응용통계연구 제 12권 2호, 1999년, pp. 479-490

시계열모형에서 추정함수를 이용한 로버스트 추론방법

차경엽[1) 김삼용[2) 이성덕[3)

요 약

선형시계열모형인 AR(1)모형과 비선형시계열모형인 RCA(1), ARCH(1)모형에서 이상치(Outlier)가 존재할 경우 최소제곱추정량과 M추정량간의 점근상대효율(Asymptotic Relative Efficiency: ARE)을 구하여 두 추정량의 로버스트 성질을 비교·분석하였다. 또한 여러 유계함수(Huber, Tukey, Andrews, Hampel)들을 M 추정함수에 적용하여 각각의 유계함수들을 비교·분석하였다.

1. 서론

전통적인 통계적 추정법은 모집단에 대해 정규분포를 가정하는 정규성 이론이나 편차의 제곱합을 최소화 시키는 최소제곱추정법 이론에 의하여 개발되고 연구되어 왔다. 그리고 정규이론에 대한 통계적 방법들은 대부분 정규성 가정에 매우 민감하다. 데이터들 가운데 이상치가 있거나 데이터들이 두터운 꼬리 또는 한쪽이 치우친 분포를 갖고 있을 경우 정규성의 가정이 만족되지 않는다. 이럴 경우 정규이론에 근거한 추정량은 이론적인 오차보다도 더 많은 오류 가능성을 내포할 수 있다. 로버스트(Robust) 추정법들은 이와 같은 문제들을 보완하기 위하여 개발된 기법들로서 M 추정법(M estimation)이 가장 일반적으로 사용된다. M 추정법은 최대우도추정법(또는 최소제곱추정법)이 이상치의 영향에 의하여 추정치로서의 의미가 없어지는 단점을 보완하기 위해 추정함수(Estimating Function)에 이상치를 감지할 수 있게 유계(bounded)함수를 적용하여 로버스트한 추정량을 얻고자 하는 방법으로 Huber(1964)가 위치문제에서 M 추정량(M estimator)을 제안한 이후, 시계열모형에서의 로버스트 추정은 Denby와 Martin(1979)에 의해 처음 연구되었다. 그들은 자기회귀(Autoregressive: AR)모형에서 이상치가 존재할 경우 M 추정량이 최소제곱추정량보다 효율성 면에서 우수함을 보였다. 그리고 Bustos와 Yohai(1986)는 자기회귀이동평균(Autoregressive Moving Average: ARMA)모형에서 RA(Residual Autocovariance) 추정법을 제안하였다. 선형시계열모형에 대한 로버스트 추론은 많이 연구되었으나 비선형 시계열모형에서의 로버스트 추론은 이제 시작에 불과한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 선형시계열모형인 AR모형과 비선형시계열모형인 확률계수자기회귀(Random Coefficient Autoregressive: RCA)모형, 조건부 이분산성자기회귀(Autoregressive Conditional Heteroskedastic: ARCH)모형에서 최소제곱추정량과 M 추정량간의 점근상대효율을 구하여, 두 추정량의 로

1) (137-800) 서울특별시 서초구 염곡동 300-4, 한국태평양경제협력위원회, 연구원
2) (305-390) 대전광역시 유성구 전민동 463-1, 한국통신 통신망연구소, 전임연구원
3) (360-763) 충북 청주시 흥덕구 개신동 산 48, 충북대학교 자연과학대학 통계학과, 교수

버스트 성질을 비교·분석하고자 한다. 또한 유계함수로 가장 보편적으로 이용되고 있는 Huber함수를 비롯하여 Tukey, Andrews, Hampel함수들을 M 추정함수에 적용하여 선형·비선형시계열 모형에서의 유계함수들이 이상치를 감지할 수 있는지를 알아보고자 한다.

2. 최소제곱추정법

일반적인 시계열모형(Time Series Model)을 다음과 같이 정의하고자 한다.

$$X_t = H(\underline{X}_{t-1}, Z_t; \theta) + e_t, \ t = 1, 2, \cdots, n \tag{2.1}$$

여기서 $\underline{X}_{t-1}$는 $\underline{X}_{t-1} = (X_{t-1}, \cdots, X_{t-p})$이다. e_t는 평균이 0이고 분산이 σ_e^2인 iid(identically and independently distributed)한 확률변수이고 Z_t는 평균이 0이고 분산이 σ_z^2인 iid한 확률벡터이다. 그리고 함수 H는 관찰값과 모수들로 이루어진 함수이다. 여기서 Z_t는 e_t와 $\underline{X}_{t-1}$에 상호독립이라 가정한다. 최소제곱추정량은 일반적으로 다음을 만족하는 추정량을 의미한다.

