응용통계연구 제 12권 2호, 1999년, pp. 621-631

# 역정규분포에 대한 피로수명시험의 최적설계*

최규명[1) ] 이낙영[2)]

요 약

재료의 피로 파괴과정은 균열의 발생과 전파 및 성장의 과정을 거쳐 마침내 결정적 균열의 크기가 일정한도를 넘어서면 재료의 파괴가 일어난다. 이 때까지의 시간, 즉 피로수명이 역정규분포를 따를 때 재료의 수명과 스트레스 수준과의 관계를 나타 내는 S-N 곡선에 대한 대수선형모형(log-linear model)을 제시하고, 이 모형하에서 피로수명시험에 대한 통계적 최적시험설계방법을 찾는다. 통계적 최적여부에 대한 판단기준으로 설계 스트레스 수준하의 특정 싯점에서의 신뢰도에 대한 최우추정량의 점근분산을 최소화하는 방법을 사용하였다.

## 1. 서론

재료의 피로 현상이란 그 재료가 반복적인 응력(cyclic stress)을 받은 결과로 생기는 손상이다. 이러한 재료의 피로 파괴과정은 균열의 발생(crack initiation)과 전파 (propagation) 및 성장(growth)의 과정을 거쳐 마침내 결정적 균열의 크기(size of dominant crack)가 일정 한도를 넘어서면 재료의 파괴가 일어난다. 이 때까지의 시간을 피로수명(fatigue life)이라 부른다.

피로수명 예측을 위하여 재료에 가해지는 스트레스와 피로수명 또는 강도 감소량 간의 관계를 분석하는 실험실내 시험을 피로수명시험(fatigue life tests)이라 한다. 피로수명시험에 대한 공학적 실험 및 연구는 기계, 항공, 재료공학 등의 관련분야에서 역사적으로 매우 오래 동안 연구되어 왔지만[ASTM(1981)], 피로수명시험에 대한 통계적 연구는 1960년대 후반부터 시작되었으며, 재료의 피로수명분포로써 실험적으로 뒷받침된 Birnbaum-Saunders분포와 역정규분포가 주로 사용되었다.[Bhattacharyya 와 Fries(1982), Rieck 와 Nelderman (1991)] 특히 재료의 피로파괴과정에서 결정적 균열의 크기가 일정 한도를 넘어서는 순간을 고장시간 또는 피로수명으로 정의할 수 있는데, 재료의 누적 손상이나 균열의 크기가 위너과정(Wiener process)을 따를 경우 피로수명은 역정규분포를 따르게 된다.[Doksum 와 Hoyland(1992)] 이러한 점에서 역정규분포는 재료의 피로 파괴과정이 갖는 물리적 현상을 잘 나타내고 있기 때문에 피로현상 분석에 적합한 분포라고 알려져 있다.[Chhikara 와 Folks(1974, 1989)]

본 논문에서는 시험재료에 일정한 크기 이상의 균열이 하나라도 탐지되면 고장이 발생된 것으로 정의하고, 재료의 수명이 역정규분포를 따르며, 대수수명과 대수스트레스 수준이 선형관계라는 가정 아래에서, 재료의 수명(number of cycles to failure)과 스트레스 수

* 이 논문은 1997년도 한국학술진흥재단 지방대육성연구비에 의해 연구되었음.
1) (305-600) 대전시 유성우체국 사서함 35-1, 국방과학연구소, 선임연구원
2) (305-764) 대전시 유성구 궁동 220, 충남대학교 통계학과, 교수

준 S와의 관계를 나타낸 S-N 곡선에 대한 역정규 대수선형모형(inverse Gaussian log-linear model)을 제시한다. 그리고 역정규 대수선형모형을 이용한 가속 피로수명시험을 특정 싯점에서의 신뢰도에 대한 최우추정량의 점근분산을 최소화하는 시험계획 설계방법을 찾고자 한다. 본 논문의 2절에서는 피로수명시험에 관한 대수선형모형을 제시하고, 3절에서는 제시된 모형하의 수명시험에 대한 통계적 최적설계방법을 다루고, 4절에서는 최적설계에 관한 예제를 다루며, 5절은 결론부분을 다룬다.

