

# 투과형 CT를 위한 EM 모형하에서 GCA 재구성 알고리즘

김승구<sup>1)</sup>

## 요약

방출형 토모그래피와는 다르게, 투과형 토모그래피를 위한 통계적 알고리즘들은 매우 낮은 수렴속도와 엄청난 계산시간을 감수해야 했다. 그 주된 이유는 Lange-Carson 모형에 기초한 EM 알고리즘을 사용하고 있기 때문인데, 최근 GCA 기법의 등장으로 계산시간을 현저히 단축할 수 있는 가능성이 제공되었다. 그러나 GCA 알고리즘은 우도의 단조증가성을 만족시키기 위해 부가적인 계산시간을 희생해야만 한다. 이에 본 연구에서는 프로그래밍이 간편하며, 처리시간이 짧고, 자체로 우도의 단조증가성을 만족하는 투과형 토모그래피를 위한 재구성 알고리즘을 제안한다.

## 1. 서론

간접측정된 자료를 이용한 이미지 재구성(image reconstruction)을 총칭 토모그래피(tomography)라 한다. 흔히 단층촬영사진이라 부르는 의료단층영상이 토모그래피의 대표적인 예인데, 의료영상에서 토모그래피는 크게 방출형(emission)과 투과형(transmission)으로 나뉘어진다. 방출형 토모그래피는 인체에 투여된 방사성의약품의 서로다른 조직에서의 활성상태를 추정하여 단층영상으로 나타내는 것이 목적이다. 반면, 투과형 토모그래피는 투과성 입자(혹은 에너지)를 인체의 단면에 투과시켜 감쇠된 입자수(혹은 에너지 준위차)를 측정함으로써, 인체 내부의 서로다른 조직의 감쇠계수(attenuation coefficients)를 추정하여 영상으로 나타내는 것이라 할 수 있다. 감쇠계수로 이루어진 영상을 감쇠지도(attenuation map)라 부르는데, 감쇠지도의 추정은 영상 자체로서 해부학적 정보를 제공할 뿐만 아니라 3차원 이미지 재구성을 위한 영상정합(image registration) 그리고 투과형 토모그래피 영상의 감쇠보정(attenuation correction)을 위해서도 반드시 필요하다.

방출형 토모그래피는 SPECT(single photon emissive computed tomography)나 PET(positron emission tomography) 등의 기기에서 그리고 투과형 토모그래피는 X-ray CT 기기 등에서 재구성(reconstruction)되는 것이 일반적이었다. 그런데 최근 방출형 조영기기에 투과형 스캐너를 장착한 CT(예를들면, Siemens/953B 나 Siemens/CTI ECAT EXACT 921 PET)가 등장하면서 방출형 기기에서 투과형 토모그래피의 재구성에 대한 중요성이 대두되고 있다. 문제는 방출형 기기는 특성상 매우 낮은 수준의 광자수(low photon counts)가 측정되기 때문에 전통적 투과형 기기인 X-ray CT에서와는 달리 입자의 확률적 특성과 가법적 측정오차를 무시할 수 없게 되었다(Ollinger, 1994). 따라서 관측에 대해 확률적 특성이 고려되지 않은 전통적 기법인 FBP(filtered backprojection)는 편의가 매우 큰 재구성영상을 제공하게 된다. 이 편의는 보통 방사형 흠집(artifacts)으로 나타난다. 그러나 여전히 이 비통계적 기법은 처리속도가 빠르다는 이유로 상용기기에 지배적으로 채택되고 있다.

1) (220-702) 강원도 원주시 우산동, 상지대학교 응용통계학과, 부교수

한편 Fessler(1994)의 가중최소자승 기법 역시 투과형 모형에서 관측치와 모수 사이의 비선형관계를 무시하고 있기 때문에 심한 편의를 발생하게 된다. 관측된 입자의 확률적 특성을 충실히 반영한 기법으로는 Lange와 Carson(1984)의 기법을 들 수 있다. 이후 Lange 등(1987), Ollinger(1994) 및 Lange와 Fessler(1995) 등에서 투과형 토모그래피를 다루고 있으나 모두 Lange-Carson 모형을 기초로한 EM 알고리즘을 사용하고 있다는 것이 특징이다. 그러나 Lange-Carson 투과형 모형으로부터 파생된 반복기법들은 모두 매우 느린 수렴속도와 비실용적인 계산시간 그리고 프로그래밍 구현상의 어려움 등이 문제점으로 지적되어 왔다.

투과형 재구성 알고리즘은 수렴속도(반복수)와 처리속도(계산시간)가 빨라야 한다는 제약 외에 다음의 조건들이 요구되고 있다. 즉,

- (1) 수렴의 단조성(monotonicity); 의료영상에서 수렴의 단조성을 필수적인 요소로 간주하고 있는 주된 이유는 현장에서의 필요성 때문인데, 만약 알고리즘이 진동수렴한다면 어떤 단계에서 영상추정치를 얻었을 때 현 단계의 영상이 전단계의 영상보다 훨씬 편의가 심할지도 모른다는 의심을 하게되고, 이러한 의심은 민감한 의사결정을 내려야 하는 의료분야에서 진단을 어렵게 한다. 단조성은 목적함수가 완전볼록성을 만족하도록 설계함으로써 구현할 수 있다.
- (2) 추정치의 비음성(nonnegativity); 감쇠계수는 음수가 될 수 없다. 음의 감쇠계수는 영상해석을 어렵게 하며, 감쇠보정 등의 2차 응용에서 문제점을 야기한다.
- (3) 병렬처리를 위한 분리성(separability); 대부분의 단층영상 기기에는 빠른 처리를 위해 단위 프로세서의 수가 많건적건 병렬처리 프로세서가 장착되어 있다. 따라서 알고리즘은 병렬처리가 적합하도록 만들어져야 한다. 이는 곧 목적함수가 (가능하다면) 픽셀 개개의 함수로 분리되어야 함을 요구한다.

그런데 최근 Fessler 등(1997)의 GCA(grouped-coordinate ascent) 알고리즘은 앞에서 언급한 문제점을 일거에 해소해 줄 수 있는 매력적인 기법으로 소개되었다. GCA 기법은 우선 Lange와 Carson의 체계를 벗어나 De Pierro(1995)의 볼록성질 기법(convexity technique)을 사용함으로써 계산의 단순성을 확보하고 수렴속도를 개선시키고자 하였으며, 부가하여 전체 모수들 중 일부분 만을 축차적으로(sequentially) 갱신하는 반복기법을 통해 수렴속도와 계산시간을 향상시키고자 하였다.

