

論文 99-36S-5-4

# 비선형 불확실성 시간지연 시스템의 퍼지 견실 $H^\infty$ 제어기 설계

## (Fuzzy Robust $H^\infty$ Controller Design of Nonlinear Uncertain Time Delay Systems)

金鍾海\*, 李炯昊\*\*, 朴烘培\*\*

(Jong Hae Kim, Hyung Ho Lee, and Hong Bae Park)

### 요 약

본 논문에서는 연속시간과 이산시간에서 파라미터 불확실성과 시간지연을 가지는 비선형시스템에 대한 퍼지 견실  $H^\infty$  제어기 설계방법을 제시한다. 비선형시스템은 변형한 T-S(Takagi-Sugeno) 퍼지모델을 사용하여 나타내고, 퍼지제어는 PDC(parallel distributed compensation) 개념을 이용한다. 또한 Lyapunov 접근방법을 이용하여 불확실성, 외란과 시간지연을 가지는 변형한 T-S 퍼지모델의  $H^\infty$  노움 한계를 가지는 자승적 안정성을 언급하고, LMI(linear matrix inequality) 기법을 이용하여 퍼지 견실  $H^\infty$  제어기의 존재 조건과 제어기 설계방법을 제시한다. 그러므로 제시한 기법은 구하여진 충분조건을 만족하는 해를 찾음과 동시에 제어기를 한번에 설계할 수 있다. 마지막으로 예제를 통하여 제시한 방법의 타당성을 확인한다.

### Abstract

In this paper, we present a design method of fuzzy robust  $H^\infty$  controller for a class of uncertain nonlinear systems with time delays in continuous time case and discrete time case, respectively. First, we represent a nonlinear plant with a modified T-S(Takagi-Sugeno) fuzzy model. Then a model-based fuzzy controller design method utilizing the concept of PDC(parallel distributed compensation) is employed. For the modified T-S fuzzy model, the sufficient condition of the quadratic stabilization with an  $H^\infty$  norm bound is presented in terms of the Lyapunov stability theory. Also the fuzzy robust  $H^\infty$  controller design method is given on the basis of LMI(linear matrix inequality) approach for this model. Therefore the LMI solution and the fuzzy robust  $H^\infty$  controller are obtained simultaneously. Finally, an illustrative numerical example is given to verify the results of the proposed method.

### I. 서 론

퍼지제어 기법을 산업현장에 적용하기 위한 많은 연

구들이 이루어지고 있다. 하지만 퍼지시스템에 대한 안정성 해석과 퍼지제어기 설계에 관한 체계적인 방법에 관한 연구결과는 그다지 많지 않다. 시스템의 안정성은 해석과 설계기법에 있어서 중요한 문제임에도 불구하고 퍼지시스템의 비선형성은 안정화에 제약이 된다. 최근에 Tanaka 등<sup>[1]</sup>은 퍼지시스템의 안정화조건을 제시하였고, Wang 등<sup>[2]</sup>은 T-S 모델에 의해 표현된 비선형 퍼지시스템을 안정화시키는 제어기를 PDC(parallel distributed compensation)와 LMI(linear matrix inequality)를 이용하여 설계하는 기법을 소개하였다. 또한 파라미터 불확실성을 가지는

\* 正會員, 慶北大學校 센서技術研究所  
(Sensor Technology Research Center, Kyungpook National University)

\*\* 正會員, 慶北大學校 電子電氣工學部  
(School of Electronic and Electrical Engineering, Kyungpook National University)

接受日字:1998年7月22日, 수정완료일:1999年4月23日

비선형시스템을 안정화하는 조건이 Tanaka 등<sup>[3]</sup>에 의하여 제시되었다. 일반적으로 물리적인 시스템은 시간지연을 가지고 있지만 모델링의 단순화를 위하여 고려하지 않는 경우가 많다. 그러나 이러한 시간지연이 시스템 내외부의 불확실성과 함께 전체 폐루프시스템의 안정성 및 성능에 중요한 영향을 끼친다. 즉, 실제 시스템에 대한 제어기 설계방법은 파라미터 불확실성, 외란, 비선형성, 시간지연항 등으로 인하여 어려움이 있다.

최근에 시간지연, 파라미터 불확실성 및 외란을 동시에 고려하는 견실  $H^\infty$  제어에 관한 논문들<sup>[4,5,6,7]</sup>이 발표되었다. 그러나 퍼지제어 이론에서는 시간지연을 다루는 논문이 없는 실정이다. 또한 파라미터 불확실성 시스템을 고려한 퍼지시스템에 대한 퍼지제어기 설계방법에서도 상태회환 제어기를 미리 설정하여 충분조건을 만족하는지 정도<sup>[2,3]</sup>이다. Tanaka<sup>[3]</sup> 등은 파라미터 불확실성은 고려하였으나 시간지연이나 외란 등은 고려하지 않았다. 그리고 제어기를 설계하는 방법에 대한 언급은 없고 미리 설정한 제어기가 시스템의 지능적 안정을 만족시키는지 확인한다. 또한 Wang<sup>[2]</sup> 등이 제시한 논문 역시 파라미터 불확실성, 시간지연, 외란 등을 고려하지 않고 제어기 설계방법에 대한 방법이 없다. 미리 설정한 제어기가 제시한 충분조건을 만족하는지 검사하는 과정을 거쳐야 한다. 이러한 방법들은 충분조건을 만족하지 않으면 만족할때까지 제어기를 다시 설정해야 한다는 어려움이 있다. 따라서 시간지연, 파라미터 불확실성 및 외란을 동시에 다루면서 퍼지시스템에 대한 체계적인 퍼지제어기를 해석하고 설계하는 방법이 필요하다. 또한 대부분의 시스템이 디지털 컴퓨터에 의해 제어되는데도 불구하고 비선형 이산시스템에 대한 해석과 제어기 설계방법이 없으므로 이산시간영역에서 비선형시스템에 대한 체계적인 퍼지제어기를 해석하고 설계하는 방법이 필요하다.

본 논문에서는 연속시간과 이산시간에서 LMI 기법을 이용하여 시간지연, 파라미터 불확실성 및 외란을 가지는 비선형시스템에 대한 퍼지 견실  $H^\infty$  제어기 설계방법을 제시한다. 기존의 모델에서 변형한 T-S 퍼지모델을 사용하고 PDC 개념<sup>[9]</sup>을 이용한다. 불확실성과 시간지연을 가지는 변형한 T-S 퍼지모델의 안정성은 Lyapunov 방법에 의하여 해석하고, 제어기 존재조건과 설계방법은 LMI 전개방법을 이용한다. 따라서

충분조건을 만족하는 해와 제어기를 동시에 구할 수 있다. 또한 예제를 통하여 제시한 설계 알고리즘의 타당성을 확인한다.

