응용통계연구 제 12권 1호, 1999년, pp. 253-260

대칭 균형된 불완비 블록계획을 이용한 완전이면교배 실험

배종성[1)] 김공순[2)]

요 약

이어진 블록계획 중에서 대칭 균형된 불완비 블록계획 (Symmetrical Balanced Incomplete Block Design : SBIBD)을 이용하여 $n-ary$ 블록 완전이면교배(Complete Diallel Cross : CDC) 계획을 설계하였다. 처리 수와 반복 수가 고정된 경우, 이렇게 설계된 계획이 균형된 불완비 블록계획을 이용해서 설계한 계획들 중에서 가장 효율이 높은 계획임을 보인다.

1. 서론

이면교배(diallel cross)는 식물이나 동물의 동계교배실험(inbreeding experiment)에서 근교계통(inbred lines)의 유전적인 성질을 연구하는데 사용되는 짝짓기 계획(mating design)이다. 서로 다른 유전적인 특징을 갖는 p 종류의 근교계통에서 i번 근교계통과 j번 근교계통의 교배(cross)를 $(i \times j)$, $i < j = 1, 2, \cdots, p$로 나타내고 실험에서 사용되는 교배의 수를 n_c라 하자. Griffing(1956)은 완전이면교배를 4가지 타입으로 분류하였으나 Griffing의 타입 4에서 일부분의 교배($n_c = ps/2(s < p-1)$)만 사용하는 부분이면교배 (Partial Diallel Cross : PDC)와 비교하기 위하여 Griffing의 타입 4 ($n_c = p(p-1)/2$)를 완전이면교배라 한다.

Agarwal 과 Das(1987)는 균형된 불완비 블록계획과 삼각형계획(triangular PBIBD)을 이용하여 균형된 $n-ary$를 설계하였고, Agarwal 과 Das(1990)는 균형된 불완비 블록계획을 이용하여 Griffing의 4 가지 타입 각각에 대하여 블록 완전이면교배 계획을 설계하였다. Divecha 와 Ghosh(1994)는 Agarwal 과 Das와는 달리 삼각형계획을 이용하여 Griffing의 4 가지 타입 각각에 대하여 $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획을 설계하고 일반조합능력(general combining ability), 특수조합능력(specific combining ability), 역교배효과(reciprocal effect)등을 구하는 방법을 보였다. Dey 와 Midha(1996)는 삼각형계획을 이용하여 $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획을 설계하고 그중 일부는 총체적 최적(universally optimal)임을 보였다.

이어진 블록계획(Linked Block design)이란 임의의 블록 쌍들이 정확히 μ개의 처리들을 공통으로 포함하고 있는 블록계획을 말한다. 본 연구에서는 이어진 블록계획 중에서 대칭 균형된 불완비 블록계획을 이용하여 $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획을 설계하였다. 처리 수와 반복 수가 주어진 경우 대칭 균형된 불완비 블록계획을 이용해서 설계한 $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획이 비대칭 균형된 불완비 블록계획을 이용해서 설계한 계획보다 효율이 더 높다는 것을 보였다.

1) (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300, 전남대학교 자연과학대학 통계학과, 교수
2) (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300, 전남대학교 자연과학대학 통계학과, 박사과정

2. 이어진 블록 계획

이어진 블록계획은 Youden(1951)에 의해 처음 소개되었다. Youden은 이어진 블록계획의 쌍대계획 (dual design)은 처리 수와 블록 수가 바뀐 균형된 불완비 블록계획이 된다는 것을 이용하여 이어진 블록계획을 구성하였다. Roy와 Laha(1956,1957)는 이어진 블록계획을 다음과 같이 3가지로 분류하였다. 1)대칭 균형된 불완비 블록계획, 2) 부분적으로 균형된 불완비 블록계획들, 3) 알려진 어떤 계획 형태에도 속하지 않는 불규칙 계획.