그러나 GCA 기법은 수렴의 단조성을 만족시키지 못하는 결정적 단점을 가지고 있다. 그래서 Fessler 등(1997)은 매 반복마다 단조성을 만족케 하는 추정치(혹은 추정치의 부분 집합)를 찾기 위한 일종의 검색단계(searching step)를 두고 있다. 그러나 그들은 많은 처리시간을 요구한다는 이유로 이 검색단계를 생략하고, “수천 번의 실험을 통해 한 번도 단조증가성이 만족되지 않은 적이 없었다”는 말로 대신하였지만 이론적으로 언제든지 단조성이 깨질 가능성은 존재한다. 또한 추정치의 비음조건을 만족케 하기 위한 기법 역시 단조성을 훼손할 수 있다. 이러한 이유로 GCA 알고리즘은 단조수렴을 보장하지 못한다.

본 연구에서는 GCA 기법의 장점을 살리면서 검색단계가 필요치 않은 다시말해서, 자체로 우도의 단조증가성을 만족하며, 분리성이 충족되는 투과형 토모그래피를 위한 재구

성 알고리즘을 제공하고자 한다. 새 알고리즘의 두드러진 특징은 GCA의 검색단계 대신 알고리즘의 단조성을 보장하는 EM 알고리즘의 평가함수를 1차 대리함수로 사용한 후, 또 다시 분리성이 충족되는 Fessler 등(1997)의 대리함수를 사용하여 2차 대리케 하는 것이라 하겠다.

다음 절에서는 투과형 토모그래피에 대한 통계 모형등의 기본개념을 소개하며, 3 절에서는 제안하고자 하는 알고리즘의 유도과정과 성질을 조사하고, 4 절에서는 토모그래피 실험을 통해 제안된 알고리즘의 성능을 조사한다.

## 2. 기본개념

광선의 폭이 무한히 얇다고(infinitely thin beam) 가정할 때,  $i$  번째 사영(projection)에서  $b_i$ 의 강도로 출발한 광선은 감쇠지도를 지나면서 감쇠되어  $y_i$  크기의 광자수로 검출된다. 한편, 감쇠지도는 정방형의 픽셀(pixel, 혹은 voxel)을 단위로 하며, 각 픽셀은 고유의 감쇠계수  $\theta_j \geq 0$ 을 갖는다고 가정한다. 먼저  $y = (y_1, \dots, y_N)^T$  그리고  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_P)^T$ 라 쓰자. 여기서 우리의 목적은 모수 추정치의 비음조건(nonnegativity condition)하에서 관측치  $y$ 를 이용하여 모수  $\theta$ 를 추정하는 것이다. 관측치는  $y_i = x_i + e_i$ 와 같이 조영선을 지나는 '주 광자수(main counts)'  $x_i$ 에 독립적으로 평균이  $\mu_i$ 인 '부광자수(extra counts)'  $e_i$ 가 부과되어 관측되며, 이때의 관측치  $\{y_i\}$ 들은 독립적으로

$$y_i \sim \text{Poisson}\{b_i \exp(-\langle l_i, \theta \rangle) + \mu_i\}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

을 따르는 것으로 알려져 있다. 여기서  $l_{ij}$ 는  $i$  번째 조영에서  $j$  번째 픽셀과 교차하는 광선의 길이를 나타내며,  $l_i = (l_{i1}, \dots, l_{iP})$ 라 할 때 내적  $\langle l_i, \theta \rangle = \sum_{j=1}^P l_{ij}\theta_j$ 을 감쇠지도를 지나  $i$  번째 선적분(line integral)이라 한다. 그리고  $\{b_i\}$ ,  $\{\mu_i\}$  및  $\{l_{ij}\}$ 의 원소들은 비음의 상수로서 모두 기지임을 가정한다. 이때,  $\theta$ 에 관한 상수항을 제외한 식 (2.1)의 대수우도는

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^N h_i(\langle l_i, \theta \rangle) \quad (2.2)$$

으로 주어진다. 단,

$$h_i(m) = y_i \log(b_i e^{-m} + \mu_i) - (b_i e^{-m} + \mu_i). \quad (2.3)$$

여기서 유의할 것은  $\mu_i = 0$ 이 아니면,  $m \in \mathbb{R}$ 에 대해,  $h_i(m)$ 은 오목함수가 아니라는 사실이다. 그래서  $L(\cdot)$  역시  $\mu_i > 0$ 인 한 오목함수가 아니다.

임의의 부분집합  $\mathcal{D} \subset \{1, \dots, P\}$ 와 여집합  $\mathcal{D}^c$ 에 대응한 모수벡터를 각각  $\theta_{\mathcal{D}}$  및  $\theta_{\mathcal{D}^c}$ 라 하자. 여기서  $\theta_{\mathcal{D}^c} = \theta_{\mathcal{D}^c}^n$ 으로 주어졌다면, 선적분을

$$\langle l_i^*, [\theta_{\mathcal{D}}, \theta_{\mathcal{D}^c}^n] \rangle = \sum_{j \in \mathcal{D}} w_{ij} \left[ \frac{l_{ij}}{w_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + \langle l_i, \theta^n \rangle \right] \quad (2.4)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 단  $l_i^*$ 는 벡터  $[\theta_{\mathcal{D}}, \theta_{\mathcal{D}^c}^n]$ 의 원소에 대응하도록  $l_i$ 의 원소들을 재배열한 벡터이며,  $w_{ij} (> 0)$ 은  $\sum_{j \in \mathcal{D}} w_{ij} = 1$ 이 만족되도록 선택한 상수이다. 그리고  $\theta^n =$

$(\theta_1^n, \dots, \theta_p^n)^T$ 을 나타낸다. 식 (2.4)의 표현은 단순한 착상이기는 하지만 Fessler 등(1997)의 GCA 알고리즘과 마찬가지로 본 연구에서 매우 중요한 역할을 하게 된다.

대부분의 화상관련 분야에서는 식 (2.2) 대수우도 대신 페널티 함수를 포함한 대수우도(penalized log-likelihood)

$$L_\beta(\theta) = L(\theta) - \beta J(\theta) \quad (2.5)$$

를 최대화하는 추정방법을 사용한다. 사실  $L(\theta)$  만을 최대화하는 재구성영상은 부적합 문제(ill-posed problem)에 기인하여 매우 큰 잡음을 나타내게 된다. 식 (2.5)에서 페널티 함수  $J(\theta)$ 는 이러한 잡음을 평활하도록 설계된다. 그리고 알고리즘의 수렴을 위해 본 논문 전반에서 정의하게 될 식 (3.6)의 완전오목성을 위하여 그래서 알고리즘의 단조성을 확보하기 위해서 필수적이다. 더욱이 비볼록(non-convex) 페널티 함수는 추정치가 관측치의 불연속 함수가 되도록 한다는 문제점이 있다. 이는 관측치의 미세한 오염으로도 매우 왜곡된 재구성영상을 제공할 가능성이 있음을 의미한다.