## II. 문제설정

본 논문에서는 Takagi-Sugeno<sup>[8]</sup>에 의해 제안된 퍼지모델을 변형하여 연속 및 이산 비선형 불확실성 시간지연 시스템을 근사화시킨다. 연속 비선형시스템에 대한 T-S 퍼지시스템은 이산 비선형시스템에도 유사하게 적용할 수 있으며 지역(local) 입출력 관계식으로 나타나는 IF-THEN 규칙들에 의해 표현된다. 시간지연 및 파라미터 불확실성을 갖는 변형한 T-S 퍼지모델로 표현되는 비선형시스템

플랜트 규칙  $i$  :

IF  $x_1(t)$  is  $M_{i1}$  and ... and  $x_n(t)$  is  $M_{in}$   
THEN

$$\begin{aligned} \delta x(t) = & \hat{A}_i x(t) + \hat{A}_{di} x(t - p_1) + \hat{B}_{ui} u(t) \\ & + \hat{B}_{di} u(t - p_2) + \hat{B}_{wi} w(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t) = & \hat{C}_i x(t) + \hat{C}_{di} x(t - p_1) + \hat{D}_{ui} u(t) \\ & + \hat{D}_{di} u(t - p_2) + \hat{D}_{wi} w(t), \end{aligned}$$

$$x(t) = 0, \quad t \leq 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

을 고려한다. 여기서 연속 퍼지시스템일 경우에는  $\delta x(t) = \dot{x}(t)$ 이고 이산 퍼지시스템일 때는  $\delta x(t) = x(t+1)$ 이다. 불확실성 행렬들은

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= A_i + \Delta A_i(t), & \hat{C}_i &= C_i + \Delta C_i(t), \\ \hat{A}_{di} &= A_{di} + \Delta A_{di}(t), & \hat{C}_{di} &= C_{di} + \Delta C_{di}(t), \\ \hat{B}_{ui} &= B_{ui} + \Delta B_{ui}(t), & \hat{D}_{ui} &= D_{ui} + \Delta D_{ui}(t), \\ \hat{B}_{di} &= B_{di} + \Delta B_{di}(t), & \hat{D}_{di} &= D_{di} + \Delta D_{di}(t), \\ \hat{B}_{wi} &= B_{wi} + \Delta B_{wi}(t), & \hat{D}_{wi} &= D_{wi} + \Delta D_{wi}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

이고,  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 는 상태,  $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 는 제어입력,  $w(t) \in \mathbf{R}^p$ 는 제곱 적분가능한(square integrable) 외란,  $z(t) \in \mathbf{R}^q$ 는 제어할 출력,  $r$ 은 IF-THEN 규칙의 개수,  $A_i, A_{di}, B_{ui}, B_{di}, B_{wi}, C_i, C_{di}, D_{ui}, D_{di}, D_{wi}$ 는 적절한 차원을 가지는 행렬을 나타낸다. 시간지연은

$$p_l = \begin{cases} 0 \leq d_l(t) < \infty, \quad \dot{d}_l(t) \leq \beta_l < 1, & l=1,2, \\ & \text{(연속시간)} \\ 0 \leq d_l < \infty, & l=1,2 \\ & \text{(이산시간)} \end{cases} \quad (3)$$

을 만족하고, 파라미터 불확실성은

$$\begin{bmatrix} \Delta A_i(t) & \Delta B_{ui}(t) & \Delta B_{wi}(t) & \Delta A_{di}(t) & \Delta B_{di}(t) \\ \Delta C_i(t) & \Delta D_{ui}(t) & \Delta D_{wi}(t) & \Delta C_{di}(t) & \Delta D_{di}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{xi} \\ H_{zi} \end{bmatrix} F_i(t) [E_{xi} \quad E_{ui} \quad E_{wi} \quad E_{dxi} \quad E_{dwi}] \quad (4)$$

와 같이 표현된다. 여기서  $H_{xi}, H_{zi}, E_{xi}, E_{ui}, E_{wi}, E_{dxi}, E_{dwi}$ 는 적절한 차원을 가지는 상수행렬이고  $F_i(t)$ 는

$$F_i(t) \in \Omega : \\ = \{ F_i(t) \mid F_i^T(t)F_i(t) \leq I, \\ F_i(t) \text{의 요소들은 Lebesgue 측정가능} \} \quad (5)$$

와 같이 크기가 제한된 미지의 행렬함수이다. 주어진  $(x(t), u(t))$ 에 대해 퍼지시스템의 최종출력은 T-S 퍼지모델의 추론방법에 의해

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= \frac{\sum_i w_i(x(t)) (\hat{A}_i x(t) + \hat{A}_{di} x(t-p_1) + \hat{B}_{ui} u(t) + \hat{B}_{di} u(t-p_2) + \hat{B}_{wi} w(t))}{\sum_i w_i(x(t))} \\ &= \sum_i h_i(x(t)) (\hat{A}_i x(t) + \hat{A}_{di} x(t-p_1) + \hat{B}_{ui} u(t) + \hat{B}_{di} u(t-p_2) + \hat{B}_{wi} w(t)), \\ z(t) &= \frac{\sum_i h_i(x(t)) (\hat{C}_i x(t) + \hat{C}_{di} x(t-p_1) + \hat{D}_{ui} u(t) + \hat{D}_{di} u(t-p_2) + \hat{D}_{wi} w(t))}{\sum_i h_i(x(t))} \end{aligned} \quad (6)$$

과 같이 표현된다. 여기서

$$\begin{aligned} w_i(x(t)) &= \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j(t)) \\ h_i(x(t)) &= \frac{w_i(x(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} \\ x(t) &= [x_1^T(t) \quad x_2^T(t) \quad \dots \quad x_n^T(t)]^T \end{aligned} \quad (7)$$

이고,  $M_{ij}(x_j(t))$ 는 퍼지집합  $M_{ij}$ 에서  $x_j(t)$ 의 소속정도이다. 음이 아닌 하중함수  $w_i(x(t))$ 는

$$\begin{aligned} w_i(x(t)) &\geq 0, \quad i=1,2,\dots,r \\ \sum_{i=1}^r w_i(x(t)) &> 0 \end{aligned} \quad (8)$$

을 만족한다고 가정하면 정규화된 하중함수  $h_i(x(t))$ 는

$$\begin{aligned} h_i(x(t)) &\geq 0, \quad i=1,2,\dots,r \\ \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$

를 만족한다. 변형한 T-S 퍼지모델 (1)에 대한 퍼지 견실  $H^\infty$  제어기를

제어 규칙  $i$ :

IF  $x_1(t)$  is  $M_{i1}$  and  $\dots$  and  $x_n(t)$  is  $M_{in}$  (10)  
THEN  $u(t) = K_i x(t), \quad i=1,2,\dots,r$

과 같이 나타내면 전체 퍼지 견실  $H^\infty$  제어기는

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) K_i x(t) \quad (11)$$

로 표현된다. 제어기 (11)을 변형한 T-S 퍼지시스템 (6)에 적용하면  $w(t)$ 에서  $z(t)$ 까지의 폐루프시스템은

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= \sum_i \sum_j h_i(x(t)) h_j(x(t)) \{ \hat{A}_{Kij} x(t) + \hat{A}_{di} x(t-p_1) \\ &\quad + \hat{B}_{di} K_j x(t-p_2) + \hat{B}_{wi} w(t) \}, \\ z(t) &= \sum_i \sum_j h_i(x(t)) h_j(x(t)) \{ \hat{C}_{Kij} x(t) + \hat{C}_{di} x(t-p_1) \\ &\quad + \hat{D}_{di} K_j x(t-p_2) + \hat{D}_{wi} w(t) \} \end{aligned} \quad (12)$$

