13)과 같이  $\overline{|\alpha_k|^2}$ 를 얻

는다.

$$|\alpha_k|^2 = \frac{2}{3} \Delta^2 - \sqrt{2} \Delta + 1 \quad (13)$$

식 (7)에 교차항의 기대값  $\varepsilon \operatorname{Re}\{\overline{\alpha_k^* \delta_k U_k(l) E_k^*(l)}\}$ 를 구하기 위해서 오차 방정식 (5)를  $U_k(l) E_k^*(l)$ 의  $E_k(l)$ 에 대입하여 (14)와 같이 다시 쓰자.

$$U_k(l) E_k^*(l) = \quad (14)$$

$$U_k(l) \{ \widehat{W}^* E_k^*(l-1) + \delta_k^* W^{**} U_k^*(l-1) \}$$

계속해서 오차 방정식 (5)를 식 (14)에 반복 적용하면  $U_k(l) E_k^*(l)$ 는 (15)와 같이 무한 합 식으로 쓸 수 있고

$$U_k(l) E_k^*(l) = \delta_k^* W^{**} \sum_{m=1}^{\infty} U_k(l) U_k^*(l-m) \widehat{W}^{(m-1)k^*} \quad (15)$$

양변에  $\alpha_k^* \delta_k$ 를 곱하고 기대값 연산을 취하여 (9)의 결과를 대입하면, (16)과 같이  $\alpha_k$ 의 멱급수 합으로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon \{ \alpha_k^* \delta_k U_k(l) E_k^*(l) \} \\ &= \varepsilon \left\{ \alpha_k^* \delta_k \delta_k^* W^{**} \sum_{m=1}^{\infty} U_k(l) U_k^*(l-m) \widehat{W}^{(m-1)k^*} \right\} \\ &= \varepsilon \left\{ |\delta_k|^2 \sum_{m=1}^{\infty} U_k(l) U_k^*(l-m) \widehat{W}^{m k^*} \right\} \\ &= \sigma_x^2 |\delta_k|^2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \alpha_k^{m^*} \quad (16) \end{aligned}$$

멱급수 합 형태로 되어있는 (16)을 닫힌 형태(closed-form)로 공식화하면, (19)와 같이  $\alpha_k$ 에 관한 다항식 형태로 근사화할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 |\delta_k|^2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \alpha_k^{m^*} \\ &= \frac{\sigma_x^2}{N} |\delta_k|^2 \left\{ \frac{\alpha_k^* (\alpha_k^{N^*} - 1)}{(\alpha_k^* - 1)^2} - \frac{N \alpha_k^*}{\alpha_k^* - 1} \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{N} \left\{ \frac{(\alpha_k - 1)}{(\alpha_k^* - 1)} \alpha^* (\alpha_k^{N^*} - 1) - N (\alpha_k - 1) \alpha_k^* \right\} \quad (18)$$

$$\approx \frac{\sigma_x^2}{N} \{ \alpha_k^{(N+1)^*} + (N-1) \alpha_k^* - N \alpha_k^* \} \quad (19)$$

여기서 (19)로 단순화할 수 있는 것은 (18)에  $\frac{\alpha_k - 1}{\alpha_k^* - 1}$ 이 단위원 상의 점으로 위상각이  $\alpha_k^N - 1$ 의 위상각에 반대 방향으로 두 배라고 근사할 수 있기 때문이다. 이렇게 했을 때 적은 비트 수에서 발생하는 근사오차의 양은  $N(\alpha_k - 1) \alpha_k^*$ 가 상대적으로 매우 크기

때문에 무시할 수 있다.

기하학적 특성을 보면  $\alpha_k$ 의 위상각이 충분히 작다고 할 수 있기 때문에  $\alpha_k$ 는 실수부만으로 대치할 수 있어서 (19)에  $\alpha_k^{(N+1)^*}$ 의 기대값은 (20)과 같이 확률 평균 적분식으로 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_k^{(N+1)^*}} &\approx \operatorname{Re} \overline{\alpha_k^{N+1}} = \int_{1-\sqrt{2}\Delta}^1 \frac{1}{\sqrt{2}\Delta} x^{N+1} dx \\ &= \frac{1}{(N+2)\sqrt{2}\Delta} \{ 1 - (1-\sqrt{2}\Delta)^{N+2} \} \quad (20) \end{aligned}$$