한편  $\beta(> 0)$ 는 평활강도를 결정하도록 사전에 주어지는 조율상수(tuning constant) 기능을 하게 된다. 페널티 항에 대해서는 4 절에서 자세히 소개한다.

식 (2.5)로부터 직접  $L_\beta(\theta)$ 를 최대화하여 추정치  $\hat{\theta}$ 를 얻는 것은 불가능하다. 그래서  $n+1$  단계에서

$$L_\beta(\theta^{n+1}) \triangleq L_\beta([\theta_D^{n+1}, \theta_{D^c}^n]) \geq L_\beta(\theta^n) \quad (2.6)$$

이 만족되는 반복 알고리즘을 사용하게 된다.

### 3. EM-GCA 알고리즘의 개발

#### 3.1. 목적함수의 오목성(CONCAVITY)

EM-GCA 알고리즘은 먼저 서로 독립인 두 미측정 관측치  $x_i$ 와  $e_i$ 를 완전자료로, 그리고 측정된 관측치  $y_i$ 를 불완전자료로 정의하면서 시작한다. 따라서 자연스럽게  $x_i \sim \text{Poisson}\{b_i \exp(-\langle l_i, \theta \rangle)\}$  및  $e_i \sim \text{Poisson}\{\mu_i\}$ 라고 볼 수 있으므로, 대수우도  $L(\theta)$  대신 완전자료  $(x_i, e_i)$ 에 관한 대수우도의 조건부 기대값 즉, 평가함수(evaluation function)

$$Q(\theta_D | \theta^n) = E[\ln f(x, e | \theta_D) | y, \theta^n] \propto E[\ln f_1(x | \theta_D) | y, \theta^n] = \sum_{i=1}^N g_i(\langle l_i^*, [\theta_D, \theta_{D^c}^n] \rangle) \quad (3.1)$$

를 사용하게 될 것이다(완전자료  $e$ 의 평가함수  $E[\ln f_2(e) | y, \theta^n]$ 는  $\theta_D$ 에 정보를 전혀 제공하지 않으므로 무용하다). 단,  $f_1(\cdot)$ 과  $f_2(\cdot)$ 은 각각  $x$ 과  $e$ 의 결합밀도함수이며,

$$g_i(m) = -E(x_i | y_i, \theta^n)m - b_i e^{-m} \quad (3.2)$$

을 나타낸다(단, 상수항은 생략). 본 논문에서는  $\theta_j$  ( $j \in \mathcal{D}$ )에 관한 비음의 제약조건 하에서 목적함수를

$$Q_\beta(\theta_D | \theta^n) \triangleq Q(\theta_D | \theta^n) - \beta J(\theta_D | \theta^n) \quad (3.3)$$

으로 하는 PEM(penalized EM) 알고리즘을 기본 골격으로 한다.

한편,  $x_i|y_i$ 의 조건부 기대값은

$$\hat{x}_i^n \triangleq E(x_i|y_i, \theta^n) = y_i \left( \frac{E(x_i|\theta^n)}{E(y_i|\theta^n, \mu)} \right) = y_i \left( \frac{b_i e^{-\langle l_i, \theta^n \rangle}}{b_i e^{-\langle l_i, \theta^n \rangle} + \mu_i} \right) \quad (3.4)$$

임을 쉽게 보일 수 있다. 또 본 논문에서 가장 밑바탕이 되는 성질은  $g_i$ 가 식 (2.3)의  $h_i$ 와는 다르게  $\mu_i$ 나  $b_i$ 에 관계없이 항상 오목하다는 사실이다. 이로부터, 행렬  $\{l_{ij}, j \in \mathcal{D}\}$ 에 대한 약간의 조건(Lange과 Fessler, 1995 참조) 하에서, 식 (3.3)의  $Q_\beta(\cdot|\theta^n)$ 는  $\theta_{\mathcal{D}}$ 에 관해 완전 오목함수이며, 따라서 식 (3.3)을 최대화하는  $\theta^{n+1}$ 은 유일하게 존재하여 식 (2.6)의 단조증가성을 만족하게 한다. 결국  $\theta^\infty$ 은  $L_\beta(\theta^n)$ 의 전역최대치에 도달하게 된다.

한편, 식 (3.1)에 정의된 평가함수는 Lange과 Carson(1984)의 그것과는 완전자료의 설정에 있어 큰 차이가 있음을 주목해야 한다. Lange과 Carson은 가상의 자료  $x_{ij}$ 에 대해,  $x_i$ 를 가상공간  $\{x_{ij}\}_{j=1}^P$ 에서 생성(span)된 내적이라 보고, 완전자료의 공간을  $A \triangleq \{\{x_{ij}\}_{j=1}^P, e_i\}_{i=1}^N$ 와 같이 설정하였다. 반면, 본 논문의 완전자료의 공간은  $B \triangleq \{x_i, e_i\}_{i=1}^N$ 이다. 결국 공간 A보다 공간 B가 훨씬 좁다는 것을 알 수 있다. 다시말해, 공간 A가 픽셀 수 P의 크기에 종속되어 무한히 확장되는 반면 공간 B는 픽셀 수와는 무관하다. 따라서 Fessler와 Hero(1994)의 “완전자료의 공간이 확장됨에 따라 EM 알고리즘의 수렴속도는 느려진다”는 결과로부터 식 (3.1)의 평가함수는 Lange-Carson의 그것보다 알고리즘을 훨씬 빠르게 수렴케 한다는 사실을 알 수 있다.

### 3.2. 평가함수의 대리함수(SURROGATE FUNCTION)

불행히도 식 (3.3)에 대한 정규방정식으로부터 직접  $\theta_j^{n+1}$ ,  $j \in \mathcal{D}$ 를 각각 분리하여 구하는 것은 사실상 불가능하다. 왜냐하면, 첫째  $j \in \mathcal{D}$  번째 정규방정식  $\partial Q(\theta_{\mathcal{D}}|\theta^n)/\partial \theta_j = 0$ 에서  $\theta_j$ 와  $\{\theta_k; k \in \mathcal{D}\}$ 들이 서로 결합되어 있기 때문이며, 둘째로는 페널티 함수의 복잡성 때문이다. 페널티 함수의 복잡성을 극복하는 방법은 다음 소절에서 다루기로 하고 여기서는 픽셀 별 분리성을 충족시키기 위한 방법을 소개한다. 먼저

$$L_\beta(\theta_{\mathcal{D}}^{n+1}; \theta_{\mathcal{D}^c}^n) - L_\beta(\theta^n) \geq Q_\beta(\theta_{\mathcal{D}}^{n+1}|\theta^n) - Q_\beta(\theta^n) \geq \phi_\beta(\theta_{\mathcal{D}}^{n+1}|\theta^n) - \phi_\beta(\theta^n) > 0 \quad (3.5)$$