$$\min_{\theta} \sum \{X_t - \mu_t(\underline{X}_{t-1}; \theta)\}^2 \tag{2.2}$$

여기서 조건부 기대치는 $\mu_t(\underline{X}_{t-1}; \theta) = E(X_t | \Im_{t-1})$, $\Im_{t-1} = \sigma(X_{t-1}, \cdots, X_{t-p})$이다. 최소제곱추정함수를 다음과 같이 정의한다.

$$S_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n} g(X_t; \theta) = \sum_{t=1}^{n} \{X_t - \mu_t(\underline{X}_{t-1}; \theta)\} (\frac{\partial \mu_t(\underline{X}_{t-1}; \theta)}{\partial \theta}) \tag{2.3}$$

식(2.3)에서 $S_n(\theta) = 0$을 만족하는 추정량은 최소제곱추정량이다. 최소제곱추정량에 대한 극한분포를 얻기 위해 다음과 같은 정상조건(Regularity condition)을 제시하고자 한다.

< 정상조건 >

2.1 $\{X_t\}$는 정상성(Stationary)과 에르고딕(Ergodic)을 만족하는 확률과정(Stochastic process)이다.

2.2 행렬 $F(\theta)$가 다음과 같이 존재하고 이 행렬은 양정치(positive definite)행렬이다.

$$F(\theta) = E_\theta [\frac{\partial \mu_t(\underline{X}_{t-1}; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \mu_t(\underline{X}_{t-1}; \theta)}{\partial \theta}^T]$$

2.3 $\theta^* \xrightarrow{p} \theta$를 만족하는 θ^*는 다음을 만족한다.

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} [\frac{\partial}{\partial \theta} g(X_t; \theta^*) - \frac{\partial}{\partial \theta} g(X_t; \theta)] \xrightarrow{p} 0$$

정리 2.1 정상조건 2.1-2.3하에서 최소제곱추정량의 극한분포는 다음과 같다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N_p(0, F^{-1}(\theta)) \tag{2.4}$$

증명: 추정함수에 대해 Taylor 급수전개를 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{\sqrt{n}}S_n(\theta) &= -\tfrac{1}{\sqrt{n}}S_n(\hat{\theta}_n) + \tfrac{1}{n}\tfrac{\partial S_n(\theta)}{\partial\theta}\big|_{\theta=\theta^*}\ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta) \\ &= \tfrac{1}{n}\{\sum_{t=1}^{n}\tfrac{\partial g(X_t\ ;\ \theta^*)}{\partial\theta}\}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta) \end{aligned} \tag{2.5}$$

여기서 θ^*는 θ와 $\hat{\theta}_n$사이에 있는 추정량이다. 정상조건 2.3에 의해 다음과 같은 극한이론을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial g(X_t;\theta^*)}{\partial\theta} - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial g(X_t;\theta)}{\partial\theta}\ \xrightarrow{p}\ 0 \tag{2.6}$$

그리고

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial g(X_t;\theta)}{\partial\theta} &= \tfrac{\partial}{\partial\theta}[\{X_t-\mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)\}\tfrac{\partial\mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)}{\partial\theta}] \\ &= -\tfrac{\partial\mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)}{\partial\theta}\tfrac{\partial\mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)}{\partial\theta}^T + \{X_t-\mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)\}\tfrac{\partial^2\mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)}{\partial\theta^2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

여기서 $E_\theta[\{X_t-\mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)\}\frac{\partial^2\mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)}{\partial\theta^2}\mid\Im_{t-1}]=0$ 이다. 왜냐하면 $\{X_t-\mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)\}$ 는 martingale difference이면 조건부 기대치는 0이기 때문이다(Hall과 Heyde,1980). 에르고딕 이론을 이용하여 다음과 같은 근사이론을 얻을 수 있다.

$$-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial g(X_t;\theta)}{\partial\theta}\ \xrightarrow{a.s.}\ F(\theta) \tag{2.8}$$

그리고 $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n(\theta)$는 중심극한정리에 의해 근사적으로 평균이 0이고 분산이 $F(\theta)$인 정규분포를 따르므로 다음과 같은 최소제곱추정량의 극한분포를 얻을 수 있다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)\ \xrightarrow{d}\ N_p(0,\ F^{-1}(\theta)) \tag{2.9}$$

□

예제 2.1: (AR(1) 모형) AR(1) 모형은 다음과 같다.