## 2. 피로수명시험모형

본 절에서는 재료의 수명이 역정규분포(inverse Gaussian distribution)를 따를 때 피로수명시험에 대한 역정규 대수선형모형을 제시하고 모수의 추정량에 대한 정보행렬과 주어진 시험계획에 대한 점근분산을 구하는 과정을 다룬다. 피로수명시험 설계를 위한 역정규 대수선형모형의 가정은 다음과 같다.

**1.** 주기적 스트레스를 받고 있는 제품의 고장까지의 피로수명(반복회수) $T$는 역정규분포 $IG(\mu, \lambda)$를 따르며 확률밀도함수는 다음식과 같다.

$$f(t) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{\lambda(t-\mu)^2}{2\mu^2 t}\right\}.$$

여기서 $t > 0$이며 $\mu > 0$는 평균, $\lambda > 0$는 척도모수이고 이 분포의 분산은 $\mu^3/\lambda$이다.

**2.** 역정규분포의 평균 $\mu$와 스트레스 $x$간에는 다음의 관계식이 성립한다.

$$\mu(x) = e^{\gamma_0+\gamma_1 x}, \ r_0 > 0, \ r_1 \leq 0. \tag{2.1}$$

식 (2.1)은 S-N 곡선에서 스트레스 수준과 재료의 평균수명간의 관계식이다.

**3.** 역정규분포의 척도모수 $\lambda$는 스트레스와 무관하게 일정하다.

**4.** 시험은 미리 결정된 관측중단시간 $t_c$에 종료한다.

재료의 고장까지의 피로수명이 역정규분포 $IG(\mu, \lambda)$를 따를 때 대수피로수명 $Y(= \ln T)$의 확률밀도함수는 다음과 같다. [Chhikara 와 Folks(1989)]

$$g(y) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{e^y}{\mu^2} - \frac{2}{\mu} + e^{-y}\right)\right\}.$$

또한 대수피로수명 $y(= \ln t)$에 대한 신뢰함수는

$$R(y) = \Phi\left[\sqrt{\frac{\lambda}{e^y}}\left(1 - \frac{e^y}{\mu}\right)\right] - e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi\left[-\sqrt{\frac{\lambda}{e^y}}\left(1 + \frac{e^y}{\mu}\right)\right]$$

가 된다. 여기서 $\Phi(\cdot)$는 표준정규분포의 누적분포함수이다. 이제 지시함수 $I$를

$$I(y) = \begin{cases} 1, & y \le y_c \\ 0, & \text{그밖에} \end{cases}$$

으로 정의하면 스트레스 수준 $x$에서 하나의 관찰치에 대한 대수우도함수 $\mathcal{L}$은 다음과 같이 표시된다.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I(y)\cdot\left\{\ln\lambda - y - \lambda\left(\frac{e^y}{\mu^2} - \frac{2}{\mu} + e^{-y}\right)\right\} + (1 - I(y))\ln(R(y_c)).$$

편의상 스트레스를 나타내는 변수 $x$를 다음과 같이 표준화한다.

$$\xi = \frac{x - x_D}{x_H - x_D},\ 0 \le \xi \le 1. \tag{2.2}$$

여기서 $x_H$는 높은 스트레스 수준이며 $x_D$는 설계 스트레스 수준이다. 식 (2.2)로부터 높은 스트레스 수준 즉, $x = x_H$일 때 $\xi = 1$이며 설계 스트레스 수준 즉, $x = x_D$일 때 $\xi = 0$이다. 역정규분포의 평균과 스트레스와의 관계식 (2.1)을 $\xi$를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\mu(\xi) = e^{\beta_0 + \beta_1\xi}.$$

여기서 $\beta_0 = \gamma_0 + \gamma_1 x_D$, $\beta_1 = \gamma_1(x_H - x_D)$, $\beta_0 > 0$, $\beta_1 \le 0$이다.