교차항의 기대값은 (13)과 (20) 등의 결과를 (19)에 대입하여 (21)와 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} \varepsilon \{ \operatorname{Re} \overline{\alpha^* \delta U E^*} \} &\approx \\ &\frac{\sigma_x^2}{N} \left[ \frac{1}{(N+2)\sqrt{2}\Delta} \{ 1 - (1-\sqrt{2}\Delta)^{N+2} \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} N \Delta^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} (N+1) \Delta - 1 \right] \quad (21) \end{aligned}$$

NSR 최종 식은 오차의 평균전력밀도 식 (7)에 (10), (11), (13), 그리고 (21)을 대입하여 신호의 평균전력밀도  $\sigma_x^2$ 으로 나누어 (22)와 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} \text{NSR} &= \frac{\sigma_E^2}{\sigma_X^2} \approx \\ &\frac{1}{\sqrt{2}\Delta - 2/3\Delta^2} \left[ \frac{\sqrt{2}}{N(N+2)\Delta} \{ 1 - (1-\sqrt{2}\Delta)^{N+2} \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \Delta^2 + \frac{\sqrt{2}}{N} (N+1) \Delta - \frac{2}{N} \right] \quad (22) \end{aligned}$$

여기서,  $\Delta = 2^{-b}$ . NSR 식 (23)은 계수근사 비트 수  $b$ 와 DFT 구간길이  $N$ 에 대한 닫힌 형태의 방정식으로 나타남을 알 수 있다.

#### IV. 시뮬레이션 결과 및 검토

본 절에서는 3절에서 해석적으로 구한 오차 관계식 (22)의 타당성을 보이기 위하여, 랜덤신호(random signal) 및 실제 채취한 수면 EEG신호를 대상으로 SDFT를 적용하여 얻은 NSR(noise-to-signal power ratio)와 비교 검토하는 과정을 기술하였다.

랜덤신호는 평균이 '0'인 백색 가우스신호로 택하였다. DFT 블록 길이는 256으로 하고, 근사계수를 적용하여 SDFT를 수행하면서 256 샘플마다 블록의 오차 스펙트럼 및 실제 스펙트럼의 샘플전력(sample

power)을 구하고 각각 2000 블록을 평균하여 이 비율을 NSR로 하였다. 다음에 그림 4는 근사 비트 수를 1 비트부터 16 비트까지 바꾸어 가며 실험하여 얻은 NSR 값과 해석식 (22)를 이용하여 계산한 값을 동시에 표시한 결과이다.

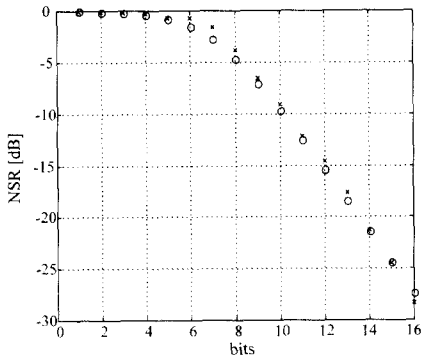


그림 4. 백색 가우신신호에 대하여 근사화된 SDFT를 적용하였을 경우 근사 비트 수에 따른 오차 전력과 신호 전력 비율 ( $N : 256$ ,  $o$  : 이론 값,  $x$  : 실험 값)

Fig. 4. Noise-to-signal power ratio with respect to the approximation bits, which is obtained by applying the approximated SDFT for the white Gaussian signal. ( $N : 256$ ,  $o$  : analytic value,  $x$  : simulated value)

EEG신호는 20대 성인 남자의 수면 0 단계 및 수면 2 단계 상태 때 전두부(frontal), 중두부(central), 후두부(occipital), 그리고 안전도(EOG : electrooculogram) 채널에서 채집한 신호를 사용하였다. 신호를 채집하는 샘플링 주파수는 240Hz로 하고 A/D 변환은 10 비트로 하였다.