$$X_t = \theta X_{t-1} + e_t$$

여기서 e_t는 평균이 0이고 분산이 σ_e^2인 iid한 확률변수이다. 그리고 정상성을 만족하기 위해서는 $|\theta|<1$이어야 한다. 최소제곱추정함수는 다음과 같이 정의된다.

$$S_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n}(X_t-\theta X_{t-1})X_{t-1} \tag{2.10}$$

따라서 최소제곱추정량에 대한 극한분포는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)\ \xrightarrow{d}\ N(0,\ \frac{\sigma_e^2}{E(X_{t-1}^2)}) \tag{2.11}$$

예제 2.2: (RCA(1) 모형) RCA(1)모형은 다음과 같다.

$$X_t = (\theta + Z_t)X_{t-1} + e_t$$

여기서 e_t는 평균이 0이고 분산이 σ_e^2인 iid한 확률변수이다. 그리고 Z_t는 평균이 0이고 분산이 σ_z^2인 iid한 확률변수이다. 또한 Z_t는 e_t와 독립이다. 정상성을 만족하기 위해서는 $\theta^2 + E(Z_t)^2 < 1$ 이어야 한다.(Nicholls과 Quinn,1982)최소제곱추정함수는 다음과 같이 정의된다.

$$S_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n}(X_t - \theta X_{t-1})X_{t-1} \tag{2.12}$$

따라서 최소제곱추정량에 대한 극한분포는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \frac{\sigma_z^2 E(X_{t-1}^4) + \sigma_e^2 E(X_{t-1}^2)}{[E(X_{t-1}^2)]^2}) \tag{2.13}$$

예제 2.3: (ARCH(1) 모형) ARCH(1)모형은 다음과 같다.

$$X_t = \theta X_{t-1} + e_t$$

여기서 $e_t \mid \Im_{t-1} \sim N(0, h_t)$, $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2$, $\alpha_0 > 0$,$\alpha_1 \geq 0$이다. e_t는 평균이 0이고 분산이 과거값 e_{t-1}에 종속된 확률변수이다. 그리고 정상성을 만족하기 위해서는 $|\theta| < 1$이어야 한다. (Engle,1982) 또한 분산 h_t가 존재하기 위해서는 $\alpha_1 < 0$이어야 한다.(Bollerslv,1986) 분산 h_t가 존재할 때 e_t의 분산은 다음과 같다.

$$\sigma_e^2 = E[e_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

최소제곱추정함수는 다음과 같이 정의된다.

$$S_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n}(X_t - \theta X_{t-1})X_{t-1} \tag{2.14}$$

따라서 최소제곱추정량에 대한 극한분포는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \frac{\sigma_e^2}{E(X_{t-1}^2)}) \tag{2.15}$$

3. M 추정법

2장에서 정의한 최소제곱추정법은 이상치가 존재하였을 경우 추정함수 자체에 큰 영향을 미치므로 로버스트한 추정량을 얻지 못한다. 따라서 추정함수에 유계함수를 정의하여 로버스트 한 추정량(M 추정량)을 얻고자 한다. M 추정량을 얻기 위해 다음과 같은 M 추정

함수를 정의한다.

$$
\begin{aligned}
S_n^*(\theta)=\sum_{t=1}^{n} g^*(X_t;\theta) &= \sum_{t=1}^{n}\psi_1\{X_t-\mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)\}\psi_2(\frac{\partial\mu_t(\underline{X}_{t-1};\theta)}{\partial\theta}) \\
&= \sum_{t=1}^{n}\begin{bmatrix} g_1^*(X_t;\theta) \\ \vdots \\ g_p^*(X_t;\theta)\end{bmatrix} \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

즉, 식(3.1)에서 $S_n^*(\theta)=0$을 만족시키는 $\hat{\theta}$는 M 추정량이다. 일반적으로 사용되는 유계함수(ψ_1,ψ_2)로는 Huber함수(Huber, 1964), Tukey함수(Beaton등, 1974), Andrews함수(Andrews등, 1972) 그리고 Hampel함수(Andrews등, 1972)등이 있다.