계산의 편의를 위하여 $A$, $B$와 $\mu$를 다음과 같이 정의하자.

$$A = \sqrt{\frac{\lambda}{e^{y_c}}}\left(1 - \frac{e^{y_c}}{\mu}\right),\ B = -\sqrt{\frac{\lambda}{e^{y_c}}}\left(1 + \frac{e^{y_c}}{\mu}\right),\ \mu = \mu(\xi) = e^{\beta_0 + \beta_1\xi}.$$

이제 대수선형모형의 모수는 $\beta_0$, $\beta_1$, $\lambda$이며, 이에 대한 Fisher 정보행렬을 구하기 위하여 스트레스 수준 $\xi$에서 하나의 관찰치에 대한 대수우도함수의 1차 편미분식을 구하면 부록의 식 (A.1)과 같다. 또한 대수우도함수의 2차 편미분식은 부록의 식 (A.2)와 같고, 각각의 2차 편미분식에 대한 음의 기대값을 취하면 부록의 식 (A.3)과 같으며, 이 것들이 정보행렬의 각 구성요소가 된다. 참고로 식 (A.3)의 결과는 1차 편미분식의 기대값은 0이라는 사실과 다음의 사실을 이용하여 유도된 것이다.

$$\begin{aligned} E(I(y)) &= 1 - R(y_c) \\ E\left(I(y)e^y\right) &= \mu\left\{1 - \Phi(A) - e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B)\right\}. \end{aligned}$$

따라서 스트레스 수준 $\xi$에서 하나의 관찰치에 대한 Fisher 정보행렬은 다음과 같다.

$$F(\xi) = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \xi\Psi_1 & \Psi_2 \\ \xi\Psi_1 & \xi^2\Psi_1 & \xi\Psi_2 \\ \Psi_2 & \xi\Psi_2 & \Psi_3 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

여기서

$$\Psi_1 = E\left(-\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta_0^2}\right),\ \Psi_2 = E\left(-\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta_0\partial\lambda}\right),\ \Psi_3 = E\left(-\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\lambda^2}\right)$$

이다. 식 (2.3)을 이용하여 $n$개의 관찰치에 대한 정보행렬은 다음 식에 의하여 구할 수 있다.

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i(\xi = \xi_i).$$

여기서 $F_i(\xi = \xi_i)$는 i번째 시편에 가해지는 스트레스 수준을 $\xi_i$라고 할 때 그 스트레스 수준에서의 관찰치에 대한 정보행렬이다. 모형에서의 모수 $\beta_0$, $\beta_1$, $\lambda$에 대한 통계적 추정은 일반화선형모형(generalized linear model)에서 사용하는 가중최소제곱법이나 최우추정법 등을 이용하여 추정할 수 있다.

Fisher 정보행렬을 이용하여 최우추정량 $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\lambda}$에 대한 점근 분산-공분산행렬 $\Sigma$는 $F^{-1}$를 구함으로써 얻을 수 있다.

## 3. 최적시험계획

본 논문에서 다루는 최적계획에서의 가속피로수명시험은 다음과 같다.

1. 미리 주어진 피로시험대상 시편(test coupon)의 수 $n$과 높은 스트레스 수준 $x_H$로부터 낮은 스트레스 수준 $x_L$과 낮은 스트레스 수준에서의 할당비율 $\pi$를 결정한다.

2. $n$개의 피로수명시험대상 시편중 $n\pi$개를 스트레스 수준 $x_L$에 할당하고 $n(1-\pi)$개를 스트레스 수준 $x_H$에 할당하여 시험하고 시험은 미리 결정된 관측중단시간 $t_c$에 종료한다. 단, $0 \le \pi \le 1$이다.

3. 고장난 시편은 교체하지 않는다.

관측중단시간 $t_c$는 일반적으로 현장의 일정계획과 비용 등의 제약조건에 따라 결정한다. 높은 스트레스 수준을 최대한 크게 하는 것이 함수에 대한 최우추정량의 점근분산을 최소화하므로, $x_H$는 다른 고장원인으로 인한 고장이 발생하지 않는 범위에서 가능한 크게 되도록 시험 이전에 미리 정해진 값이라 가정한다.[Meeker 와 Hahn(1985)]

최적여부에 대한 판단기준은 스트레스 수준이 설계 스트레스($\xi = 0$)이고 시간 $t$일 때 신뢰함수에 대한 최우추정량의 점근분산을 최소화하는 것이며, 이를 통계적 최적계획이라고 한다.