이고, 여기서  $\hat{A}_{Kij} = \hat{A}_i + \hat{B}_{ui} K_j$ 이고  $\hat{C}_{Kij} = \hat{C}_i + \hat{D}_{ui} K_j$ 이다. Lyapunov 함수  $V(x(t))$ 를 고려할 경우, 연속시간에서는 Lyapunov 미분함수(이산시간에서는 Lyapunov 차분함수)가 시스템 (12)의  $w(t)=0$ 인 모든 궤적에 대해 조건

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} V(x(t)) < 0 & \text{(연속시간)} \\ V(x(t+1)) - V(x(t)) < 0 & \text{(이산시간)} \end{cases} \quad (13)$$

을 만족하면 시간지연을 가지는 불확실성 시스템 (12)는 자승적 안정이라고 정의한다. 조건 (13)이 만족되

면 페루프시스템 (12)의 평형점(equilibrium point)은 점근적으로 안정하다. 시스템 (12)의 초기값  $x(0)=0$  으로 생각하여 외란  $w(t)$ 에서  $z(t)$ 까지의  $L_2$  이득성능을

$$\begin{cases} \int_0^\infty \|z(t)\|_2^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \|w(t)\|_2^2 dt & (\text{연속시간}) \\ \sum_{i=0}^{\infty} \|z(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \|w(t)\|_2^2 & (\text{이산시간}) \end{cases} \quad (14)$$

로 정의하여 외란에 대한 제어할 출력신호의 확장된  $L_2$  이득을  $\gamma$ 보다 작게 하는  $L_2$  이득 성능문제를 생각한다.

본 논문에서는 시간지연과 불확실성을 가지는 퍼지 시스템 (6)에서 페루프시스템 (12)를 자승적 안정화할 뿐만 아니라  $L_2$  이득 성능을 만족시키는 상태회환 제어기  $K$ 를 설계하고자 한다.

**보조정리 1** <sup>[5,6]</sup> 시간지연 T-S 퍼지시스템

**Plant 규칙  $i$ :**

**IF**  $x_1(t)$  is  $M_{i1}$  and ... and  $x_n(t)$  is  $M_{in}$

**THEN** (15)

$$\begin{aligned} \delta x(t) = & A_{di}x(t) + A_{di}x(t-p_1) + B_{ui}u(t) \\ & + B_{di}u(t-p_2) + [B_{wi} \ \gamma \lambda H_{xi}] \begin{bmatrix} w(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i \\ \frac{1}{\lambda} E_{xi} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} C_{di} \\ \frac{1}{\lambda} E_{dxi} \end{bmatrix} x(t-p_1) + \begin{bmatrix} D_{ui} \\ \frac{1}{\lambda} E_{ui} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} D_{di} \\ \frac{1}{\lambda} E_{dwi} \end{bmatrix} u(t-p_2) + \begin{bmatrix} D_{wi} \ \gamma \lambda H_{zi} \\ \frac{1}{\lambda} E_{wzi} \ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$$

이 제어규칙 (10)과 (11)에 대하여 자승적 안정화와  $H^\infty$  노음 한계  $\gamma$ 를 유지한다는 것과 파라미터 불확실성과 시간지연을 가진 변형한 T-S 퍼지시스템 (1)이 동일한 제어규칙 (10)과 (11)에 대해  $H^\infty$  노음 한계  $\gamma$ 로 자승적 안정하다는 것은 필요충분관계에 있다. 여기서  $\hat{w}(t)$ 와  $\hat{z}(t)$ 는 각각 부가적인 외부입력과 제어할 출력을 나타낸다. ■

**보조정리 2** <sup>[10]</sup> 임의의 대칭행렬  $L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12}^T & L_{22} \end{bmatrix}$ 에

대하여

- 1)  $L < 0$
- 2)  $L_{11} < 0, L_{22} - L_{12}^T L_{11}^{-1} L_{12} < 0$
- 3)  $L_{22} < 0, L_{11} - L_{12} L_{22}^{-1} L_{12}^T < 0$

은 서로 등가이다. ■

**III. 퍼지 견실  $H^\infty$  제어기 설계**

본 절에서는 파라미터 불확실성과 시간지연을 가지는 변형한 T-S 퍼지시스템 (1)에 대한  $H^\infty$  노음 한계를 가지는 자승적 안정성에 대해 논의하고 퍼지 견실  $H^\infty$  제어기 설계 알고리즘을 제시한다. 보조정리 1로부터 수식전개의 간편성을 위해 T-S 퍼지시스템 (15)를

**플랜트 규칙  $i$ :**

**IF**  $x_1(t)$  is  $M_{i1}$  and ... and  $x_n(t)$  is  $M_{in}$

**THEN** (17)

$$\begin{aligned} \delta x(t) = & A_i x(t) + A_{di} x(t-p_1) + B_{ui} u(t) \\ & + B_{di} u(t-p_2) + \tilde{B}_{wi} \tilde{w}(t) \\ \hat{z}(t) = & \tilde{C}_i x(t) + \tilde{C}_{di} x(t-p_1) + \tilde{D}_{ui} u(t) \\ & + \tilde{D}_{di} u(t-p_2) + \tilde{D}_{wi} \tilde{w}(t), \\ & i = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

과 같이 정의한다. 여기서

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i = & [B_{ui} \ \gamma \lambda H_{xi}], \quad \tilde{C}_i = \begin{bmatrix} C_i \\ \frac{1}{\lambda} E_{xi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_{di} = \begin{bmatrix} C_{di} \\ \frac{1}{\lambda} E_{dxi} \end{bmatrix}, \\ \tilde{D}_i = & \begin{bmatrix} D_{ui} \ \gamma \lambda H_{zi} \\ \frac{1}{\lambda} E_{ui} \ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_{wi} = \begin{bmatrix} D_{ui} \\ \frac{1}{\lambda} E_{ui} \end{bmatrix}, \\ \tilde{D}_{di} = & \begin{bmatrix} D_{di} \\ \frac{1}{\lambda} E_{dwi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{w}(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{z}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

이다. 제어기 (10)을 변형한 T-S 퍼지시스템 (17)에 적용하면  $\tilde{w}(t)$ 에서  $\hat{z}(t)$ 까지의 페루프시스템은

$$\begin{aligned} \delta x(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \{ A_{Kij} x(t) + A_{di} x(t-p_1) \\ & + B_{di} K_j x(t-p_2) + \tilde{B}_{wi} \tilde{w}(t) \}, \\ \hat{z}(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \{ \tilde{C}_{Kij} x(t) + \tilde{C}_{di} x(t-p_1) \\ & + \tilde{D}_{di} K_j x(t-p_2) + \tilde{D}_{wi} \tilde{w}(t) \} \end{aligned} \quad (19)$$

이고  $A_{Kij} = A_i + B_{ui}K_j$ 이고  $\widetilde{C}_{Kij} = \widetilde{C}_i + \widetilde{D}_{ui}K_j$ 이다.