1) *Huber*함수 : $\psi(x)=\begin{cases} x & |x|\le k \\ k\ sign(x) & |x|>k\end{cases}$

2) *Tukey*함수 : $\psi(x)=\begin{cases} x(1-\frac{x^2}{k^2})^2 & |x|<k \\ 0 & |x|>k\end{cases}$

3) *Andrews*함수 : $\psi(x)=\begin{cases} sin(\frac{x}{k}) & |x|<k \\ 0 & |x|>k\end{cases}$

4) *Hampel*함수 : $\psi(x)=\begin{cases} x & |x|\le k \\ k\ sign(x) & k<|x|\le l \\ \frac{k\ sign(x)(m-|x|)}{m-l} & l<|x|\le m \\ 0 & |x|>m\end{cases}$

여기서 상수 k, l, m을 조율상수(tuning constant)라 하고 일반적으로 Huber함수에서는 k=1.5, Tukey함수에서는 k=6, Hampel함수에서는 k=1.7, l=3.4, m=8.5가 추천된다. M 추정량에 대한 극한분포를 얻기 위해 다음과 같은 정상조건을 제시하고자 한다.

< 정상조건 >

3.1 $\{X_t\}$는 정상성과 에르고딕을 만족하는 확률과정이다.

3.2 ψ_1,ψ_2는 유계함수(Bounded function)이고 θ에 대해 미분가능하다.

3.3 $E[\psi_1(e_1)]=0$, 이 조건은 위의 추정함수들을 martingale difference들의 합으로 만들기 위한 조건이다.

3.4 $\theta^*\xrightarrow{p}\theta$를 만족하는 θ^*는 다음의 식을 만족한다.

$$\frac{1}{n}\sum_{t}^{n}[\frac{\partial g^*(X_t;\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial g^*(X_t;\theta)}{\partial\theta}|_{\theta=\theta^*}]\xrightarrow{p} 0$$

3.5 $a_{ij}=E_\theta(\frac{\partial g_i^*}{\partial\theta_j})$ 가 존재하고 $A_{pXp}=((a_{ij}))$는 음이 아닌(non-negative)행렬이다.

3.6 $b_{ij} = E_\theta(g_i^* g_j^*)$가 존재하고 $B_{pXp} = ((b_{ij}))$는 양정치(positive definite)행렬이다.

정리 3.1 정상조건 3.1-3.6 하에서 M 추정량의 극한분포는 다음과 같다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N_p(0, V(\theta)) \tag{3.2}$$

여기서 $V(\theta) = [A^T(\theta)B(\theta)^{-1}A(\theta)]^{-1}$ 이다.

증명: 추정함수에 대해 Taylor 급수전개를 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\sqrt{n}}S_n^*(\theta) &= -\frac{1}{\sqrt{n}}S_n^*(\hat{\theta}_n) + \frac{1}{n}\frac{\partial S_n^*(\theta)}{\partial\theta}|_{\theta=\theta^*}\ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial g^*(X_t;\theta)}{\partial\theta}|_{\theta=\theta^*}\ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \end{aligned} \tag{3.3}$$

여기서 θ^*는 θ와 $\hat{\theta}_n$사이에 있는 추정량이다. 정상조건 3.4를 이용하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[\frac{\partial g^*(X_t;\theta)}{\partial\theta}] \xrightarrow{a.s} A \tag{3.4}$$

그리고 $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n^*(\theta)$는 중심극한정리에 의해 근사적으로 평균이 0이고 분산이 B인 정규분포를 따르므로 M 추정량에 대한 극한분포는 다음과 같이 주어진다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N_p(0, V(\theta)) \tag{3.5}$$

여기서 $V(\theta) = [A^T(\theta)B^{-1}(\theta)A(\theta)]^{-1}$이다.

□

예제 3.1: (AR(1) 모형)

M 추정함수는 다음과 같이 주어진다.

$$S_n^*(\theta) = \sum_{t=1}^{n}\psi_1(e_t(\theta))\psi_2(X_{t-1}) \tag{3.6}$$

여기서 $e_t(\theta) = X_t - \theta X_{t-1}$이다. M 추정량에 대한 극한분포는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0,\ \frac{E[\psi_1(e_t(\theta))\psi_2(X_{t-1})]^2}{[E(\frac{\partial\psi_1(e_t(\theta))}{\partial\theta}\psi_2(X_{t-1}))]^2}) \tag{3.7}$$

예제 3.2: (RCA(1) 모형)

M 추정함수는 다음과 같이 주어진다.

$$S_n^*(\theta) = \sum_{t=1}^{n}\psi_1(e_t(\theta))\psi_2(X_{t-1}) \tag{3.8}$$

여기서 $e_t(\theta) = X_t - \theta X_{t-1}$이다. M 추정량에 대한 극한분포는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0,\ \frac{E[\psi_1(e_t(\theta))\psi_2(X_{t-1})]^2}{[E(\frac{\partial\psi_1(e_t(\theta))}{\partial\theta}\psi_2(X_{t-1}))]^2}) \tag{3.9}$$