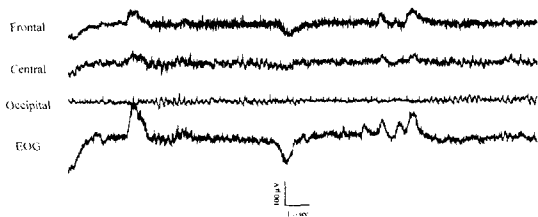


그림 5. 수면 0 단계 상태에서 발생하는 각 채널별 파형 예. (전두부 : F1-F7, 중두부 : C3-A2, 후두부 : O2-OzPz, EOG : LE-A2)

Fig. 5. Illustration of sleep-EEG patterns occurring during the stage0. (Frontal : F1-F7, Central : C3-A2, Occipital : O2-OzPz, EOG : LE-A2)

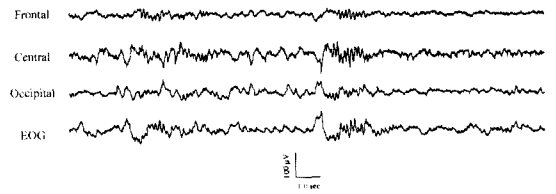


그림 6. 수면 2 단계 상태에서 발생하는 각 채널별 파형 예. (전두부 : F1-F7, 중두부 : C3-A2, 후두부 : O2-OzPz, EOG : LE-A2)

Fig. 6. Illustration of sleep-EEG patterns occurring during the stage2. (Frontal : F1-F7, Central : C3-A2, Occipital : O2-OzPz, EOG : LE-A2)

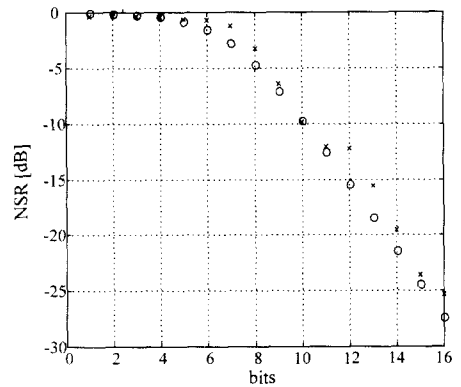


그림 7. 수면 0 단계 EEG 신호에 대하여 근사화된 SDFT를 적용하였을 경우 근사 비트수에 따른 오차 전력과 신호 전력 비율 ( $N : 256$ ,  $o$  : 이론 값,  $x$  : 실험 값)

Fig. 7. Noise-to-signal power ratio with respect to the approximation bits, which is obtained by applying the approximated SDFT for the stage0 signal. ( $N : 256$ ,  $o$  : analytic value,  $x$  : simulated value)

그림 5와 그림 6은 각각 0 단계, 2 단계 상태에서 발생하는 전형적인 특징파형을 포함한 구간의 각 채널별 파형이다. 그림 5에 후두부 채널에서 0 단계의 전형적인 파형인 알파스핀들(alpha spindle) 파형들을 볼 수 있고, 그림 6에서는 중두부 채널을 포함한 모든 채널에서 2 단계의 전형적인 파형인 시그마스핀들(sigma spindle) 파형들을 볼 수 있다. 전극 위치 및 용어들은 Rechtschaffen와 Kales의 표준을 따랐다<sup>[7]</sup>.

위의 그림 5와 그림 6에 나타낸 구간을 포함한 신호들의 중두부 채널 신호에 대해 근사 SDFT를 적용하여 얻은 NSR 값을 그림 7과 그림 8에 수면단계 별로 나타내었다. 랜덤신호에서의 마찬가지로 DFT 구간

길이는 256으로 하고 2000블록 동안 샘플전력을 평균 하여 NSR 값을 얻었다.

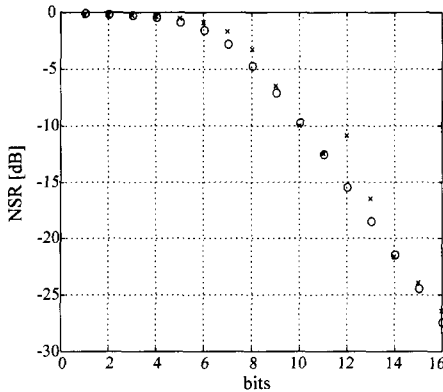


그림 8. 수면 2 단계 EEG 신호에 대하여 근사화된 SDFT를 적용하였을 경우 근사 비트수에 따른 오차 전력과 신호 전력 비율 ( $N : 256$ ,  $o$  : 이론 값,  $x$  : 실험 값)

Fig. 8. Noise-to-signal power ratio with respect to the approximation bits, which is obtained by applying the approximated SDFT for the stage2 signal. ( $N : 256$ ,  $o$  : analytic value,  $x$  : simulated value)