2.1. 대칭 균형된 불완비 블록계획의 효율

처리 수와 블록 수가 같은 균형된 불완비 블록계획을 대칭 균형된 불완비 블록계획이라 하고 대칭 균형된 불완비 블록계획이 아닌 균형된 불완비 블록계획을 비대칭 균형된 불완비 블록계획이라 한다. 본 연구에서는 이어진 블록계획 중에서 대칭 균형된 불완비 블록계획이 다른 이어진 블록계획에 비해 디자인의 구성이 비교적 용이하기 때문에 이를 이용하여 블록 완전이면교배 계획을 설계하였다. 처리 수 v, 블록 수 b , 반복 수 r, 블록크기 k , 동반 수 λ를 갖는 대칭 균형된 불완비 블록계획이 존재한다면 이를 $D(v,b,r,k,\lambda)$라 하자.

Eccelston 과 Kiefer(1981)의 ψ_f-최적 기준을 이용하면 $D(v,b,r,k,\lambda)$는 복잡한 계산을 통해 A-, D-, E-최적임을 증명할 수 있다. 그러나 본 논문에서 다루는 평균효율은 정리 2.1과 같이 간단히 증명할 수 있다.

정리 2.1. $D(v,b,r,k,\lambda)$가 존재하는 경우 처리 수와 반복 수가 동일한 균형된 불완비 블록계획 중에서 평균효율이 가장 높은 계획이다(Shah 와 Sinha, 1989).

증명: 균형된 불완비 블록계획의 정보행렬(information matrix)

$$C = rI_v - \frac{1}{k}NN'$$

이다. 여기서 I_v는 크기 v인 단위행렬, N은 빈도행렬 (incidence matrix), N'은 N의 전치행렬, NN'은 결합행렬(concordance matrix)을 나타낸다. 균형된 불완비 블록계획 중에서 정보행렬 C의 고유치는 $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_{v-1} = \theta = \frac{\lambda v}{k}$ 이고, $\frac{1}{r}C$의 고유치는 $e_i = \frac{\lambda v}{rk}$로 모두 같다. 이때 평균효율은 균형된 불완비 블록계획의 조건 $\lambda(v-1) = r(k-1)$과 $bk = rv$을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E_d = \frac{v-1}{\sum_{i=1}^{v-1} e_i^{-1}} = \frac{trace(C)}{r(v-1)} = \frac{(v-1)\theta}{r(v-1)} = \frac{vr(k-1)}{r(v-1)k} = \frac{rv-b}{r(v-1)}. \tag{2.1}$$

fisher의 부등식은 $b \geq v$이므로 r, v가 고정된 균형된 불완비 블록계획에서 $b = v$ 일 때, 즉 대칭 균형된 불완비 블록계획일 때 E_d는 최대가 된다. □

2.2. 대칭 균형된 불완비 블록계획의 설계

처리 수 v^* , 블록 수 b^* , 반복 수 $r^* = 2k^*+1$, 블록 크기 k^* , 동반 수 $\lambda^* = 1$ 을 갖는 균형된 불완비 블록계획, $D^*(v^*, b^*, r^*, k^*, \lambda^*)$가 존재하면 $v = b = 4k^{*2}-1, r = k = 2k^{*2}$, $\lambda = k^{*2}$

인 $D(v,b,r,k,\lambda)$을 구성할 수 있다(Shrikhande와 Singh,1962). 예를 들면 $D^*(6,15,5,2,1)$을 이용하여 Shrikhande 와 Singh의 방법으로 $D(15,15,8,8,4)$를 설계할 수 있고, 이 계획의 여계획(complement design)을 이용하여 $D(15,15,7,7,3)$을 설계할 수 있다(Raghavarao,1971).