예제 3.3: (ARCH(1) 모형)
M 추정함수는 다음과 같이 주어진다.

$$S_n^*(\theta) = \sum_{t=1}^{n} \psi_1(e_t(\theta))\psi_2(X_{t-1}) \tag{3.10}$$

여기서 $e_t(\theta) = X_t - \theta X_{t-1}$이다. M 추정량에 대한 극한분포는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \ \xrightarrow{d} \ N(0, \ \frac{E[\psi_1(e_t(\theta))\psi_2(X_{t-1})]^2}{[E(\frac{\partial\psi_1(e_t(\theta))}{\partial\theta}\psi_2(X_{t-1}))]^2}) \tag{3.11}$$

4. 시뮬레이션 연구

선형시계열 모형인 AR(1)모형과 비선형시계열모형인 RCA(1), ARCH(1)모형에서 모수 θ를 0.5로 하고 e_t를 표준정규분포, 오염정규분포, 이중지수분포로 변화시켜서 이상치가 존재하지 않은 모형(e_t가 오염정규분포 또는 이중지수분포)에 대해 난수를 발생하였다. 그리고 시계열 난수를 이용하여 최소제곱추정량의 근사분산과 M 추정량의 근사분산을 구하였다. 여기서 M 추정량에 쓰인 유계함수로는 Huber, Tukey, Andrews, Hampel함수들을 적용하였으며 같은 함수로 사용하였다. 그리고 최소제곱추정량과 M 추정량간의 효율성을 비교하기 위하여 점근상대효율을 이용하였다. 만약 점근상대효율이 1보다 작으면 M 추정량의 근사분산이 최소제곱추정량의 근사분산보다 작음을 알 수 있다. 따라서 M 추정량이 최소제곱추정량보다 효율성 면에서 우수함이 입증되는 것이다. 그리고 표본의 개수(n=50,100)를 변화시켜서 소표본과 대표본에서의 효율성의 변화를 알아 보았다. 이 시뮬레이션은 반복수 1000번을 통해 시뮬레이션 결과를 얻어냈다.
오염분포 : $CN(0, \sigma_c^2, \gamma) = (1-\gamma)N(0,1) + \gamma N(0, \sigma_c^2)$ 여기서 γ는 오염도, σ_c^2은 오염분산.
이중지수분포 : $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \ -\infty < x < \infty$
점근상대효율 : $\frac{Var(\hat{\theta}_M - \theta)}{Var(\hat{\theta}_{LS} - \theta)}$

5. 결론

모형에 이상치가 존재하지 않을 경우 AR(1)모형과 ARCH(1)모형에서 최소제곱추정량이 M 추정량보다 효율적임을 알 수 있었으나 RCA(1)모형에서는 M 추정량이 보다 효율적임을 알 수 있었다. e_t가 오염정규분포인 경우 오염도가 클수록, 오염정규분포의 분산이 커질수록 M 추정량이 보다 효율적임을 알 수 있었다. 특히 RCA(1)모형에서 오염도 및 오염정규분포의 분산이 커짐에 따라 최소제곱추정량의 분산이 AR(1), ARCH(1)모형과 비교하여 상대적으로 큼을 알 수 있었다. 즉 M추정량은 이상치를 감지하여 보다 로버스트한 추정량을 얻을 수 있는 반면 최소제곱추정량은 이상치가 추정함수에 영향을 미치므로 좋은 추정량을 얻을 수 없음을 알 수 있었다. 그리고 e_t가 이중지수분포일 경우도 M 추정량이 최

소제곱추정량보다 효율적이었고 유계함수들 중 Huber함수가 Tukey, Andrews, Hampel함수보다 이상치를 감지할 수 있는 능력이 우수함을 알 수 있었다. 그리고 소표본(표본수가 50인 경우)과 대표본(표본수가 100인 경우)에서의 점근상대효율을 비교한 결과 큰 차이가 없었다.

참고문헌

[1] Andrews, D. F., Bickel, P. J., Hampel, F. R., Huber, P. J., Rogers, W. H. and Tukey, J. W.(1972). *Robust Estimates of Location : Survey and Advances*, Princeton Univ. Press.

[2] Beaton, A. E. and Tukey, J. W. (1974). The Fitting of Power Series, Meaning Polynomials, Illustrated on Band-Spectroscopic Data, *Technometrics*, vol. 16, 147-185.

[3] Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

[4] Bustos, O. H. and Yohai, V. J. (1986). Robust Estimates for ARMA Models, *Journal of American Statistical Association*, vol. 81, 155-168.