1. 연속시간 퍼지시스템

본 절에서는 연속시간 퍼지시스템인 경우에 대하여 자승적 안정성과  $H^\infty$  노음 한계에 대하여 해석하고 제어기가 존재할 충분조건을 선형행렬부등식으로 표현한다.

**보조정리 3** 주어진  $\gamma > 0$  에 대하여

$$\begin{bmatrix} A_{Kij}^T P + PA_{Kij} + R_1 + K_j^T R_2 K_j & PA_{di} & PB_{di} & \widetilde{C}_{Kij}^T \\ A_{di}^T P & -\widetilde{R}_1 & 0 & 0 \\ B_{di}^T P & 0 & -\widetilde{R}_2 & 0 \\ \widetilde{E}_{wi}^T P & 0 & 0 & -\gamma^2 I \\ \widetilde{C}_{Kij} & \widetilde{C}_{di} & \widetilde{D}_{di} & \widetilde{D}_{wi} \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

을 만족하는 양한정 행렬  $P, R_1, R_2$  가 존재하면 변형한 T-S 퍼지시스템 (19)는  $H^\infty$  노음 한계  $\gamma$  를 가지며 자승적 안정하다. 여기서  $\widetilde{R}_1 = (1 - \beta_1)R_1, \widetilde{R}_2 = (1 - \beta_2)R_2$ 이다.

**증명** 먼저 Lyapunov 함수를 모든  $i=1, 2, \dots, r$  에 대해

$$\begin{aligned} V(x(t)) &:= x^T(t)Px(t) \\ &+ \int_{t-d_1(t)}^t x^T(\tau)R_1x(\tau)d\tau \\ &+ \int_{t-d_2(t)}^t x^T(\tau)K_j^T R_2 K_j x(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (21)$$

과 같이 둔다. 이때 식 (20)은

$$\begin{bmatrix} A_{Kij}^T P + PA_{Kij} + R_1 + K_j^T R_2 K_j & PA_{di} & PB_{di} \\ A_{di}^T P & -\widetilde{R}_1 & 0 \\ B_{di}^T P & 0 & -\widetilde{R}_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

를 의미한다. Lyapunov 함수의 미분은

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)R_1x(t) \\ &+ x^T(t)K_j^T R_2 K_j x(t) \\ &- (1 - \dot{d}_1(t))x^T(t-d_1(t))R_1x(t-d_1(t)) \\ &- (1 - \dot{d}_2(t))x^T(t-d_2(t))K_j^T R_2 K_j x(t-d_2(t)) \\ &\leq \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)R_1x(t) \\ &+ x^T(t)K_j^T R_2 K_j x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- x^T(t-d_1(t))\widetilde{R}_1x(t-d_1(t)) \\ &- x^T(t-d_2(t))K_j^T \widetilde{R}_2 K_j x(t-d_2(t)) \\ &:= \dot{V}_a(x(t)). \end{aligned} \quad (23)$$

이다. 외란을 영이라고 가정했을 때 식 (23)은

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(x(t)) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d_1(t)) \\ K_j x(t-d_2(t)) \end{bmatrix}^T \\ &\times \begin{bmatrix} A_{Kij}^T P + PA_{Kij} + R_1 + K_j^T R_2 K_j & PA_{di} & PB_{di} \\ A_{di}^T P & -\widetilde{R}_1 & 0 \\ B_{di}^T P & 0 & -\widetilde{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d_1(t)) \\ K_j x(t-d_2(t)) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (24)$$

와 같이 나타낼수 있으며 식 (24)는 페루프시스템 (19)의 자승적 안정성을 보장한다. 다음으로 초기값이 영이라고 가정했을 때

$$J = \int_0^\infty [ \dot{z}^T(t)\dot{z}(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t) ] dt \quad (25)$$

와 같은 성능지수(performance index)를 정의한다. 그리고

$$J \leq \int_0^\infty [ \dot{z}^T(t)\dot{z}(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t) + \dot{V}_a(x(t)) ] dt \quad (26)$$

이므로 (23)을 (26)에 대입하여  $\zeta(t) = [x^T(t) \ x^T(t-d_1(t)) \ x^T(t-d_2(t))K_j^T \ \tilde{w}^T(t)]^T$  라고 두면

$$J \leq \int_0^\infty \zeta^T(t)Z_{ij}\zeta(t) dt \quad (27)$$

을 얻을 수 있다. 이때  $Z_{ij}$ 는

$$Z_{ij} = \begin{bmatrix} A_{Kij}^T P + PA_{Kij} + \widetilde{C}_{Kij}^T \widetilde{C}_{Kij} + R_1 + K_j^T R_2 K_j & PA_{di} + \widetilde{C}_{Kij}^T \widetilde{C}_{di} \\ * & \widetilde{C}_{di}^T \widetilde{C}_{di} - \widetilde{R}_1 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} PB_{di} + \widetilde{C}_{Kij}^T \widetilde{D}_{di} & P \widetilde{B}_{wi} + \widetilde{C}_{Kij}^T \widetilde{D}_{wi} \\ \widetilde{C}_{di}^T \widetilde{D}_{di} & \widetilde{C}_{di}^T \widetilde{D}_{wi} \\ \widetilde{D}_{di}^T \widetilde{D}_{di} - \widetilde{R}_2 & \widetilde{D}_{di}^T \widetilde{D}_{wi} \\ * & -\gamma^2 I + \widetilde{D}_{wi}^T \widetilde{D}_{wi} \end{bmatrix}$$

이고 \*는 대칭요소를 의미한다. 그러므로  $Z_{ij} < 0, t \geq 0$  일 때 변형한 T-S 연속 퍼지시스템 (19)는

$H^\infty$  노음의 한계를 가지며 자승적 안정하다. 보조정리 2의 Schur 여수(complement) 정리를 이용하면 (28)에서의  $Z_{ij} < 0$ 은 (20)으로 변환된다. ■

**정리 1** 파라미터 불확실성과 시간지연을 가진 변형한 T-S 퍼지시스템 (17)를 고려한다. 주어진  $\gamma$ 와  $\lambda$ 에 대하여

$$\begin{bmatrix} U_{1ij} & B_{wi} & \gamma\lambda H_{xi} & U_{2ij} & U_{3ij} & Y_j^T & Q \\ B_{wi}^T & -\gamma^2 I & 0 & D_{wi}^T & \frac{1}{\lambda} E_{wi}^T & 0 & 0 \\ \gamma\lambda H_{xi}^T & 0 & -\gamma^2 I & \gamma\lambda H_{zi}^T & 0 & 0 & 0 \\ U_{2ij}^T & D_{wi} & \gamma\lambda H_{zi} & U_{4i} & U_{5i} & 0 & 0 \\ U_{3ij}^T & \frac{1}{\lambda} E_{wi} & 0 & U_{5i}^T & U_{6i} & 0 & 0 \\ Y_j & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_2 & 0 \\ Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