를 만족하며, 또

$$\phi_\beta(\theta_{\mathcal{D}}|\theta^n) \triangleq \phi(\theta_{\mathcal{D}}|\theta^n) - \beta J(\theta_{\mathcal{D}}|\theta^n) = \sum_{j \in \mathcal{D}} \phi_j(\theta_j|\theta^n) - \beta \sum_{j \in \mathcal{D}} J_j(\theta_j|\theta^n) \quad (3.6)$$

과 같이  $j \in \mathcal{D}$ 에 대해 가법적으로 분리되는 대리함수  $\phi_\beta(\theta_{\mathcal{D}}|\theta^n)$ 을 목적함수로 한다. 이렇게 구한  $\theta^{n+1}$ 는 식 (3.5)로부터 알 수 있듯이,  $\theta^\infty = \hat{\theta}$ 로의 수렴속도를 다소 희생하더라도 대수우도의 단조증가성은 유지되며, 식 (3.6)으로부터

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \phi_j(\theta_j|\theta^n) - \beta \frac{\partial}{\partial \theta_j} J_j(\theta_j|\theta^n) = 0, \quad \theta_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{D} \quad (3.7)$$

과 같이 픽셀별로 정규방정식이 주어지므로 분리성이 충족된다.

4 절에서 다루겠지만, 페널티 함수에 대해서는  $J_j(\theta_j|\theta^n)$ 가 완전볼록함수가 되도록  $J(\theta_D|\theta^n) = \sum_{j \in \mathcal{D}} J_j(\theta_j|\theta^n)$ 과 같이 정의할 수 있다. 그리고 함수  $\phi_j(\theta_j|\theta^n)$ 은 2절의 식 (2.4)를 이용하여 아래와 같이 유도한다. 즉, 함수  $g_i$ 는 오목함수이고  $w_{ij} \geq 0$ 이므로, 식 (2.4)에 Jensen 부등식을 적용하면,

$$g_i(\langle l_i^*, [\theta_D, \theta_{\mathcal{D}^c}^n] \rangle) \geq \sum_{j \in \mathcal{D}} w_{ij} g_i \left( \frac{l_{ij}}{w_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + \langle l_i, \theta^n \rangle \right) \quad (3.8)$$

이 성립한다. 그리고 식 (3.8)의 양변에  $\sum_i^N$ 을 취하면

$$Q(\theta_D|\theta^n) = \sum_i^N g_i(\langle l_i^*, [\theta_D, \theta_{\mathcal{D}^c}^n] \rangle) \geq \sum_{j \in \mathcal{D}} \phi_j(\theta_j|\theta^n) \quad (3.9)$$

단,

$$\phi_j(\theta_j|\theta^n) \triangleq \sum_i^N w_{ij} g_i \left( \frac{l_{ij}}{w_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + \langle l_i, \theta^n \rangle \right) \quad (3.10)$$

이 성립한다. 따라서  $\phi_j(\theta_j|\theta^n)$ 를 식 (3.10)와 같이 결정하면, 부등식 (3.9)와

$$\phi(\theta^n) = \phi(\theta_D^n|\theta^n) = \sum_{j \in \mathcal{D}} \phi_j(\theta_j^n|\theta^n) = \sum_i^N g_i(\langle l_i, \theta^n \rangle) \sum_{j \in \mathcal{D}} w_{ij} = Q(\theta_D^n|\theta^n) = Q(\theta^n)$$

에 의해 식 (3.5)의 두번째 부등식이 성립됨을 알 수 있다. 그리고  $\phi_j(\cdot|\theta^n) - J_j(\theta_j|\theta^n)$ 은 완전오목함수이므로

$$\theta_j^{n+1} \triangleq \arg \max_{\theta_j \geq 0} \{ \phi_j(\theta_j|\theta^n) - J_j(\theta_j|\theta^n) \}, \quad \forall j \in \mathcal{D} \quad (3.11)$$

은 식 (3.5)의 세번째 부등식 역시 만족되게 한다. 끝으로 식 (3.5)의 첫번째 부등식은 EM 알고리즘의 성질에 의해 성립하게 된다.

참고로 Fessler 등(1997)의 GCA 알고리즘은 대리함수로서

$$\phi_j(\theta_j|\theta^n) \triangleq \sum_i^N w_{ij} h_i \left( \frac{l_{ij}}{w_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) + \langle l_i, \theta^n \rangle \right)$$

를 사용하고 있다. 이때, 함수  $h_i(\cdot)$ 는 오목함수가 아니므로 대리함수 역시 오목함수임을 보장할 수 없다. 한편, 혹자는 식 (3.5)에서 2차 대리함수  $\phi_\beta(\theta_D|\theta^n)$ 를 최대화하는 대신 Quasi-Newton이나 Conjugate Gradient 계열의 알고리즘을 적용할 수도 있지 않을까라고 생각할 수 있다. 그러나 이 두 알고리즘으로부터 파생된 알고리즘들은 감쇠지도 영상을 매 단계에서 동시에 추정해야하며, 픽셀별로 분리 추정할 수 없다. 다시말해서 병렬처리에 적합하지 않다는 단점이 있다. 더욱이 이 알고리즘들은 매 단계마다 계산시간을 많이 사용하는 검색 과정(line search procedure)을 반드시 거쳐야 한다는 문제점을 가지고 있다.

### 3.3. 1-단계 그래디언트 알고리즘(ONE-STEP GRADIENT ALGORITHM)

식 (3.11)의 정규방정식은 식 (3.10)의 정의로부터 모든  $j \in \mathcal{D}$ 에 대해,

$$0 = \sum_i^N l_{ij} \left[ -\hat{x}_i^n + b_i \exp \left( -\frac{l_{ij}}{w_{ij}} (\theta_j - \theta_j^n) - \langle l_i, \theta^n \rangle \right) \right] - \beta \frac{\partial}{\partial \theta_j} J_j(\theta_j | \theta^n), \quad \theta_j \geq 0 \quad (3.12)$$

과 같이 주어진다. 그런데 이 방정식으로부터도 역시  $\theta_j^{n+1}$ 를 직접 유도하는 것은 거의 불가능하므로, 아래와 같은 Newton-Raphson 알고리즘을 이용한 부알고리즘(subiteration)을 사용해야 한다. 즉,  $\theta_j^{n:0} = \theta_j^n$ 으로 놓고,

$$\theta_j^{n:k+1} = \begin{cases} \left[ \theta_j^{n:k} + \frac{\phi_j'(\theta_j^{n:k} | \theta^n) - \beta J_j'(\theta_j^{n:k} | \theta^n)}{-(\phi_j''(\theta_j^{n:k} | \theta^n) - \beta J_j''(\theta_j^{n:k} | \theta^n))} \right]_{++}, & \forall j \in \mathcal{D} \\ \theta_j^{n:k}, & \forall j \in \mathcal{D}^c \end{cases} \quad (3.13)$$