[5] Denby, L. and Martin, R. D. (1979). Robust Estimation of the First-Order Autoregressive Parameter, *Journal of American Statistical Association*, vol. 74, 140-146

[6] Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation, *Econometrica*, 50, 987-1008.

[7] Hall, P. and Heyde, C. C. (1980). *Matringale Limit Theory and Applications*, Academic Press

[8] Huber, P. J. (1964). Robust Estimation of a Location Parameter,*The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 35, 73-101.

[9] Nicholls, D. F. and Quinn, B. G. (1982). *Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction*, Lecture Note in Statistics No 11, Springer, New York.

[1998년 9월 접수, 1999년 6월 최종수정]

표 4.1: AR(1)모형에서의 점근상대효율($\theta = 0.5$)

가. Huber 함수

				표준정규분포	이중지수분포	오염정규분포								
						3% 오염			5% 오염			10% 오염		
						오염분산			오염분산			오염분산		
						5	10	20	5	10	20	5	10	20
n	50	k	1	1.130	0.878	1.056	1.047	1.102	1.372	1.036	0.896	1.059	0.786	0.590
			1.5	1.047	0.972	0.970	1.078	0.945	1.002	0.872	0.829	0.991	0.818	0.755
			2	1.005	0.977	1.099	0.871	0.955	1.086	0.857	0.855	1.241	0.957	0.783
	100	k	1	1.220	0.972	1.048	0.944	0.804	1.261	0.974	0.893	0.999	0.807	0.512
			1.5	1.212	0.963	0.886	1.064	0.751	1.167	0.820	0.837	0.998	0.816	0.743
			2	1.163	0.969	0.973	0.971	0.813	1.002	0.891	0.839	0.989	0.961	0.791

나. Tukey 함수

				표준정규분포	이중지수분포	오염정규분포								
						3% 오염			5% 오염			10% 오염		
						오염분산			오염분산			오염분산		
						5	10	20	5	10	20	5	10	20
n	50	k	3.5	1.210	1.008	1.111	1.265	1.228	1.376	1.239	1.163	1.299	1.117	1.004
			4	1.138	0.962	1.080	1.242	1.071	1.150	1.049	1.0432	1.351	1.068	0.997
			4.5	1.090	0.894	1.200	0.956	1.021	1.184	0.955	0.945	1.432	1.036	1.006
	100	k	3.5	1.289	0.995	1.317	1.082	1.081	1.438	1.294	1.012	1.121	1.119	0.984
			4	1.321	0.951	1.014	1.250	0.960	1.083	1.082	0.992	1.034	1.034	1.003
			4.5	1.275	0.883	1.076	1.074	1.045	1.118	0.994	0.973	1.179	0.996	0.962

다. Andrews 함수

				표준정규분포	이중지수분포	오염정규분포								
						3% 오염			5% 오염			10% 오염		
						오염분산			오염분산			오염분산		
						5	10	20	5	10	20	5	10	20
n	50	k	1	1.213	1.018	1.109	1.269	1.233	1.512	1.248	1.175	1.303	1.131	1.199
			1.5	1.041	0.938	0.964	1.116	1.007	1.028	1.077	0.950	1.149	0.906	1.039
			2	1.004	0.929	0.902	0.882	0.964	1.082	0.929	0.903	1.219	0.945	0.845
	100	k	1	1.293	1.000	1.108	1.087	1.007	1.447	1.296	1.045	1.307	1.010	1.014
			1.5	1.198	0.927	0.929	0.948	0.879	1.092	0.952	0.949	1.011	0.911	0.983
			2	1.168	0.911	0.983	0.985	0.925	1.007	0.929	0.872	1.172	0.931	0.824

라. Hampel함수

					표준정규분포	이중지수분포	오염정규분포								
							3% 오염			5% 오염			10% 오염		
							오염분산			오염분산			오염분산		
		k	l	m			5	10	20	5	10	20	5	10	20
n	50	1	1.5	3.5	1.590	0.973	1.069	1.229	1.212	1.466	1.172	1.122	1.269	1.026	1.053
		1.5	2	4	1.035	0.973	0.985	1.120	1.006	1.061	0.736	0.988	1.112	0.996	1.113
		2	2.5	4.5	0.981	0.966	0.883	0.895	0.960	1.112	0.878	0.991	1.357	1.023	0.951
	100	1	1.5	3.5	1.598	0.988	1.082	1.061	1.089	1.402	1.266	1.078	1.148	1.014	0.868
		1.5	2	4	1.337	0.982	0.922	1.138	0.900	1.007	0.992	0.991	1.094	0.991	0.994
		2	2.5	4.5	1.144	0.979	0.999	1.009	0.997	1.024	0.952	0.984	1.227	1.004	0.931