을 만족하는 행렬  $Y_j$ , 공통 양한정 행렬(common positive definite matrix)  $Q$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ 가 존재하면 페루프시스템 (19)가  $H^\infty$  노음 한계  $\gamma$ 를 만족하며 자승적 안정하다. 여기서 각각의 항들은

$$\begin{aligned} U_{1ij} &= QA_i^T + A_i Q + Y_j^T B_{wi}^T + B_{wi} Y_j \\ &\quad + A_{di} \tilde{S}_1 A_{di}^T + B_{di} \tilde{S}_2 B_{di}^T \\ U_{2ij} &= Y_j^T D_{wi}^T + QC_i^T + A_{di} \tilde{S}_1 C_{di}^T + B_{di} \tilde{S}_2 D_{di}^T \\ U_{3ij} &= \frac{1}{\lambda} [ Y_j^T E_{wi}^T + QE_{xi}^T + A_{di} \tilde{S}_1 E_{dxi}^T + B_{di} \tilde{S}_2 E_{dxi}^T ], \\ U_{4i} &= -I + C_{di} \tilde{S}_1 C_{di}^T + D_{di} \tilde{S}_2 D_{di}^T \\ U_{5i} &= \frac{1}{\lambda} C_{di} \tilde{S}_1 E_{dxi}^T + \frac{1}{\lambda} D_{di} \tilde{S}_2 E_{dxi}^T \\ U_{6i} &= -I + \frac{1}{\lambda^2} E_{dxi} \tilde{S}_1 E_{dxi}^T + \frac{1}{\lambda^2} E_{dxi} \tilde{S}_2 E_{dxi}^T \\ \tilde{S}_1 &= (1 - \beta_1)^{-1} S_1, \quad \tilde{S}_2 = (1 - \beta_2)^{-1} S_2 \end{aligned} \quad (30)$$

이고 LMI 형태를 만들기 위한 변수들은

$$\begin{aligned} Y_j &= K_j P^{-1}, \quad j=1, 2, \dots, r, \\ Q &= P^{-1}, \\ S_1 &= R_1^{-1}, \\ S_2 &= R_2^{-1} \end{aligned} \quad (31)$$

으로 정의한다.

**증명** 부록 A 참고 ■

2. 이산시간 퍼지시스템

본 절에서는 이산시간 퍼지시스템인 경우에 대하여 자승적 안정성과  $H^\infty$  노음 한계에 대하여 해석하고 제어기가 존재할 충분조건을 선형행렬부등식으로 표현한다.

**보조정리 4** 주어진  $\gamma > 0$ 에 대하여

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A_{Kij} & A_{di} & B_{di} & \tilde{B}_{wi} & 0 \\ A_{Kij}^T & -P + R_1 + K_j^T R_2 K_j & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}_{Kij}^T \\ A_{di}^T & 0 & -R_1 & 0 & 0 & \tilde{C}_{di}^T \\ B_{di}^T & 0 & 0 & -R_2 & 0 & \tilde{D}_{di}^T \\ \tilde{B}_{wi}^T & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I & \tilde{D}_{wi}^T \\ 0 & \tilde{C}_{Kij} & \tilde{C}_{di} & \tilde{D}_{di} & \tilde{D}_{wi} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

를 만족하는 양한정 행렬  $P$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ 가 존재하면 변형한 T-S 퍼지시스템 (19)는  $H^\infty$  노음 한계  $\gamma$ 를 가지며 자승적 안정하다.

**증명** 먼저 Lyapunov 함수를 모든  $i=1, 2, \dots, r$ 에 대해

$$\begin{aligned} V(x(t)) &:= x^T(t)Px(t) + \sum_{k=t-d_1}^{t-1} x^T(k)R_1x(k) \\ &\quad + \sum_{k=t-d_2}^{t-1} x^T(k)K_j^T R_2 K_j x(k) \end{aligned} \quad (33)$$

와 같이 둔다. 이때 식 (32)는

$$\begin{bmatrix} A_{Kij}^T P A_{Kij} - P + R_1 + K_j^T R_2 K_j & A_{Kij}^T P A_{di} & A_{Kij}^T P B_{di} \\ A_{di}^T P A_{Kij} & -R_1 + A_{di}^T P A_{di} & A_{di}^T P B_{di} \\ B_{di}^T P A_{Kij} & B_{di}^T P A_{di} & -R_2 + B_{di}^T P B_{di} \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

을 의미한다. (33)의 차분을 구하면

$$\begin{aligned} \Delta V_i &= V(x(t+1)) - V(x(t)) \\ &= x^T(t+1)Px(t+1) - x^T(t)(P - R_1 - K_j^T R_2 K_j)x(t) \\ &\quad - x^T(t-d_1)R_1x(t-d_1) - x^T(t-d_2)K_j^T R_2 K_j x(t-d_2) \end{aligned} \quad (35)$$

이다. 외란을 영이라고 가정했을 때 식 (35)는

$$\Delta V_i = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d_1) \\ K_j x(t-d_2) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} A_{Kj}^T P A_{Kj} - P + R_1 + K_j^T R_2 K_j & A_{Kj}^T P A_{d_i} & A_{Kj}^T P B_{d_i} \\ A_{d_i}^T P A_{Kj} & -R_1 + A_{d_i}^T P A_{d_i} & A_{d_i}^T P B_{d_i} \\ B_{d_i}^T P A_{Kj} & B_{d_i}^T P A_{d_i} & -R_2 + B_{d_i}^T P B_{d_i} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d_1) \\ K_j x(t-d_2) \end{bmatrix} < 0 \quad (36)$$

과 같이 나타낼 수 있으며 식 (36)은 퍼지시스템 (19)의 자승적 안정성을 보장한다. 다음으로 초기값이 영이라고 가정했을 때

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} [ \hat{z}^T(t) \hat{z}(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) ] \quad (37)$$

과 같은 성능지수를 정의한다. 그리고

$$J \leq \sum_{t=0}^{\infty} [ \hat{z}^T(t) \hat{z}(t) - \gamma^2 \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) + \Delta V_i ] \quad (38)$$

이므로 (35)를 (38)에 대입하여  $\zeta(t) = [x^T(t) \ x^T(t-d_1) \ x^T(t-d_2) K_j^T \ \tilde{w}^T(t)]^T$  라고 두면

$$J \leq \sum_{t=0}^{\infty} \zeta^T(t) Z_{ij} \zeta(t) \quad (39)$$

을 얻을 수 있고,  $Z_{ij}$ 는

$$Z_{ij} = \begin{bmatrix} A_{Kj}^T P A_{Kj} - P + R_1 + K_j^T R_2 K_j + \bar{C}_{Kj}^T \bar{C}_{Kj} & A_{Kj}^T P A_{d_i} + \bar{C}_{Kj}^T \bar{C}_{d_i} \\ * & A_{d_i}^T P A_{d_i} + \bar{C}_{d_i}^T \bar{C}_{d_i} - R_1 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} A_{Kj}^T P B_{d_i} + \bar{C}_{Kj}^T \bar{D}_{d_i} & A_{Kj}^T P \bar{B}_{d_i} + \bar{C}_{Kj}^T \bar{D}_{d_i} \\ A_{d_i}^T P B_{d_i} + \bar{C}_{d_i}^T \bar{D}_{d_i} & A_{d_i}^T P \bar{B}_{d_i} + \bar{C}_{d_i}^T \bar{D}_{d_i} \\ B_{d_i}^T P B_{d_i} + \bar{D}_{d_i}^T \bar{D}_{d_i} - R_2 & B_{d_i}^T P \bar{B}_{d_i} + \bar{D}_{d_i}^T \bar{D}_{d_i} \\ * & \bar{B}_{d_i}^T P \bar{B}_{d_i} + \bar{D}_{d_i}^T \bar{D}_{d_i} - \gamma^2 I \end{bmatrix}$$