통계적 최적계획에서는 피로수명시험시의 최적 스트레스 수준과 두 수준의 스트레스에 시편을 할당하는 최적할당비율을 제공하게 된다. 수명시험대상 시편이 $n$개이고 그 중 $n\pi$개의 시편을 낮은 스트레스 수준에 할당하고 $n(1-\pi)$개의 시편을 높은 스트레스 수준에 할당한다고 할 때 Fisher 정보행렬은 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} F &= n(1-\pi)F(1) + n\pi F(\xi) \\ &= n(1-\pi)\begin{bmatrix} \Psi_1(1) & \Psi_1(1) & \Psi_2(1) \\ \Psi_1(1) & \Psi_1(1) & \Psi_2(1) \\ \Psi_2(1) & \Psi_2(1) & \Psi_3(1) \end{bmatrix} + n\pi \begin{bmatrix} \Psi_1(\xi) & \xi\Psi_1(\xi) & \Psi_2(\xi) \\ \xi\Psi_1(\xi) & \xi^2\Psi_1(\xi) & \xi\Psi_2(\xi) \\ \Psi_2(\xi) & \xi\Psi_2(\xi) & \Psi_3(\xi) \end{bmatrix}. \quad (3.1) \end{aligned}$$

여기서 $\Psi$값들은 식 (2.3)에서 기술한 바와 같다.

모형의 모수에 대한 최우추정치 $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\lambda}$의 점근 분산-공분산행렬은 식 (3.1)의 역행렬 $F^{-1}$를 구하여 얻을 수 있다. 설계 스트레스 수준에서 신뢰함수 $R(y)$에 대한 최우추정량의 점근분산은 다음과 같이 표현할 수 있다.[Nelson 과 Kielpinski(1976)]

$$Avar\left(\hat{R}(y)\right) = H\Sigma H'. \tag{3.2}$$

식(3.2)에서 $H$벡터는 다음과 같다.

$$H = \left(\frac{\partial R(y)}{\partial \beta_0},\ 0, \frac{\partial R(y)}{\partial \lambda}\right).$$

여기서

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(y)}{\partial \beta_0} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\left[e^{\frac{y}{2}}\left(\phi(a) - e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(b)\right) + 2\sqrt{\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(b)\right] \\ \frac{\partial R(y)}{\partial \lambda} &= \frac{a}{2\lambda}\phi(a) - \frac{2}{\mu}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(b) - \frac{b}{2\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(b) \end{aligned}$$

이다. 단,

$$a = \sqrt{\frac{\lambda}{e^y}}\left(1 - \frac{e^y}{\mu}\right),\ b = -\sqrt{\frac{\lambda}{e^y}}\left(1 + \frac{e^y}{\mu}\right),\ \mu = e^{\beta_0}$$

이다.

통계적 최적계획에서 관측중단싯점 $t_c$가 주어지면 특정싯점 $t$에서의 신뢰함수에 대한 최우추정량의 점근분산은 $\beta_0$, $\beta_1$, $\lambda$, $\pi$ 및 $\xi$의 함수이다. 따라서 피로수명시험에서의 최적설계 문제는 $\beta_0$, $\beta_1$ 및 $\lambda$ 값이 주어졌을 때 식 (3.2)의 점근분산을 최소화하는 스트레스 계수 $\xi^*$와 낮은 스트레스 수준에 시편을 할당하는 비율 $\pi^*$를 결정하는 문제가 된다. 낮은 스트레스 수준의 최적값은 $\xi^*$로부터 식 (2.2)를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x_L^* = x_D + \xi^*(x_H - x_D).$$

주어진 $\beta_0$, $\beta_1$ 및 $\lambda$에 대하여 식 (3.2)를 최소화하는 $\xi^*$와 $\pi^*$를 Jensen(1985)의 프로그램을 일부 수정하여 구하였다. 표 3.1은 최적계획표의 한 예로서, $y_c = 10$일 때 $\beta_0$ 와 $\beta_1$, $\lambda$의 일부 값들에 대해서 설계 스트레스 수준하의 평균수명에서의 신뢰도에 대한 최우추정량의 점근 분산을 최소화하는 최적계획표이다. (표 3.1에서 $Avar^*$는 최소화된 점근 분산값이다.) 따라서 어떤 재료에 대해서 설계 스트레스 수준에서의 평균수명 $\mu_D(= e^{\beta_0})$와 높은 스트레스 수준에서의 평균수명 $\mu_H\left(= e^{\beta_0+\beta_1}\right)$의 값을 과거의 경험이나 자료로부터 알 수 있다면, 이 값으로부터 $\beta_0$, $\beta_1$의 값을 구할 수 있고, 이로부터 최적계획을 구할 수 있다. 이렇게 모수의 참값대신 사전추정치를 사용하여 최적설계하는 것을 Chernoff(1953)는 부분최적(locally optimal)계획이라 하였다. 시험상황에 따른 $y_c$ 와 $\beta_0$, $\beta_1$ 및 $\lambda$의 다른 값에 대해서는 본 논문에서 작성된 프로그램을 이용하여 최적계획을 구할 수 있다.