표 4.2: RCA(1)모형에서의 점근상대효율($\theta = 0.5$, $\sigma_z^2 = 0.05$)

가. Huber 함수

				표준정규분포	이중지수분포	오염정규분포								
						3% 오염			5% 오염			10% 오염		
						오염분산			오염분산			오염분산		
						5	10	20	5	10	20	5	10	20
n	50	k	1	0.995	0.778	0.915	0.800	0.665	0.918	0.721	0.490	0.819	0.645	0.433
			1.5	0.908	0.736	0.823	0.746	0.625	0.811	0.658	0.535	0.468	0.595	0.531
			2	0.869	0.722	0.806	0.710	0.600	0.790	0.704	0.538	0.775	0.668	0.584
	100	k	1	1.026	0.668	0.901	0.750	0.564	0.886	0.670	0.460	0.784	0.590	0.397
			1.5	0.915	0.669	0.823	0.724	0.529	0.792	0.636	0.448	0.741	0.578	0.433
			2	0.879	0.641	0.809	0.673	0.508	0.777	0.627	0.470	0.755	0.625	0.489

나. Tukey 함수

				표준정규분포	이중지수분포	오염정규분포								
						3% 오염			5% 오염			10% 오염		
						오염분산			오염분산			오염분산		
						5	10	20	5	10	20	5	10	20
n	50	k	3.5	1.066	0.784	1.020	0.919	0.797	1.061	0.885	0.711	1.027	0.929	0.779
			4	0.991	0.769	0.941	0.846	0.757	0.930	0.826	0.709	0.918	0.808	0.744
			4.5	0.951	0.772	0.875	0.797	0.696	0.868	0.808	0.658	0.849	0.787	0.775
	100	k	3.5	1.121	0.735	1.049	0.887	0.734	1.027	0.877	0.694	1.012	0.875	0.741
			4	1.012	0.660	0.943	0.844	0.680	0.928	0.807	0.656	0.919	0.801	0.682
			4.5	0.957	0.612	0.909	0.782	0.630	0.870	0.748	0.625	0.848	0.750	0.640

다. Andrews 함수

				표준정규분포	이중지수분포	오염정규분포								
						3% 오염			5% 오염			10% 오염		
						오염분산			오염분산			오염분산		
						5	10	20	5	10	20	5	10	20
n	50	k	1	1.069	0.761	1.034	0.923	0.803	1.060	0.891	0.718	1.040	0.943	0.796
			1.5	0.903	0.673	0.843	0.772	0.685	0.828	0.733	0.632	0.800	0.703	0.717
			2	0.871	0.655	0.811	0.722	0.627	0.787	0.722	0.627	0.773	0.669	0.664
	100	k	1	1.126	0.741	1.055	0.890	0.738	1.033	0.883	0.699	1.026	0.886	0.756
			1.5	0.915	0.648	0.844	0.762	0.622	0.823	0.716	0.585	0.792	0.691	0.594
			2	0.880	0.614	0.819	0.701	0.553	0.786	0.651	0.530	0.755	0.642	0.528

라. Hampel함수

					표준정규분포	이중지수분포	오염정규분포								
							3% 오염			5% 오염			10% 오염		
							오염분산			오염분산			오염분산		
		k	l	m			5	10	20	5	10	20	5	10	20
n	50	1	1.5	3.5	1.036	0.822	0.988	0.886	0.757	1.008	0.862	0.678	0.943	0.859	0.682
		1.5	2	4	0.929	0.727	0.851	0.773	0.699	0.836	0.746	0.645	0.830	0.718	0.653
		2	2.5	4.5	0.876	0.697	0.813	0.730	0.642	0.808	0.750	0.608	0.789	0.713	0.642
	100	1	1.5	3.5	1.094	0.724	0.999	0.869	0.711	0.983	0.829	0.659	0.937	0.805	0.665
		1.5	2	4	0.935	0.687	0.864	0.779	0.632	0.849	0.742	0.607	0.836	0.716	0.633
		2	2.5	4.5	0.887	0.667	0.835	0.723	0.588	0.804	0.709	0.599	0.787	0.713	0.635

표 4.3: ARCH(1)모형에서의 점근상대효율($\theta = 0.5,\ \alpha_0 = 0.7,\ \alpha_1 = 0.2$)