과 같이 정의되고, 여기서 \*는 대칭요소를 의미한다. 그러므로  $Z_{ij} < 0$ ,  $t \geq 0$  일 때 변형한 T-S 이산 퍼지 시스템 (19)는  $H^\infty$  노음의 한계를 가지는 자승적 안정이다. Schur 여수 정리를 이용하면 (40)에서의  $Z_{ij} < 0$  은 (32)로 변환된다. ■

**정리 2** 파라미터 불확실성과 시간지연을 가진 변형된

T-S 이산 퍼지시스템 (15)를 고려한다. 주어진  $\gamma$ 와  $\lambda$ 에 대하여

$$\begin{bmatrix} U_{1i} & U_{2ij} & B_{wi} & \gamma \lambda H_{xi} & U_{3i} & U_{4i} & 0 & 0 \\ U_{2ij}^T & -Q & 0 & 0 & U_{5ij}^T & U_{6ij}^T & Y_j^T & Q \\ B_{wi}^T & 0 & -\gamma^2 I & 0 & D_{wi}^T & \frac{1}{\lambda} E_{wi}^T & 0 & 0 \\ \gamma \lambda H_{xi}^T & 0 & 0 & -\gamma^2 I & \gamma \lambda H_{zi}^T & 0 & 0 & 0 \\ U_{3i}^T & U_{5ij}^T & D_{wi} & \gamma \lambda H_{zi} & U_{7i} & U_{8i} & 0 & 0 \\ U_{4i}^T & U_{6ij}^T & \frac{1}{\lambda} E_{wi} & 0 & U_{8i}^T & U_{9i} & 0 & 0 \\ 0 & Y_j & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_2 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (41)$$

과 시간지연 (3)을 만족하는 행렬  $Y_j$ , 공통 양한정 행렬  $Q$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ 가 존재하면 페루프시스템 (19)는  $H^\infty$  노음 한계  $\gamma$ 를 만족하며 자승적 안정하다. 여기서 각각의 항들은

$$\begin{aligned} U_{1i} &= -Q + A_{d_i} S_1 A_{d_i}^T + B_{d_i} S_2 B_{d_i}^T, \\ U_{2ij} &= A_i Q + B_{wi} Y_j, \\ U_{3i} &= A_{d_i} S_1 C_{d_i}^T + B_{d_i} S_2 D_{d_i}^T, \\ U_{4i} &= \frac{1}{\lambda} A_{d_i} S_1 E_{d_i}^T + \frac{1}{\lambda} B_{d_i} S_2 E_{d_i}^T, \\ U_{5ij} &= C_i Q + D_{wi} Y_j, \\ U_{6ij} &= \frac{1}{\lambda} E_{wi} Q + \frac{1}{\lambda} E_{wi} Y_j, \\ U_{7i} &= -I + C_{d_i} S_1 C_{d_i}^T + D_{d_i} S_2 D_{d_i}^T, \\ U_{8i} &= \frac{1}{\lambda} C_{d_i} S_1 E_{d_i}^T + \frac{1}{\lambda} D_{d_i} S_2 E_{d_i}^T, \\ U_{9i} &= -I + \frac{1}{\lambda^2} E_{d_i} S_1 E_{d_i}^T + \frac{1}{\lambda^2} E_{d_i} S_2 E_{d_i}^T \end{aligned} \quad (42)$$

이다. 그리고 LMI 형태를 만들기 위한 변수들은

$$\begin{aligned} Y_j &= K_j P^{-1}, \quad j=1, 2, \dots, r, \\ Q &= P^{-1}, \\ S_1 &= R_1^{-1}, \\ S_2 &= R_2^{-1} \end{aligned} \quad (43)$$

로 정의한다.

**증명** 보조정리 2와 변수치환 (43)을 이용하면 된다. ■

**참조 1.** 연속시간과 이산시간에서 자승적 안정성과

페루프시스템의  $y$ 한계를 만족하는 제어가 존재할 충분조건인 (29)와 (41)은 구하려는 변수  $Q, S_1, S_2, Y_j$ 에 대하여 LMI 형태이다. 따라서 LMI toolbox<sup>[11]</sup>를 이용하면 구하려는  $Q, S_1, S_2, Y_j$ 를 동시에 구할 수 있다. 따라서 제어기  $K_j$ 는  $Q, S_1, S_2, Y_j$ 를 찾은 후에 (31)과 (43)의 관계로부터 한번에 얻을 수 있다.

#### IV. 예 제

본 논문에서는 참고문헌 [3]에 있는 비선형 질량-스프링-댐퍼 시스템을 제안한 방법의 타당성을 보이기 위하여 적절히 변형한다. 예제는 연속시간인 경우에 대하여 제시한다. 시스템의 운동방정식은

$$M(\ddot{y}(t)) + g(\dot{y}(t)) + f(y(t)) = \phi(t)u(t) + \phi_d(t)u(t-d_2(t)) + \phi_w(t)u(t) \quad (40)$$

으로 주어진다 할 때, 여기서  $g(\dot{y}(t)), f(y(t)), \phi(t), \phi_d(t), \phi_w(t)$ 는 각각 댐퍼, 스프링, 입력, 지연된 입력, 외란에 대한 비선형성이다. 상태가 움직이는 구간은

$$y \in [-2, 2], \quad \dot{y} \in [-2, 2] \quad (41)$$

이고 각 항들을

$$\begin{aligned} g(\dot{y}(t)) &= c_1(t)\dot{y}(t) + c_2(t)\dot{y}(t-d_1(t)) + c_3(t)\dot{y}^3(t), \\ f(y(t)) &= c_4(t)y(t), \\ \phi(t) &= c_5(t), \\ \phi_d(t) &= c_6(t), \\ \phi_w(t) &= 0.1 \end{aligned} \quad (42)$$

로 정의한다. 여기서 파라미터  $c_1(t), c_2(t), c_3(t), c_4(t), c_5(t), c_6(t)$ 는

$$\begin{aligned} c_1(t) &\in [0.9, 1.7], & c_2(t) &\in [0.16, 0.24], \\ c_3(t) &\in [-0.1, 0.3], & c_4(t) &\in [0.54, 0.66], \\ c_5(t) &\in [0.275, 0.325], & c_6(t) &\in [0.02, 0.04]. \end{aligned} \quad (43)$$

처럼 불확실성을 포함하는 구간이다. 운동방정식 (40)

은

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= -c_1(t)\dot{y}(t) - c_2(t)\dot{y}(t-d_1(t)) \\ &\quad - c_3(t)\dot{y}^3(t) - c_4(t)y(t) \\ &\quad + c_5(t)u(t) + c_6(t)u(t-d_2(t)) + 0.1u(t) \end{aligned} \quad (44)$$

로 변형되고,  $c_3(t)$ 에서의 비선형항  $-0.1\dot{y}^3$ 은 주어진 영역 (41)내에서

$$\begin{cases} -0.4\dot{y} \leq -0.1\dot{y}^3 \leq 0 \cdot \dot{y}, & \dot{y} \geq 0 \\ 0 \cdot \dot{y} \leq -0.1\dot{y}^3 \leq -0.4\dot{y}, & \dot{y} < 0 \end{cases} \quad (45)$$

와 같이 상한치(upper bound)와 하한치(lower bound)에 의해 나타내며 그림 1에서 보인다.