그림 5에서 보이듯이 백색 가우스신호 경우는 신호의 통계적 특성 및 주파수 분포가 해석식 유도에 적용한 가정들과 일치하므로 오차 한계 내에서 해석 값과 실험 값이 일치함을 알 수 있다. 그림 7과 그림 8에서 보듯이 전력스펙트럼밀도(power spectral density)가  $1/f$ 의 특성을 가지고있는 EEG를 대상으로 한 시뮬레이션 결과도, 부분적으로 비트 수에 따른 성능열화가 관찰되기는 하지만 전체적으로 해석 값과 일치하는 것을 확인할 수 있다. 이와 같이 백색이 아닌 신호를 대상으로 하였을 때 주파수 특성에 따라 특정 비트에서 나타나는 성능열화는 관련 계수들의 근사위치를 재조정하여 개선할 수 있다.

### V. 결 론

본 논문에서는 실시간 주파수해석을 위해 적용하는 SDFT를 계수근사에 의해 고속구현하는 개념을 제시하고, 계수근사구현에 따른 오차의 영향을 해석적 형식으로 구하였다. 계수 근사에 따른 영향은 주파수 스펙트럼에서의 오차로 나타나며, 이의 전력과 입력신호

의 전력 비율(NSR)을 근사 비트 수에 관한 식으로 유도하였다. 오차의 전력은 입력신호가 비상관가우스신호일 경우로 가정하여 오차방정식으로부터 해석적으로 유도하였으며, 유도과정에서는 계수근사 오차를 공간적으로 분포하는 확률변수로 설정하였다. 유도한 해석식의 타당성을 검증하기 위하여 실제 사람으로부터 채집한 뇌파신호 및 가우스 랜덤신호를 대상으로 시뮬레이션을 수행하여 NSR을 비교한 결과, 전 영역의 비트 수에 걸쳐 일치함을 보여 NSR 해석식의 타당성을 확인하였다. 본 논문에서 제시한 NSR 해석식은 SDFT 근사구현에 따른 성능열화 지표로서 의미가 있으며, 실시간 주파수해석을 목적으로 SDFT를 범용 마이크로컨트롤러 환경에서 구현하거나 VLSI 칩으로 설계할 경우에 설계변수 결정 등의 지침으로서 유용하리라 기대한다.

### 참 고 문 헌

- [ 1 ] S. N. Nawab and T. F. Quateri, "Short-Time Fourier Transform," *Chapter in Advanced Topics in Signal Processing*, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1988.
- [ 2 ] L. R. Rabiner and B. Gold, *THEORY AND APPLICATION OF DIGITAL SIGNAL PROCESSING*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [ 3 ] B. F. Boroujeny and S. Gazer, "Generalized Sliding FFT and Its Application to Implementation of Block LMS Adaptive Filters," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, No. 3, pp. 532-538, March 1994.
- [ 4 ] R. Storn, "Some Results in Fixed Point Error Analysis of the Bruun\_FFT Algorithm," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, No. 7, pp. 2371-2375, July 1993.
- [ 5 ] J. M. Cioffi, "Limited-precision effects in adaptive filtering," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-34, pp. 821-833, July 1987.
- [ 6 ] K. S. Shanmugan, *RANDOM SIGNALS*, John Wiley & Sons, 1988.

[7] A. Rechtschaffen and A. Kales, "A manual of standardized terminology, technique and scoring system for sleep

stage of human subjects," *Public health Service, U.S. Government Printing Office, Washington D.C., 1968.*

저 자 소 개



金 載 和(正會員)

1974년 2월 18일생. 1996년 중앙대학교 제어계측공학과 졸업(공학사). 1998년 동 대학원 제어계측학과 졸업(공학석사). 현재 동 대학원 박사과정. 주관심분야는 디지털 신호처리, 통신 시스템, 오디오/비디오 코

딩 등임



張 泰 奎(正會員)

1955년 11월 13일생. 1979년 서울대학교 전기공학과 졸업(공학사). 1981년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학석사). 1981년~1982년 현대엔지니어링(주). 1982년~1984년 현대전자산업(주). 1987년 University of Florida 전기공학과 졸업(공학박사). 1987년~1990년 Tennessee State University, Assistant Professor. 1990년~현재 중앙대학교 전자전기공학부 교수. 주관심분야는 디지털 신호처리, 이동통신, 디지털 오디오 등임