가. Huber 함수

				표준정규분포	이중지수분포	오염정규분포								
						3% 오염			5% 오염			10% 오염		
						오염분산			오염분산			오염분산		
						5	10	20	5	10	20	5	10	20
n	50	k	1	1.149	0.964	1.111	1.049	1.159	1.055	1.149	0.902	0.787	0.722	0.571
			1.5	1.032	0.962	1.130	1.067	0.802	1.113	0.959	0.710	0.964	0.810	0.731
			2	1.024	0.954	0.980	0.963	0.663	0.927	1.109	0.572	0.944	0.682	0.783
	100	k	1	1.076	0.966	1.154	0.973	1.190	1.008	0.772	0.907	0.773	0.729	0.783
			1.5	1.015	0.959	1.146	0.813	1.113	0.828	0.753	0.731	0.841	0.801	0.737
			2	1.041	0.963	0.894	1.012	0.703	0.807	0.775	0.753	0.877	0.631	0.794

나. Tukey 함수

				표준정규분포	이중지수분포	오염정규분포								
						3% 오염			5% 오염			10% 오염		
						오염분산			오염분산			오염분산		
						5	10	20	5	10	20	5	10	20
n	50	k	3.5	1.415	1.014	1.262	1.161	1.333	1.291	1.530	1.219	0.854	1.136	0.912
			4	1.351	0.996	1.369	1.190	0.946	1.287	1.310	0.790	1.020	1.005	0.993
			4.5	1.143	0.983	1.095	0.866	0.747	1.053	1.364	0.628	1.040	0.830	0.998
	100	k	3.5	1.300	0.994	1.095	1.245	1.728	1.111	1.065	1.207	0.893	0.998	0.923
			4	1.195	0.978	1.365	1.053	1.287	1.064	1.040	1.120	0.897	0.991	0.988
			4.5	1.276	0.973	1.398	1.223	0.934	0.942	0.962	1.135	1.025	0.983	0.922

다. Andrews 함수

				표준정규분포	이중지수분포	오염정규분포								
						3% 오염			5% 오염			10% 오염		
						오염분산			오염분산			오염분산		
						5	10	20	5	10	20	5	10	20
n	50	k	1	1.430	0.998	1.273	1.164	1.345	1.299	1.534	1.238	0.859	1.158	0.930
			1.5	1.063	0.971	1.212	1.092	0.870	1.188	1.173	0.801	0.972	0.887	0.865
			2	1.026	0.962	0.975	0.978	0.671	0.945	1.172	0.553	0.919	0.721	0.865
	100	k	1	1.224	1.011	1.376	1.252	1.739	1.654	1.076	1.112	0.834	1.019	0.941
			1.5	1.036	0.980	1.191	0.955	1.188	0.916	0.905	0.959	0.961	0.837	0.866
			2	1.039	0.963	0.923	1.049	0.817	0.821	0.848	0.885	0.927	0.694	0.882

라. Hampel함수

					표준정규분포	이중지수분포	오염정규분포								
							3% 오염			5% 오염			10% 오염		
							오염분산			오염분산			오염분산		
		k	l	m			5	10	20	5	10	20	5	10	20
n	50	1	1.5	3.5	1.320	0.976	1.252	1.120	1.316	1.230	1.384	1.106	0.897	1.029	0.858
		1.5	2	4	1.096	0.969	1.230	1.115	0.888	1.183	1.239	0.732	1.009	0.942	0.904
		2	2.5	4.5	1.050	0.952	1.034	0.992	0.691	0.994	1.246	0.639	0.982	0.753	1.122
	100	1	1.5	3.5	1.211	0.980	1.319	1.130	1.683	1.314	1.008	1.002	0.889	1.087	0.931
		1.5	2	4	1.107	0.963	1.209	0.951	1.183	0.915	0.943	1.003	0.994	0.931	0.911
		2	2.5	4.5	1.234	0.977	0.963	1.135	0.897	0.874	0.911	0.999	0.992	0.716	0.937

Robust Estimation using Estimating Functions for Time Series Models

Kyungyup Cha[1)] Sahmyeong Kim[2)] Sungduck Lee[3)]

ABSTRACT

The robustness of the least square estimatior and M estimator is compared in sense of asymptotic relative efficiency criterion for the linear and nonlinear time series processes with outliers, respectively. And the simulation results for M estimation function based on several bounded functions(Huber, Tukey, Andrews, Hampel) are given.

1) Researcher, Korea National Committee for Pacific Economic Cooperation, Seoul, 137-800.
2) Senior researcher, Korea Telecom, Taejon, 305-390.
3) Professor, Department of Statistics, Chungbuk National University, Cheongju, 360-763.