을 충분히 반복한 후, 다시  $\theta_j^{n+1} = \theta_j^{n:\infty}$ 으로 치환한다. 여기서  $f'(a) = df(x)/dx|_{x=a}$  및  $f''(a) = d^2f(x)/dx^2|_{x=a}$  그리고

$$[u(x)]_{++} = \begin{cases} x, & u(x) < 0 \\ u(x), & u(x) \geq 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

을 나타낸다. 그래서 초기치  $\theta_j^{n:0} = \theta_j^n$ 이 음수로 주어지지 않는 한 추정치에 대한 비음조건을 충족시킬 수 있다. 그리고  $\phi_\beta(\theta_{\mathcal{D}} | \theta^n)$ 은 완전 오목함수이므로 대각행렬  $-\partial^2 \phi_\beta(\theta_{\mathcal{D}} | \theta^n) / \partial \theta_{\mathcal{D}} \partial \theta_{\mathcal{D}}^T$ 은 양정치 행렬이다. 따라서 알고리즘 (3.13)은 식 (3.5)를 만족하면서 수렴하게 된다. 그러나 본 논문에서는 알고리즘 (3.13) 대신 분모항의 페널티 성분을 제외한

$$\theta_j^{n:k+1} = \left[ \theta_j^{n:k} + \frac{\phi_j'(\theta_j^{n:k} | \theta^n) - \beta J_j'(\theta_j^{n:k} | \theta^n)}{-\phi_j''(\theta_j^{n:k} | \theta^n)} \right]_{++}, \quad \forall j \in \mathcal{D} \quad (3.15)$$

를 사용할 것이다. 이 알고리즘은 김승구(1996)의 OSLG(one-step lated gradient) 알고리즘과 비슷한 개념으로 유도한 것인데, 많은 시간을 소요하는  $\beta J_j''(\theta_j^{n:k} | \theta^n)$ 를 계산하지 않아 실용적 면에서 의미가 있다.

그런데 알고리즘 내에 알고리즘 (3.15)와 같이 부알고리즘이 존재하는 것은 여러 측면에서 바람직하지 않다. 특히 식 (3.12)의 지수항 내에서  $l_{ij}(\theta_j^{n:k} - \theta_j^n)/w_{ij}$ 처럼 첨자  $i$ 와 첨자  $j$ 가 교차하는 성분을 matrix-oriented software(예를들어, Matlab, Gauss, S-Plus 혹은 SAS IML 등)을 사용하여 프로그래밍하기란 매우 어렵다. 따라서 본 논문에서는 대안으로서 알고리즘 (3.15)의 1-단계 추정치를 사용한다. 알고리즘의 1-단계에서는  $\theta_j^{n:0} = \theta_j^n$ 이므로 교차항이 0이 되어 없어진다. 이 것은 프로그래밍을 매우 용이하게 한다. 결국 1-단계 알고리즘은

$$\theta_j^{n+1} = \left[ \theta_j^n + \frac{\phi_j'(\theta_j^n) - \beta J_j'(\theta_j^n)}{-\phi_j''(\theta_j^n)} \right]_{++}, \quad \forall j \in \mathcal{D} ; \quad \theta_j^{n+1} = \theta_j^n, \quad \forall j \in \mathcal{D}^c \quad (3.16)$$

과 같이 주어진다(구체적 수식표현은 부록 A에 수록하였다). 또 알고리즘 (3.16)은 상수  $\beta$ 에 대한 약간의 조건하에서 GEM(generalized EM)임을 아래 정리에서 보인다. 본 논문에서는 식 (3.16)를 EM-GCA 알고리즘으로 부르기로 한다.

정리 3.1 집합  $\mathcal{G} = \{j | \theta_j^{n+1} \neq \theta_j^n, j \in \{1, \dots, P\}\}$  라 하자. 이때 최소한

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_{\mathcal{G}} \partial \theta_{\mathcal{G}}^T} \{ -\phi(\theta_{\mathcal{G}}^n | \theta^n) - \beta J(\theta_{\mathcal{G}}^n | \theta^n) \} \quad (3.17)$$

이 음정치 행렬이 될 정도로 평활상수  $\beta$ 가 크게 주어지지만 않는다면, EM-GCA 알고리즘은 GEM이다. 즉,  $Q_{\beta}(\theta^{n+1} | \theta^n) \geq Q_{\beta}(\theta^n | \theta^n)$ 이 만족되며 등호는  $\theta^{n+1} = \theta^n$ 일 때 성립한다.

증명: (증명은 부록 B 참조). □

## 4. 모의영상실험

본 논문에서는 크기  $80 \times 80$ (픽셀 당  $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ )의 몸체, 폐, 심장, 기도, 척추 등이 포함된 인체의 단면 이미지를 형상화한 팬텀(phantom)을 이용하여 동등한 작업요소 하에서 EM-GCA 알고리즘과 GCA 알고리즘을 비교하고자 한다.

### 4.1. 사전선택 작업요소

GCA 및 EM-GCA 알고리즘을 사용하기 위해서는 페널티 함수, 가중치  $w_{ij}$ , 부분집합  $\mathcal{D}$ , 초기치  $\theta^0$  및 상수  $\beta$ 를 사용자가 미리 선택하여야 한다. 먼저 페널티 함수와 가중치는 GCA와의 비교를 위해 Fessler 등(1997)에서 사용한 것을 선택할 것이다. 즉, 페널티 함수는

$$J(\theta_{\mathcal{D}} | \theta^n) = \sum_{j \in \mathcal{D}} J_j(\theta_j | \theta^n) = \sum_{j \in \mathcal{D}} (1/2) \sum_{k \in \partial_j} s_{jk} \tau(\theta_j - \theta_k^n) \quad (4.1)$$

과 같이 정의한다. 여기서  $\partial_j$ 는  $j$ 번째 픽셀의 이웃들(neighbors)을 포함하는 집합인데,  $j$ 번째 픽셀의 상하좌우 그리고 대각 픽셀을 원소로 하는 집합으로 정의하겠다. 그리고  $s_{jk}$ 는 상하좌우 픽셀에 대해서는 1, 대각 픽셀에 대해서는  $\sqrt{2}$ 를 나타내는 값이다. 그리고

$$\tau(x) = \delta^2 [|x/\delta| - \log(1 + |x/\delta|)] \quad (4.2)$$

을 나타낸다. 여기서 상수  $\delta > 0$ 는 시스템의 해상도를 고려하여 주어지는 값인데, 본 실험에서는  $\delta = 0.002(\text{cm}^{-1})$ 를 사용할 것이다. 식 (4.2)는 Green(1990)의 페널티 함수  $\tau(x) = \log \cosh(x)$ 와 비슷한 효과를 나타내지만 계산시간이 상대적으로 많이 요구되는 초월함수를 사용하지 않아 처리시간의 절감에 도움이 된다. 그리고 가중치  $w_{ij}$ 는

$$w_{ij} = \frac{l_{ij}}{\sum_{k \in \mathcal{D}} l_{ik}} \quad (4.3)$$

을 사용한다.