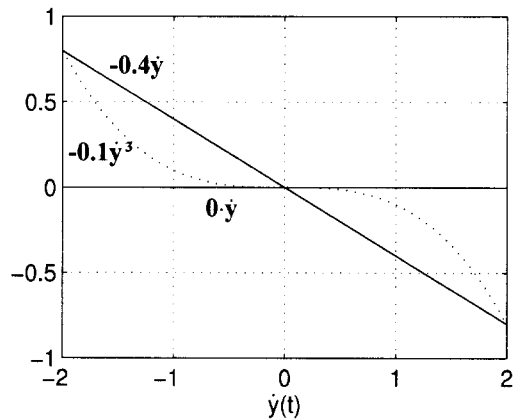


그림 1. 연속 시스템의 비선형항과 영역  
Fig. 1. Nonlinear term and its sector.

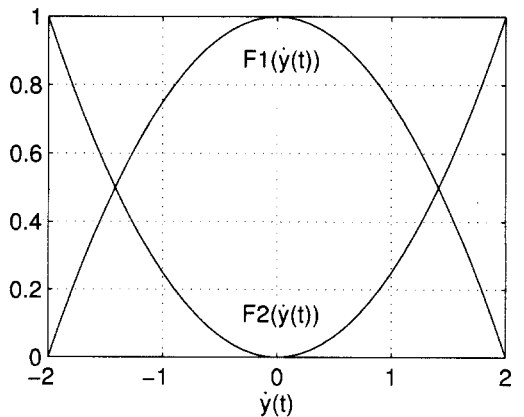


그림 2. 퍼지집합  
Fig. 2. Fuzzy sets.



따라서 비선형항은

$$-0.1\dot{y}^3 = F_1 \cdot 0 \cdot \dot{y} - (1 - F_1) \cdot 0.4\dot{y} \quad (46)$$

과 같은 볼록함수(convex function)로 나타내고 여기서  $F_1 \in [0, 1]$ 을 만족한다. (46)으로부터 퍼지집합은

$$\begin{aligned} F_1(\dot{y}(t)) &= 1 - 0.25\dot{y}^2(t) \\ F_2(\dot{y}(t)) &= 1 - F_1(\dot{y}(t)) = 0.25\dot{y}^2(t) \end{aligned} \quad (47)$$

과 같이 얻을 수 있고 그림 2에서 보인다. 퍼지집합  $F_1$ 과  $F_2$ 를 이용하면 연속시간 비선형시스템 (44)는

**플랜트 규칙 1:**

**IF**  $\dot{y}(t)$  is  $F_1$

**THEN**

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A_1 + \Delta A_1]x(t) + [A_{d1} + \Delta A_{d1}]x(t - d_1(t)) \\ &\quad + [B_{u1} + \Delta B_{u1}]u(t) \\ &\quad + [B_{d1} + \Delta B_{d1}]u(t - d_2(t)) + B_{w1}w(t), \end{aligned} \quad (48)$$

$$z(t) = C_1x(t) + D_{u1}u(t),$$

**플랜트 규칙 2:**

**IF**  $\dot{y}(t)$  is  $F_2$

**THEN**

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A_2 + \Delta A_2]x(t) + [A_{d2} + \Delta A_{d2}]x(t - d_1(t)) \\ &\quad + [B_{u2} + \Delta B_{u2}]u(t) \\ &\quad + [B_{d2} + \Delta B_{d2}]u(t - d_2(t)) + B_{w2}w(t), \end{aligned}$$

$$z(t) = C_2x(t) + D_{u2}u(t),$$

과 같은 변형한 T-S 퍼지모델로 표현할 수 있다. 여기서  $x = [\dot{y}^T \ y^T]^T$ 이고 상태공간 행렬 및 파라미터 불확실성 행렬들은

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -1.4 & -0.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -1.7 & -0.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{d1} &= A_{d2} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{u1} &= B_{u2} = [0.3 \ 0]^T, \\ B_{d1} &= B_{d2} = [0.03 \ 0]^T, \\ B_{w1} &= B_{w2} = 0.1, \end{aligned} \quad (49)$$

$$C_1 = C_2 = [1 \ 0],$$

$$D_{u1} = D_{u2} = 1,$$

$$H_{x1} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.4 & 0.25 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_{x2} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.2 & 0.4 & 0.25 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{x1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{u1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{dx1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{du1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$E_{x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{u2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{dx2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{du2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\gamma = \lambda = 1$$

로 주어진다. (29)를 만족하는 해들은

$$Q = \begin{bmatrix} 0.8303 & -0.3076 \\ -0.3076 & 1.3475 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 4.6034 & -0.7411 \\ -0.7411 & 11.4382 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = 7.7658, \quad (50)$$

$$M_1 = [-0.9777 \ 0.2700],$$

$$M_2 = [-0.9777 \ 0.2700]$$

으로 구해지고, 따라서 제어기는

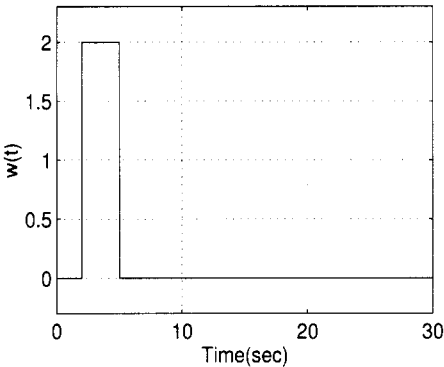
$$K_1 = [-1.2051 \ -0.0747], \quad (51)$$

$$K_2 = [-1.2051 \ -0.0747]$$

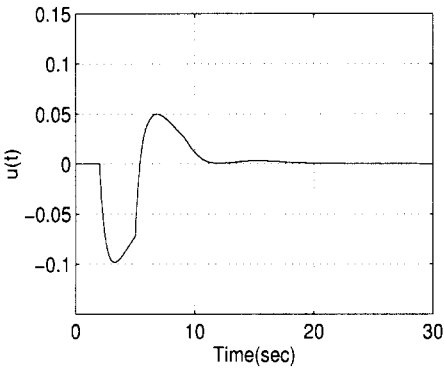
과 같다. 구한 제어기는 페루프시스템의  $H^\infty$  노음 한계를 만족하며 시변 시간지연과 파라미터 불확실성에 대하여 시스템을 자승적으로 안정화시킨다. 각각의 파라미터들을

$$\begin{aligned}
 c_1(t) &= 1.4 + 0.3 \cos(y(t)), \\
 c_2(t) &= 0.2 + 0.04 \sin(y(t)), \\
 c_3(t) &= 0.1 + 0.2 \sin(\dot{y}(t)), \\
 c_4(t) &= 0.6 + 0.06 \sin(y(t)), \\
 c_5(t) &= 0.3 + 0.025 \sin(y(t)), \\
 c_6(t) &= 0.03 + 0.01 \sin(y(t))
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