3. $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획의 분석 및 설계

근교계통의 종류 p, 블록 수 B, 블록의 크기 K, 교배 $(i\times j)$의 반복 수 R을 갖는 완전이면교배 모형은

$$Y=\mu 1_n+\Delta_1 g+\Delta_2\beta+\varepsilon \tag{3.1}$$

이다. 여기서 Y는 $n\times 1$인 반응벡터, μ는 전체평균, 1_n는 1을 원소로 갖는 벡터, Δ_1, Δ_2는 각각 일반조합능력효과 g와 블록효과 β에 대응하는 빈도행렬이다. 크기 $n\times p$인 Δ_1의 (u,w)원소는 u번째 교배가 w계통을 포함하면 1, 아니면 0이다. $G=\Delta_1'\Delta_1=(G_{ij})$, $\Gamma=\Delta_1'\Delta_2$이라면, $G_{ij}=R_{ij}$, $G_{ii}=\sum_{j(\neq i)=1}^{p}R_{ij}$이고, $\Gamma=(n_{il})$이다. R_{ij}는 $(i\times j)$의 반복 수, n_{il}은 i번 근교계통이 l번 블록에 나타나는 수이고, $\sum_{i=1}^{p}n_{il}=2K$이다. 식 (3.1)의 정보행렬은

$$\begin{aligned} C &= G-(1/K)\Gamma\Gamma' \\ &= R(p-2)I_p+RJ_p-K^{-1}\Gamma\Gamma' \\ &= (c_{ij}) \end{aligned}$$

이다. 여기서

$$c_{ij}=R_{ij}-K^{-1}\sum_{l=1}^{b}n_{il}n_{jl},\ \ i,j=1,2,\cdots,p$$

이고, $C1_p=0$이다. $p(p-1)/2$종류의 교배에 랜덤하게 번호를 부여한 후 $D(v,b,r.k,\lambda)$에 대응된 교배에 랜덤하게 부여한 번호를 대응시키면 근교계통의 수 $V=p$, 블록 수 $B=b$, 반복 수 $R=r(p-1)$, 블록의 크기 $K=2k$인 $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획을 구성할 수 있다. $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획에서 두 개의 일반조합능력효과, g_i들의 차에 대한 분산의 평균은

$$\overline{V}(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)=\frac{2\sigma^2}{(R-r-\frac{S-\Delta}{k})} \tag{3.2}$$

이다. 여기서 $\Delta=\lambda(p-1)^2+(r-\lambda)$이고, $S=RK-\Delta(V-1)$이며 모든 i에 대해서 $V(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)$는 $2\sigma^2/(R-r-\frac{S-\Delta}{k})$로 동일한 값을 갖는다(Agarwal 과 Das, 1990).

정리 3.1 대칭 균형된 불완비 블록계획을 이용해서 설계된 $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획은 균형된 불완비 블록계획을 이용해서 설계된 계획 중에서 임의의 두 일반조합능력효과들의 차에 대한 분산의 평균이 최소가 된다.

표 3.1: $p=6$인 완전이면교배에 랜덤하게 번호주기

1	2	3	4	5	6	7	8
1×6	3×4	1×3	2×3	3×5	4×6	1×2	2×6
9	10	11	12	13	14	15	
1×5	2×4	5×6	1×4	4×5	2×5	3×6	

증명: 처리 수 v와 반복 수 r이 고정된 균형된 불완비 블록계획을 생각하자. 이 계획에서 $\Delta=\lambda(p-1)^2+(r-\lambda)$, $S=r(p-1)+(p-1)(p-2)\lambda$이므로 $S-\Delta=(p-2)(r-\lambda)$ 이고, $R-r=r(p-2)$이다. 따라서

$$R-r-\frac{S-\Delta}{k}=r(p-2)-\frac{(p-2)(r-\lambda)}{k}=\frac{(p-2)\{r(k-1)+\lambda\}}{k}=\frac{(p-2)\lambda v}{k}$$

이 된다. 식 (2.1)에서 $\frac{\lambda v}{k}=r\cdot E_d$이므로

$$\overline{V}(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)=\frac{2\sigma^2}{(p-2)r\cdot E_d}$$

이다. 이때 p와 r은 주어진 상수이므로 E_d는 정리 2.1에 의해 대칭 균형된 불완비 블록계획일때 최대가 된다. 따라서 대칭 균형된 불완비 블록계획을 이용해서 설계된 $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획의 $\overline{V}(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)$은 최소가 된다. □

예제 3.1: $D(15,15,7,7,3)$를 이용하여 $V=p=6$, $B=15$, $K=14$, $R=35$인 $n-ary$ 블록 완전 이면교배 계획을 구성해 보자. 표 (3.1)과 같이 $n_c=p(p-1)/2=15$ 종류의 교배에 랜덤하게 번호를 부여한다.