한편, 식 (3.16)의 EM-GCA 알고리즘은 매 단계에서  $p$  ( $1 \leq p \leq P$ ) 개의 모수를 동시에 갱신하는 축차적 방법을 사용한다. 그래서 본 논문에서는 전체 모수를 대략  $(P/p)$ 개의 그룹으로 분할 한 후 비복원 임의추출로 각 그룹 부분집합  $\mathcal{D}$ 를 구성하였다. Bouman과





그림 4.1: [실험 A]( $E(b_i) \approx 120$ ,  $\mu_i \approx 40$ ) 왼쪽에서 오른쪽으로; 실제 단층이미지, FBP 재구성, GCA 재구성, EM-GCA 재구성 이미지



그림 4.2: [실험 B]( $E(b_i) \approx 450$ ,  $\mu_i \approx 5$ ) 왼쪽에서 오른쪽으로; 실제 단층이미지, FBP 재구성, GCA 재구성, EM-GCA 재구성 이미지

Sauer(1996) 및 Fessler 등(1997)에서 지적한 바와 같이 축차적 갱신 기법은  $p$ 가 클수록 수렴속도는 점점 느려지는 반면 계산시간은 점점 줄어든다. 또  $p$ 가 작을수록 수렴속도는 점점 빨라지며 계산시간은 점점 늘어난다. 그러나 이 상충효과에 대한 최적의 절충은 존재하지 않으며, 어디까지나 프로세서의 성능 등을 고려하여 결정할 수 있을 것이다. 그리고 모든 픽셀을 한번씩 갱신하였을 때 1 순환(cycle)이라 부르기로 하자. 본 실험에서는 동시에 갱신하는 추정치의 부분집합의 수는  $|D| = 800$ 으로 하였다. 따라서  $8(=6400/800)$  번의 반복은 1 순환이 된다.

식 (3.16)에서 추정치의 비음조건을 충족시키기 위해서 초기치  $\theta^0$ 의 원소들은  $\theta_j^0 \geq 0$ 이 되도록 한다. 일반적으로 초기추정치로서 FBP 재구성 이미지를 많이 사용하는데, FBP의 추정치는 음의 값이 될 수 있으므로 본 실험에서는 음의 값을 0으로 치환한 FBP 재구성 이미지를 초기치로 사용할 것이다.

마지막으로 주어진 시스템과 작업요소 하에서 작업 시작 전에 EM-GCA 알고리즘의 수렴조건 (3.17)이 만족되는  $\beta \in [0, \beta_{\max}]$ 가 경험을 통해 알려져 있다고 가정한다. 본 모의실험에서는 재구성 이미지의 잡음대비 해상도를 고려하여 대략  $\nu = \beta\delta = 32(\text{cm}^{-1})$ 으로 결정하였다.

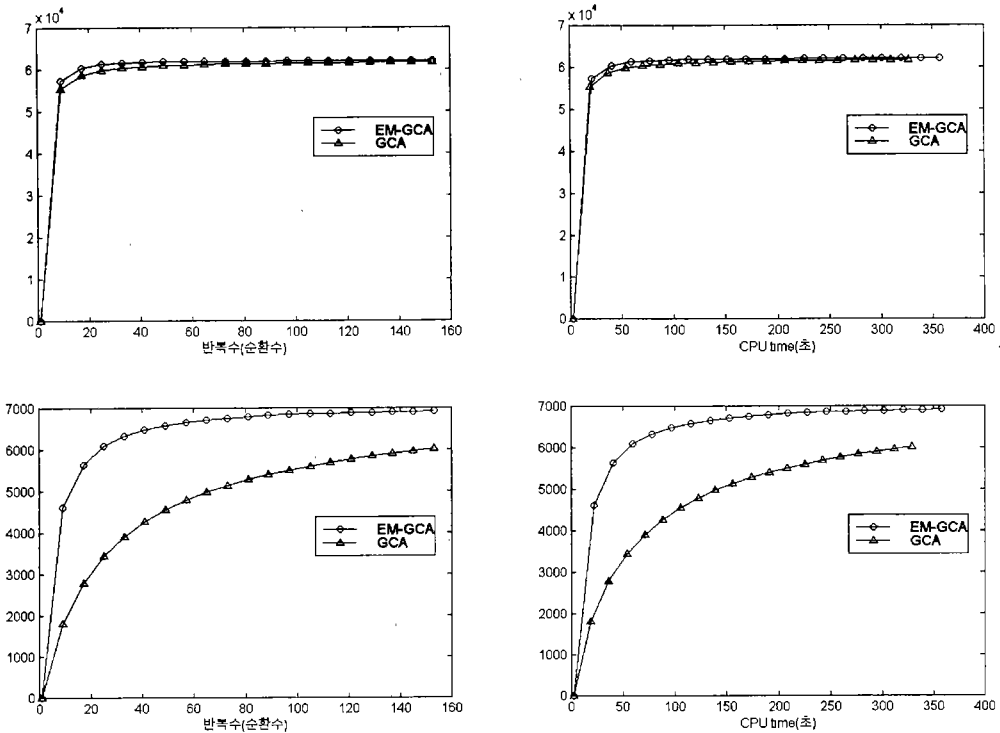


그림 4.3: 반복수 및 처리시간에 따른 대수우도:  $L(\theta^n) - L(\theta^0)$ . 상:[실험 A], 하:[실험 B]

### 4.2. 단층이미지 모의실험

모의관측치  $y_i$ 는 (팬텀을 중심으로  $0^\circ$ 에서  $179^\circ$ 까지  $1^\circ$  씩 회전하고, 또 주어진 사영각도에서 1cm 씩 수평이동(transverse)한 위치에서) 모의사영한 결과를 평균으로하는 포아송 난수( $x_i$ )에 독립적으로 생성한 평균을  $\mu_i$ 로 하는 포아송 난수( $e_i$ )를 더하여 생성하였다. 여기서는 두 종류의 토모그래피에 대해 모의실험을 하는데, 평균 입사 주광자수와 평균 부광자수가 각각  $E(b_i) \approx 120$ 과  $\mu_i \approx 40$ 인 경우(실험 A)와  $E(b_i) \approx 450$ 과  $\mu_i \approx 5$ 인 경우(실험 B)이다. 실험 A는 방출형 기기에 부착된 투과형 스캐너의 전형적인 경우를 모델링한 것으로 주광자수가 작고 부광자수가 주광자수의 대략 30% 정도되는 것이 특징이다. 실험 B의 경우는 강한 입사 에너지와 매우 희박한 부광자수를 갖는 전용 투과형 기기를 모델링한 것이다.