표 3.1: 최적 계획표

| $\lambda = 1000$ | | | | | $\lambda = 2000$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\pi^*$ | $\xi^*$ | $Avar^*$ | $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\pi^*$ | $\xi^*$ | $Avar^*$ |
| 16 | -1 | 1.000 | .000 | .066564 | 16 | -1 | 1.000 | .000 | .152274 |
| | -2 | 0.903 | .370 | .045116 | | -2 | 0.906 | .364 | .104392 |
| | -3 | 0.859 | .578 | .015035 | | -3 | 0.861 | .575 | .035103 |
| | -4 | 0.839 | .682 | .003772 | | -4 | 0.840 | .681 | .008851 |
| | -5 | 0.827 | .745 | .000817 | | -5 | 0.828 | .745 | .001918 |
| | -6 | 0.820 | .787 | .000161 | | -6 | 0.820 | .788 | .000376 |
| | -7 | 0.815 | .818 | .000030 | | -7 | 0.816 | .821 | .000068 |
| | -8 | 0.811 | .843 | .000005 | | -8 | 0.813 | .848 | .000011 |
| | -9 | 0.804 | .862 | .000001 | | -9 | 0.803 | .870 | .000002 |
| 17 | -1 | 1.000 | .000 | .067585 | 17 | -1 | 1.000 | .000 | .155282 |
| | -2 | 0.904 | .371 | .046040 | | -2 | 0.906 | .365 | .106859 |
| | -3 | 0.858 | .579 | .015360 | | -3 | 0.860 | .575 | .035895 |
| | -4 | 0.837 | .683 | .003847 | | -4 | 0.840 | .681 | .009045 |
| | -5 | 0.827 | .745 | .000832 | | -5 | 0.828 | .744 | .001964 |
| | -6 | 0.819 | .787 | .000165 | | -6 | 0.820 | .787 | .000388 |
| | -7 | 0.814 | .817 | .000031 | | -7 | 0.815 | .818 | .000072 |
| | -8 | 0.811 | .841 | .000005 | | -8 | 0.812 | .843 | .000012 |
| | -9 | 0.807 | .860 | .000001 | | -9 | 0.809 | .865 | .000002 |

| $\lambda = 3000$ | | | | | $\lambda = 5000$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\pi^*$ | $\xi^*$ | $Avar^*$ | $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\pi^*$ | $\xi^*$ | $Avar^*$ |
| 16 | -1 | 1.000 | .000 | .294142 | 16 | -1 | 1.000 | .000 | .926336 |
| | -2 | 0.908 | .362 | .202769 | | -2 | 0.908 | .361 | .639341 |
| | -3 | 0.862 | .574 | .068396 | | -3 | 0.862 | .574 | .215778 |
| | -4 | 0.840 | .681 | .017250 | | -4 | 0.840 | .681 | .054307 |
| | -5 | 0.828 | .745 | .003728 | | -5 | 0.829 | .746 | .011655 |
| | -6 | 0.821 | .789 | .000726 | | -6 | 0.822 | .792 | .002224 |
| | -7 | 0.817 | .823 | .000128 | | -7 | 0.819 | .829 | .000373 |
| | -8 | 0.814 | .853 | .000020 | | -8 | 0.816 | .865 | .000051 |
| | -9 | 0.800 | .878 | .000003 | | -9 | 0.794 | .892 | .000005 |
| 17 | -1 | 1.000 | .000 | .300518 | 17 | -1 | 1.000 | .000 | .949840 |
| | -2 | 0.907 | .362 | .207920 | | -2 | 0.908 | .361 | .658940 |
| | -3 | 0.861 | .574 | .070111 | | -3 | 0.862 | .574 | .222630 |
| | -4 | 0.840 | .680 | .017703 | | -4 | 0.840 | .680 | .056220 |
| | -5 | 0.828 | .744 | .003844 | | -5 | 0.828 | .745 | .012179 |
| | -6 | 0.820 | .788 | .000758 | | -6 | 0.821 | .789 | .002384 |
| | -7 | 0.815 | .819 | .000139 | | -7 | 0.816 | .822 | .000427 |
| | -8 | 0.813 | .845 | .000023 | | -8 | 0.815 | .851 | .000068 |
| | -9 | 0.811 | .869 | .000004 | | -9 | 0.814 | .880 | .000009 |