표 (3.1)에서 교배는 $D(15,15,7,7,3)$의 처리에 대응된다. 표 (3.2)는 $D(15,15,7,7,3)$ 이고, 표 (3.3)은 표 (3.2)의 대칭 균형된 불완비 블록계획의 각 처리에 표 (3.1)의 교배를 대응시켜 만든 $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획이다.

표 (3.3)의 대칭 균형된 불완비 블록계획을 이용해서 설계된 $n-ary$블록 완전이면교배 계획에서 두 개의 일반조합능력들의 차에 대한 분산의 평균은

$$\overline{V}_{SBIB}(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)=0.0778\sigma^2$$

이고, 표 (3.2)와 처리 수와 반복 수가 동일한 임의의 균형된 불완비 블록계획, $D^*(15,35,7,3,1)$을 이용한 완전이면교배 계획의 일반조합능력들의 차에 대한 분산의 평균은 식 (3.2)를 이용하면

$$\overline{V}_{BIB}(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)=0.1\sigma^2$$

표 3.2: 대칭 균형된 불완비 블록 계획

$B1$	1	2	5	8	9	10	12
$B2$	1	2	3	4	6	7	12
$B3$	2	3	5	7	10	14	15
$B4$	1	2	5	8	9	10	12
$B5$	1	3	4	5	9	11	15
$B6$	2	4	6	8	9	14	15
$B7$	2	3	7	8	9	11	13
$B8$	1	6	7	8	10	11	15
$B9$	1	5	6	7	9	13	14
$B10$	1	3	4	8	10	13	14
$B11$	4	5	7	8	11	12	14
$B12$	1	2	11	12	13	14	15
$B13$	4	7	9	10	12	13	15
$B14$	3	6	9	10	11	12	14
$B15$	3	5	6	8	12	13	15

표 3.3: $n - ary$ 블록 완전이면교배($p = 6$)

$B1$	1×6	3×4	3×5	2×5	2×6	2×4	1×4
$B2$	1×6	3×4	1×3	2×3	4×6	1×2	1×4
$B3$	3×4	1×3	3×5	1×2	2×4	2×5	3×6
$B4$	3×4	2×3	3×5	4×6	2×4	5×6	4×5
$B5$	1×6	1×3	2×3	3×5	1×5	5×6	3×6
$B6$	3×4	2×3	4×6	2×6	1×5	2×5	3×6
$B7$	3×4	1×3	1×2	2×6	1×5	5×6	4×5
$B8$	1×6	4×6	1×2	2×6	2×4	5×6	3×6
$B9$	1×6	3×5	4×6	1×2	1×5	4×5	2×5
$B10$	1×6	1×3	2×3	2×6	2×4	4×5	2×5
$B11$	2×3	3×5	1×2	2×6	5×6	1×4	2×5
$B12$	1×6	3×4	5×6	1×4	4×5	2×5	5×6
$B13$	2×3	1×2	1×5	2×4	1×4	4×5	3×6
$B14$	1×3	4×6	1×5	2×4	5×6	1×4	2×5
$B15$	1×3	3×5	4×6	2×6	1×4	4×5	3×6

이다. 따라서 비대칭 균형된 불완비 블록계획과 대칭 균형된 불완비 블록계획을 이용해서 설계한 블록 완전이면교배 계획들간의 상대 효율

$$E = \frac{\overline{V}_{SBIB}}{\overline{V}_{BIB}} = 0.778$$

이다.