실험 A는 그림 4.1과 그림 4.3(상)을 볼 때 EM-GCA 알고리즘이 재구성 이미지의 화질이나 수렴속도 및 처리시간 면에서 GCA 알고리즘에 비교해 거의 비슷하거나 약간 좋은 결과를 나타내고 있다. 그러나 실험 B의 결과인 그림 4.2와 그림 4.3(하)는 EM-GCA 알고리즘의 성능을 뚜렷하게 보여주고 있다. 특히 GCA 알고리즘이 20 순환(혹은 약 340초)에 도달하게 되는 결과를 EM-GCA 알고리즘은 3 순환(혹은 약 55초)만에 도달함을 알 수 있다.

표 4.1: 추정 감쇠계수 비교(감쇠계수 추정치의 ROI 별 평균, 괄호 내는 변이계수)

구분	ROI	몸체	심장	폐	척추	기관지
	실제 감쇠계수	0.030	0.050	0.005	0.120	0.070
실험 A	GCA	0.0316 (0.1802)	0.0508 (0.1170)	0.0108 (0.5265)	0.1036 (0.1166)	0.0473 (0.0784)
	EM-GCA	0.0326 (0.1668)	0.0551 (0.1252)	0.0080 (0.6708)	0.1235 (0.1162)	0.0565 (0.0696)
실험 B	GCA	0.0300 (0.1660)	0.0501 (0.1096)	0.0065 (0.5630)	0.1143 (0.1268)	0.0646 (0.1099)
	EM-GCA	0.0303 (0.1162)	0.0512 (0.0765)	0.0056 (0.5187)	0.1222 (0.0697)	0.0696 (0.0856)

표 4.1은 두 실험에서 GCA와 EM-GCA가 각각 20 순환에서 얻은 부위(ROI)별 감쇠계수 추정치를 비교한 것이다. 이 자료의 비교에서 EM-GCA의 추정치가 GCA에 비해 편의와 분산이 더 크다는 증거를 발견할 수 없다.

이상의 실험 결과는 GCA 알고리즘이 방출형 기기에서의 투과형 토모그래피에 적당한 알고리즘인 반면, EM-GCA 알고리즘은 방출형 기기 뿐 아니라 투과형 전용기기에서 매우 합당한 투과형 토모그래피 재구성 알고리즘임을 말해주고 있다.

## 5. 결론 및 추가논의

본 논문에서는 최근 투과형 토모그래피 재구성 위해 수렴속도와 처리시간 면에서 기존의 방법보다 월등한 것으로 소개된 GCA 알고리즘의 단점을 지적하고, 그 대안으로 EM-GCA 알고리즘을 제안하였다. EM-GCA는 단위 프로세서 수에 관계없이 병렬처리가 가능한 알고리즘으로서 아주 크지 않은  $\beta$ 의 조건 하에서 GEM이며, 따라서 GCA와는 다르게 반드시 대수우도의 단조증가성을 보장하며 수렴한다. 그리고 수렴속도나 처리시간이 GCA 알고리즘보다 우위에 있음을 실험을 통해 확인할 수 있었다. 한편 GCA 알고리즘은 추정치의 비음조건을 만족시키기 위해

$$[u(x)]_+ = \begin{cases} 0, & u(x) < 0 \\ u(x), & u(x) \geq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

을 사용하고 있는데, 이 기법은 대수우도의 단조증가성을 보장하지 못한다. 반면, 식(3.14)의  $[u(x)]_{++}$ 은 초기치  $\{\theta_j^0\}$ 의 픽셀 모두를 양의 값으로 하면 비음조건을 만족시키며 단조성을 보장한다.

마지막으로 4절에서의 실험은 Pentium(intel 300MHz)에서 Image Processing toolbox를 갖춘 Matlab v5.2를 사용하여 프로그래밍하였다. Matlab과 같은 소프트웨어들은 프로그래

밍이 편리하나 루프의 처리속도가 느리다. 따라서 본 실험의 처리시간은 C++, Pascal 혹은 Fortran 등의 컴파일 언어를 이용할 경우보다 훨씬 지연된 결과임을 밝혀둔다.

### 부록 A: EM-GCA 알고리즘

페널티 함수와 가중치  $w_{ij}$ 는 식 (4.1)과 (4.3)에 정의를 사용하고,  $c_i \triangleq \sum_{k \in \mathcal{D}} l_{ik}$ ,  $M_i^n \triangleq E(x_i|\theta^n) = -b_i \exp(-\langle l_i, \theta^n \rangle)$  그리고  $\nu \triangleq \beta\delta$ 라 쓰자. 이때 EM-GCA 알고리즘은

$$\theta_j^{n+1} = \left[ \theta_j^n + \frac{\text{Num}_j(\theta^n) - \nu \text{Pen}_j(\theta^n)}{\text{Den}_j(\theta^n)} \right]_{++}, \quad \forall j \in \mathcal{D} \quad ; \quad \theta_j^{n+1} = \theta_j^n, \quad \forall j \in \mathcal{D}^c$$

단,

$$\begin{aligned} \text{Num}_j(\theta^n) &= \sum_{i=1}^N \left\{ E(x_i|\theta^n) - E(x_i|y_i, \theta^n) \right\} l_{ij} = \sum_{i=1}^N \left\{ M_i^n - y_i \left( \frac{M_i^n}{M_i^n + \mu_i} \right) \right\} l_{ij} \\ \text{Den}_j(\theta^n) &= \sum_{i=1}^N E(x_i|\theta^n) \left( \frac{l_{ij}^2}{w_{ij}} \right) = \sum_{i=1}^N c_i M_i^n l_{ij} \\ \text{Pen}_j(\theta^n) &= \sum_{k \in \partial_j} \left( 1 + \frac{\delta}{|\theta_j^n - \theta_k^n|} \right)^{-1} \end{aligned}$$

으로 표현된다.