## 4. 예제

Brown과 Miller(1978)의 2축 피로시험은 스트레스(반복하중) 수준을 여러 단계로 구분하고 각 스트레스 수준에서 파손이 일어날 때까지의 주기적 반복회수(수명)를 측정한 것이다. 이러한 시험에서 설계 스트레스 수준이 3.67 MJ/$m^3$, 높은 스트레스 수준이 115.58 MJ/$m^3$이고 관측중단시간으로 스트레스의 반복회수를 exp(10)회 까지 시험한다고 가정한다. 또한 과거의 경험 또는 데이터로부터 $\beta_0 = 16.0$, $\beta_1 = -4.0$, $\lambda = 3000$을 알고 있다고 가정한다. 최적화 판단기준으로 설계 스트레스를 받는 시험재료의 평균수명시간에서의 신뢰함수에 대한 최우추정량의 점근분산을 최소화하도록 한다. 통계적 최적계획 설계방법에 의하여 낮은 스트레스 수준과 낮은 스트레스 수준에 시편을 할당하는 최적비율을 표 3.1에서 찾으면 $(\xi^*, \pi^*) = (0.681, 0.840)$이 된다. 따라서 $x_L^*$은 식 (2.2)에 의하여 $x_L^* = \ln(3.67) + 0.68 * (\ln(115.58) - \ln(3.67)) = 3.65$가 된다. 즉, 낮은 스트레스 수준은 $\exp(3.65) = 38.48$MJ/$m^3$이다. 낮은 스트레스 수준에 시편을 할당하는 최적비율이 $\pi^* = 0.840$이므로 시편이 30개 있다면 25개를 낮은 스트레스 38.48MJ/$m^3$에서 시험하고, 나머지 5개를 높은 스트레스 115.58MJ/$m^3$에서 시험하는 것이 통계적 최적시험방법이 된다.

## 5. 결론

본 논문에서는 재료나 제품의 피로수명이 역정규분포를 따를 때 재료의 피로수명 특성을 나타내는 S-N 곡선에 대한 대수선형모형과 이 모형에서의 수명시험에 대한 최적계획을 다루었다. 최적화 판단기준으로 설계 스트레스 수준에서의 신뢰함수에 대한 최우추정량의 점근분산을 최소화하는 방법을 사용하였으며, 이 기준아래서 통계적 최적 계획을 구하였다. 본 연구결과는 재료시험실험실에서 피로수명과 스트레스간의 관계를 통계적으로 규명하는데 도움을 줄 것이며, 실제적인 시험설계를 위한 출발점으로 사용될 수 있을 것이다.

## 부록: 편미분식

1) 1차 편미분식

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_0} &= I(y)\lambda\left(\frac{e^y}{\mu^2} - \frac{1}{\mu}\right) + \frac{(1-I(y))\sqrt{\lambda}}{R(y_c)\mu}\left\{e^{\frac{y_c}{2}}\left(\phi(A) - e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(B)\right) + 2\sqrt{\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B)\right\}, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_1} &= \xi\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_0}, \qquad\qquad (A.1) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \frac{I(y)}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^y}{\mu^2} + \frac{2}{\mu} - e^{-y}\right) + \frac{1-I(y)}{R(y_c)}\left(\frac{A}{2\lambda}\phi(A) - \frac{2}{\mu}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B) - \frac{B}{2\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(B)\right).
\end{aligned}$$