4. 결론 및 연구방향

본 논문에서는 Roy와 Laha가 3가지로 분류한 이어진 블록 계획 중에서 대칭 균형된 불완비 블록계획을 이용해서 $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획을 설계하고, 비대칭 균형된 불완비 블록계획을 이용해서 설계한 $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획에 비해 효율이 더 높다는 것을 보였다. 그러나 알려진 대칭 균형된 불완비 블록계획이 많지 않고 또한 $n-ary$ 블록 완전이면교배 계획은 대칭 균형된 불완비 블록계획과 처리 수와 교배 종류가 같은 경우에만 가능하다는 조건 때문에 실질적으로 사용할 수 있는 배치계획의 수가 극히 제한된다.

본 연구의 연속으로 이어진 블록계획 중 부분적으로 균형된 불완비 블록계획들과 알려진 어떤 계획 형태에도 속하지 않는 불규칙 계획들도 같은 처리 수를 갖는 동일한 계획 중에서 효율이 높을 것으로 추측됨으로(Clatworthy 등(1973), pp 103) 이들을 이용한 효율이 높은 $n-ary$ 부분이면교배 계획의 설계에 관한 연구가 계속 되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] Agarwal, S.D and Das, M.N. (1987). A note on construction and application of balanced designs. *Sankhya.* Vol. 49. 192-196.

[2] Agarwal, S.D and Das, M.N. (1990). Use of block designs in diallel crosses evalation.*Journal of Applied Statistics.* Vol. 17. 125-131.

[3] Clatworthy, H.W., Cameron, M.J. and Speckman, A.J. (1973). *Tables of Two-Associate-Class Partially Balanced Designs.* Applied Maths.Ser. 63. Washington D.C.: Nartional Bureau of Standards.

[4] Gosh, D.K and Divecha, J. (1994). Incomplete block designs for complete diallel crosses and their analysis. *Journal of Applied Statistics.* Vol. 21. 395-408.

[5] Dey, A. and Midha, C.K. (1996). Optimal block designs for diallel crosses. *Biometrika.* Vol. 83. 484-489.

[6] Eccleston, J.A. and Kiefer, J. (1981). Relationship of optimality for individual factors of a design. *Journal of Statistical Planning of Inference.* vol. 5. 213-219.

[7] Griffing, B. (1956). Concept of general and specific combining ability in relation to diallel crossing systems.. *Australian Journal of Biological Sciences.* Vol. 9. 463-493.

[8] Raghavarao, D. (1971). *Construction and combinatorial problems in design of experiments(New York : Wiley).*

[9] Roy, J. and Laha, R.G. (1956). Classfication and analysis of linked block designs. *Sankhya.* Vol. 17. 115-132.

[10] Roy, J. and Laha, R.G. (1957). On Partially balanced linked block designs. *Annals of Mathematical Statistics.* Vol. 36. 1807-1814.

[11] Shah, K.R. and Sinha, B.K (1989). *Theory of optimal designs.* Springer-Verlag. 28.

[12] Shrikhande, S.S and Singh, N.K. (1962). A Note on balanced incomplete block designs. *J. Indian Stat, Assn..* Vol. 1. 97-101.

[13] Youden, W.G. (1951). Linked blocks:a new class of incomplete block designs(abstract). *Biometrics.* Vol. 7. 124.

[1998년 9월 접수, 1999년 2월 최종수정]

Complete diallel cross experiment for Symmetric BIB designs

Jong Sung Bae [1)] Gong Sun Kim [2)]

ABSTRACT

A construction of the $n-ary$ block complete diallel cross design using Symmetrical Balanced Incomplete Block(SBIB) designs which belongs to linked block design is presented. In the case where the number of the treatment and the replication is given, we show that the proposed designs are most efficient among those made by the asymmetrical BIB designs.

1) Professor, Dept of Statistics, Chonnam University, Kwangju, 500-757, Korea
2) Dept of Statistics, Chonnam University, Kwangju, 500-757, Korea