### 부록 B: 정리 3.1의 증명

표현의 간편함을 위해서  $dF(\theta_G^n) \triangleq \partial F(\theta_G|\theta^n)/\partial \theta_G|_{\theta_G=\theta_G^n}$  및  $d^2F(\theta_G^n) \triangleq \partial^2 F(\theta_G|\theta^n)/\partial \theta_G \partial \theta_G^T|_{\theta_G=\theta_G^n}$  이라 쓰자. 그리고 집합  $\mathcal{G}$ 를  $\mathcal{G}$ 의 여집합이라 하자. 우선  $d\phi_\beta(\theta_G^n) = dQ_\beta(\theta_G^n)$  임을 주목한다면, EM-GCA 알고리즘  $\theta_G^{n+1} = \theta_G^n - [d^2\phi(\theta_G^n)]^{-1} d\phi_\beta(\theta_G^n)$ 은  $\mathbf{a} \triangleq \theta_G^{n+1} - \theta_G^n = -[d^2\phi(\theta_G^n)]^{-1} dQ_\beta(\theta_G^n)$  으로 나타낼 수 있다. 그래서  $\Delta\theta^n \triangleq \theta^{n+1} - \theta^n = [\mathbf{a}^T : \mathbf{0}^T]^T$ 로 나타내자. 한편,  $\theta^{n+1} = \theta^n$ 에 관한  $Q_\beta(\theta^{n+1}|\theta^n)$ 의 Taylor 전개로부터

$$\begin{aligned} \Delta Q_\beta(\theta^n|\theta^n) &\triangleq Q_\beta(\theta^{n+1}|\theta^n) - Q_\beta(\theta^n|\theta^n) \\ &= dQ_\beta(\theta^n)^T(\Delta\theta^n) + (1/2)(\Delta\theta^n)^T d^2Q_\beta(\theta^n)(\Delta\theta^n) + o(\|(\Delta\theta^n)^T(\Delta\theta^n)\|) \\ &= dQ_\beta(\theta_G^n)^T \mathbf{a} + (1/2)\mathbf{a}^T d^2Q_\beta(\theta_G^n)\mathbf{a} + o(\|\mathbf{a}^T \mathbf{a}\|) \\ &= (1/2)\mathbf{a}^T K \mathbf{a} + o(\|\mathbf{a}^T \mathbf{a}\|) \end{aligned}$$

단,  $K = d^2Q_\beta(\theta_G^n) - 2d^2\phi(\theta_G^n) = (d^2Q(\theta_G^n) - d^2\phi(\theta_G^n)) + (-d^2\phi(\theta_G^n) - \beta d^2J(\theta_G^n))$ . 여기서  $Q(\cdot|\theta^n)$ 과  $\phi(\cdot|\theta^n)$ 는 모두 오목함수이므로, 부등식 (3.5)의 관계로부터  $\theta_G \in \mathbb{R}^{|\mathcal{G}|}$ 에 대해,  $\theta_G \neq \theta_G^n$ 이라면  $Q(\theta_G|\theta^n) > \phi(\theta_G|\theta^n)$  임을 알 수 있다. 이는 곧  $\mathbf{a}^T (d^2Q(\theta_G^n) - d^2\phi(\theta_G^n)) \mathbf{a} > 0$ 을 의미한다. 따라서  $|\mathbf{a}^T K \mathbf{a}| > o(\|\mathbf{a}^T \mathbf{a}\|)$ 이므로  $\mathbf{a}^T K \mathbf{a} > \mathbf{a}^T (-d^2\phi(\theta_G^n) - \beta d^2J(\theta_G^n)) \mathbf{a} \geq 0$ . 즉

$\Delta Q_\beta(\theta^n|\theta) > 0$  임을 말한다. 결국 행렬  $K$ 는 양정치 행렬이고,  $\mathbf{a}^T K \mathbf{a} > o(\|\mathbf{a}^T \mathbf{a}\|)$ 이므로  $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 일 때만 즉  $\theta^{n+1} = \theta^n$ 에 대해서만  $\Delta Q_\beta(\theta^n|\theta^n) = 0$ 이 성립한다.

## 참고문헌

- [1] 김승구(1996). PEM 그래디언트 알고리즘에 관한 연구. <한국통계학회논문집>, 제3권 2호, pp 239-247.
- [2] Bouman, C. and K. Sauer(1996). A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization. *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 5, no. 3, pp. 480-492.
- [3] De Pierro, A. R.(1995). A modified expectation maximization algorithm for penalized likelihood estimation in emission tomography. *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 14, no. 2, pp. 328-333.
- [4] Fessler, J. A.(1994). Penalized weighted least-squares image reconstruction for positron emission tomography. *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 13, no. 2, pp. 290-300.
- [5] Fessler, J. A. and A. O. Hero(1994). Space-alternating generalized expectation-maximization algorithm. *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 10, pp. 2664-2677.
- [6] Fessler, J. A.(1995). Hybrid poisson/polynomial objective functions for tomographic image reconstruction from transmission scans. *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 4, no. 10, pp. 1439-1450.
- [7] Fessler, J. A., E. P. Figaro, N. H. Clinthorne and K. Lange(1997). Grouped-Coordinate Ascent Algorithms for Penalized-Likelihood Transmission Image Reconstruction scans. *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 16, no. 2, pp. 166-176.
- [8] Green, P. J.(1990). Bayesian Reconstruction from emission tomography data using a modified algorithm. *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 9, no. 1, pp. 84-93.
- [9] Lange, K. and R. Carson(1984). EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *Journal of Computer Assisted Tomography*, vol. 8, no. 2, pp. 306-316.
- [10] Lange, K., M. Bahn and R. Little(1987). A theoretical study of some maximum likelihood algorithms for emission and transmission tomography. *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. MI-6, no. 2, pp. 106-114.
- [11] Lange, K.(1991). Convergence of EM image reconstruction algorithms with Gibbs smoothing. *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 9, no. 4, pp. 439-446.

- [12] Lange, K. and J. A. Fessler(1995). Globally convergent algorithms for maximum a posteriori transmission tomography. *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 4, no. 10, pp. 1430-1438.
- [13] Ollinger, J. M.(1994). Maximum likelihood reconstruction of transmission in emission computed tomography via the EM algorithm. *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 13, no. 1, pp. 89-101.

[ 1998년 12월 접수, 1999년 4월 최종수정 ]

## GCA Reconstruction Algorithm within the EM model for Transmission Computed Tomography

Seung Gu Kim<sup>1)</sup>

### ABSTRACT

Unlike emission tomography, most statistical algorithms for the reconstruction of transmission tomography yield low convergence rate and very expensive processing time, which is mainly due to the reason that they are based on Lange and Carson's model. The CGA algorithm, recently proposed, appears a remarkable candidate with fast convergence and processing time. Unfortunately, the GCA algorithm does not, at least in theoretical, guarantee the nonotonic increasing of likelihood, and needs additional searching time for this purpose. In this paper, a reconstruction algorithm of transmission tomography, called EM-GCA, is proposed. The EM-GCA algorithm guarantees the monotonicity of likelihood and is faster in convergence and processing time than the GCA algorithm.

---

1) Dept. of Applied statistics, Sang Ji University, associate professor