2) 2차 편미분식

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta_0^2} &= -\frac{I(y)\lambda}{\mu}\left(\frac{2e^y}{\mu}-1\right)-\frac{(1-I(y))\lambda}{R(y_c)^2\mu^2}\left\{e^{\frac{y_c}{2}}\left(\phi(A)-e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(B)\right)+2\sqrt{\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B)\right\}^2 \\
&\quad -\frac{(1-I(y))\sqrt{\lambda}}{R(y_c)\mu}\left\{e^{\frac{y_c}{2}}\left(1+\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}Ae^{\frac{y_c}{2}}\right)\phi(A)+2\sqrt{\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\left(1+\frac{2\lambda}{\mu}\right)\Phi(B)\right. \\
&\quad \left.-e^{\frac{2\lambda}{\mu}+\frac{y_c}{2}}\left(1+\frac{4\lambda}{\mu}+\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}Be^{\frac{y_c}{2}}\right)\phi(B)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta_0\partial\lambda} &= I(y)\left(\frac{e^y}{\mu^2}-\frac{1}{\mu}\right)-\frac{(1-I(y))\sqrt{\lambda}}{R(y_c)^2\mu}\left\{\frac{A}{2\lambda}\phi(A)-\frac{2}{\mu}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B)-\frac{B}{2\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(B)\right\} \qquad \text{(A.2)} \\
&\quad \cdot\left\{e^{\frac{y_c}{2}}\left(\phi(A)-e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(B)\right)+2\sqrt{\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B)\right\} \\
&\quad +\frac{(1-I(y))\sqrt{\lambda}}{R(y_c)\mu}\left\{\frac{1-A^2}{2\lambda}e^{\frac{y_c}{2}}\phi(A)+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\left(1+\frac{2\lambda}{\mu}\right)e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B)\right. \\
&\quad \left.-e^{\frac{2\lambda}{\mu}+\frac{y_c}{2}}\left(\frac{2}{\mu}+\frac{1+B^2}{2\lambda}\right)\phi(B)-e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\frac{B}{\sqrt{\lambda}}\phi(B)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\lambda^2} &= -\frac{I(y)}{2\lambda^2}-\frac{1-I(y)}{R(y_c)^2}\left(\frac{A}{2\lambda}\phi(A)-\frac{2}{\mu}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B)-\frac{B}{2\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(B)\right)^2 \\
&\quad -\frac{1-I(y)}{R(y_c)}\left(\frac{1}{4\lambda^2}A(1+A^2)\phi(A)+\frac{4}{\mu^2}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B)-\frac{B}{4\lambda^2}(3-B^2)e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(B)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta_1^2}=\xi^2\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta_0^2},\qquad \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta_0\partial\beta_1}=\xi\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta_0^2},\qquad \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta_1\partial\lambda}=\xi\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta_0\partial\lambda}.
$$

3) 2차 편미분식에 대한 음의 기대값

$$
\begin{aligned}
E\left(-\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta_0^2}\right) &= \frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda}{R(y_c)\mu^2}\left\{e^{\frac{y_c}{2}}\left(\phi(A)-e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(B)\right)+2\sqrt{\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B)\right\}^2 \\
&\quad +\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\left\{e^{\frac{y_c}{2}}\left(1+\frac{A\sqrt{\lambda}}{\mu}e^{\frac{y_c}{2}}\right)\phi(A)-\sqrt{\lambda}\Phi(A)+\sqrt{\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\right. \\
&\quad \left.\cdot\left(\frac{4\lambda}{\mu}-1\right)\Phi(B)-e^{\frac{2\lambda}{\mu}+\frac{y_c}{2}}\left(1+\frac{4\lambda}{\mu}+B\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}e^{\frac{y_c}{2}}\right)\phi(B)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta_0 \partial \lambda}\right) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{R(y_c)\mu}\left\{\frac{A}{2\lambda}\phi(A) - \frac{2}{\mu}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B) - \frac{B}{2\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(B)\right\} \qquad \text{(A.3)}\\
&\cdot\left\{e^{\frac{y_c}{2}}\left(\phi(A) - e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(B)\right) + 2\sqrt{\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B)\right\}\\
&-\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}\left\{\frac{1-A^2}{2\lambda}e^{\frac{y_c}{2}}\phi(A) + \frac{4\sqrt{\lambda}}{\mu}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B)\right.\\
&\left.-e^{\frac{2\lambda}{\mu}+\frac{y_c}{2}}\left(\frac{2}{\mu} + \frac{1+B^2}{2\lambda}\right)\phi(B) - e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\frac{B}{\sqrt{\lambda}}\phi(B)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2}\right) &= \frac{1-R(y_c)}{2\lambda^2} + \frac{1}{R(y_c)}\left(\frac{A}{2\lambda}\phi(A) - \frac{2}{\mu}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B) - \frac{B}{2\lambda}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(B)\right)^2\\
&+\frac{1}{4\lambda^2}A(1+A^2)\phi(A) + \frac{4}{\mu^2}e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\Phi(B) - \frac{B}{4\lambda^2}(3-B^2)e^{\frac{2\lambda}{\mu}}\phi(B),
\end{aligned}
$$