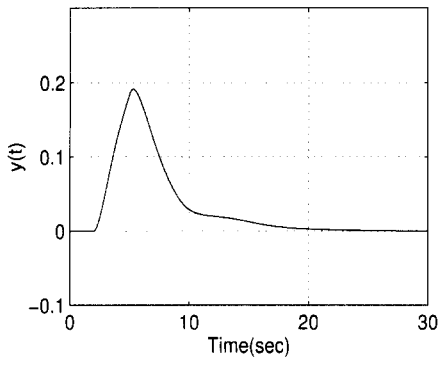
로 두고, 그림 5의 (a)와 같은 외란을 주었을 때 (b)~(e)는 각각 제어입력과 상태들, 제어할 출력의 궤적을 나타낸다.



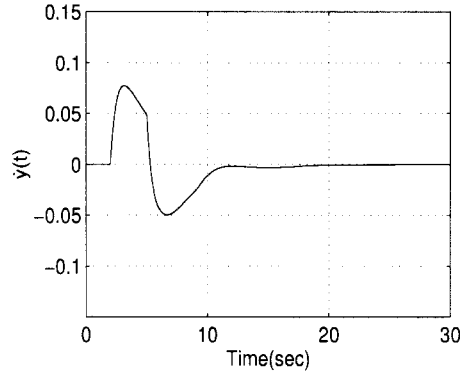
(a)  $w(t)$



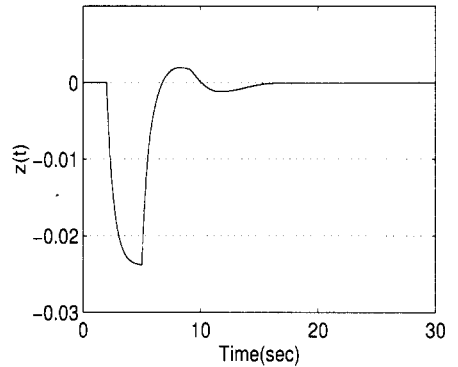
(b)  $u(t)$



(c)  $y(t)$



(d)  $\dot{y}(t)$



(e)  $z(t)$

그림 3. 외란, 제어입력, 상태들, 제어할 출력의 궤적  
Fig. 3. The trajectories of exogenous input, control input, states, controlled output.

그림 3의 (c)와 (d)에서 상태들이 시간이 지남에 따라 영에 수렴하는 것을 통하여 구한 제어기가 비선형 시스템을 안정화시킴을 알 수 있다. 그림 3의 (a)와 (e)로부터  $H^\infty$  노음이 미리 설정한 1보다 작음을 알 수 있다. 따라서 제시한 제어기 설계기법은 외란, 시간 지연과 불확실성을 가지는 연속 비선형시스템을  $H^\infty$  노음 한계를 가지면서 자승적 안정화시킴을 알 수 있다.

### V. 결 론

본 논문에서는 파라미터 불확실성과 시변 시간지연을 가지는 연속시간 비선형시스템과 파라미터 불확실성과 시불변 시간지연을 가지는 이산시간 비선형시스템에 대한 퍼지 견실  $H^\infty$  제어기의 존재조건과 제어기 설계방법을 제시하였다. PDC 개념과 LMI 접근방법을 이용하므로써 상태궤환 제어기를 미리 설정하여

충분조건을 만족하는지 검사하는 기존방법의 단점을 해결하였다. 그러므로 제시한 기법은 구하여진 충분조건을 만족하는 해를 찾음과 동시에 제어기를 한번에 설계할 수 있다는 장점이 있다. 수치예제를 통하여 구한 퍼지 견실  $H^\infty$  상태제환 제어기가 자승적 안정성과  $H^\infty$  노음 한계를 만족함을 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 45, no. 2, pp. 135-165, 1992.

[2] H. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 14-23, 1996.

[3] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: Quadratic stabilizability,  $H^\infty$  control theory, and linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 1-13, 1996.

[4] J. H. Kim, E. T. Jeung, and H. B. Park, "Robust control for parameter uncertain delay systems in state and control input," *Automatica*, vol. 32, no. 9, pp. 1337-1339, 1996.

[5] K. Gu, " $H^\infty$  control of systems under norm bounded uncertainties in all system matrices," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1320-1322, 1994.

[6] L. Yuan, L. E. K. Achenie, and W. Jiang, "Robust  $H^\infty$  control for linear discrete-time systems with norm-bounded time-varying uncertainty," *Systems & Control Letters*, vol. 27, pp. 199-208.

[7] E. T. Jeung, J. H. Kim, and H. B. Park, " $H^\infty$  output feedback controller design for linear systems with time-varying delayed state," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 42, no. 7, pp. 971-974, 1998.

[8] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern.*, vol. 15, no. 1, p. 116-132, 1985.

[9] H. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin, "Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi and Sugeno's fuzzy model", in *Proc. 4th IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, Yokohama, Japan, pp. 531-538, 1995.

[10] S. Boyd *et al.*, *Linear matrix inequalities in systems and control theory*, SIAM, 1994.

[11] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB*, The Math Works Inc., 1995.

[12] K. Tanaka and M. Sano, "A robust stabilization problem of fuzzy controller systems and its application to backing up control of a truck-trailer," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 2, no. 2, pp. 119-134, 1994.

[13] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Fuzzy control system design via LMIs," *American Control Conference in Albuquerque, New Mexico*, vol. 5, pp. 2873-2877, 1997.

부 록 A

식 (20)은 보조정리 2로부터 아래와 같이 변형된다.

$$\begin{bmatrix} A_{Kiv}^T P + PA_{Kiv} + R_1 & PA_{di} & PB_{di} & \widetilde{P} \widetilde{B}_{in} & \widetilde{C}_{Kiv}^T & K_i^T \\ * & -\widetilde{R}_1 & 0 & 0 & \widetilde{C}_{di}^T & 0 \\ * & * & -\widetilde{R}_2 & 0 & \widetilde{D}_{di}^T & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & \widetilde{D}_{in}^T & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & -R_2^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (A.1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{Kiv}^T P + PA_{Kiv} & PA_{di} & PB_{di} & \widetilde{P} \widetilde{B}_{in} & \widetilde{C}_{Kiv}^T & K_i^T & I \\ * & -\widetilde{R}_1 & 0 & 0 & \widetilde{C}_{di}^T & 0 & 0 \\ * & * & -\widetilde{R}_2 & 0 & \widetilde{D}_{di}^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & \widetilde{D}_{in}^T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -R_2^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -R_1^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (A.2)$$