$$
E\left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta_1^2}\right) = \xi^2 E\left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta_0^2}\right),\ E\left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta_0 \partial \beta_1}\right) = \xi E\left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta_0^2}\right),\ E\left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta_1 \partial \lambda}\right) = \xi E\left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta_0 \partial \lambda}\right).
$$

## 참고문헌


[1] American Society for Testing Materials. (1981). Statistical Analysis of Linear or Linearized Stress-Life(S-N) and Strain-Life(E-N) Fatigue Data, in *Statistical Analysis of Fatigue Data*, 129-140.

[2] Bhattacharyya, G. K. and Fries, A. (1982). Fatigue Failure Models - Birnbaum-Saunders vs. Inverse Gaussian. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 31, 439-440.

[3] Brown, M. W. and Miller, K. J. (1978). *Biaxial Fatigue Data.* Report CEMR1/78, Dept. of Mechanical Engineering, University of Sheffield.

[4] Chernoff, H. (1953). Locally optimal designs for estimating parameters. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 24, 586-602.

[5] Chhikara, R. S. and Folks, J. L. (1974). Estimation of the Inverse Gaussian Distribution Function. *Journal of American Statistician Association*, Vol. 69, 250-254.

[6] Chhikara, R. S. and Folks, J. L. (1989). *The Inverse Gaussian Distribution - Theory, Methodology and Applications.* Marcel Dekker, New York.

[7] Doksum, K. A. and Hoyland, A. (1992). Models for Variable-Stress Accelerated Life Testing Experiments Based on Wiener Processes and the Inverse Gaussian Distribution. *Technometrics*, Vol. 34, No. 1, 74-82.

[8] Jensen, K. L. (1985). *ALTPLAN-Microcomputer Software for Developing and Evaluating Accelerated Life Test Plans.* Dept. of Statistics, Iowa State University, Amens, IA.

[9] Meeker, W. Q. and Hahn, G. J. (1985). *How to Plan an Accerated Life Test - Some Practical Guidelines.* Vol. 10, The ASQC Basic References in Quality Control: Statistical Techniques.

[10] Nelson, W. and Kielpinski, T. J. (1976). Theory for Optimum Censored Accelerated Life Tests for Normal and Lognormal Life Distributions. *Technometrics*, Vol. 18, No. 1, 105-114.

[11] Rieck, J. R. and Neldelman, J. (1991). A Log-Linear Model for the Birnbaum-Saunders Distributions. *Technometrics*, Vol. 33, No. 1, 51-60.

[ 1999년 4월 접수, 1999년 8월 최종수정 ]

# Optimum Designs of Fatigue Life Tests for Inverse Gaussian Distribution*

Kyu-Moung Choi[1) ] Nak-Young Lee[2)]

ABSTRACT

In this paper we present the optimum plans for fatigue life tests to estimate a simple linear relationship between stress and number of cycles to failure in S-N curves. Maximum likelihood method is applied to analyze fatigue lifetime data for the model under the assumption that the lifetime of a specimen has a inverse Gaussian distribution. Optimum plans are obtained to minimize the asymptotic variance of maximum likelihood estimator of the reliability function at a given lifetime and use condition stress.

* This paper was supported in part by NON DIRECTED RESEARCH FUND, Korea Research Foundation, 1997.

1) (305-600) P.O.BOX 35-1, Yusung, Daejon, Agency for Defense Development

2) (305-764) 220 Gung-dong Yusung-gu, Daejon, Dept. of Statistics, Chungnam National University, Professor