韓國軍事運營分析學會誌
第 25 卷, 第 2 號, 1999. 12. 31.

최소비용문제에서 치명호를 결정하는 방법*
(A Method for Determining the Most Vital Arcs in Minimum Cost Flow Problem)

안재근**, 정호연***, 박순달****

Abstract

The purpose of this paper is to find the most vital arc in the minimum cost flow problem. The most vital arc is the arc whose removal results in the greatest influence in the costs or the amount of demands in a given minimum cost flow network. This problem can be well applied to the conflict situations such as military logistics network or communications network. In this situation, network user wants to know which arcs are the most vital to him so that he can reinforce these arcs against attack, while interdictor wants to destroy these arcs which increase the distance of the shortest path most through the network. When one of arcs is removed from the network of the minimum cost flow problem, two kinds of situations can be occurred ; breaking feasibility and increasing cost. In case of breaking feasibility, the rank of arcs are determined using the amount of modified flow in a related network which is made of modifying the optimal alternative of the minimum cost flow problem. The rank of arcs with the increased costs are determined by using a method which finds the directed cycle with the minimum cost in a related network.

* 본 연구는 정보통신부의 98년도 대학기초연구지원사업(97-G-0683)의 지원을 받았음.
** 한경대학교 컴퓨터공학과, *** 전주대학교 산업공학과, **** 서울대학교 산업공학과

1. 서 론

최소비용문제는 네트워크 이론 중에서 유통량문제에 속하는 가장 기본적인 모형으로서 공급지에서 수요지까지 주어진 유통량을 가장 적은 비용으로 보내는 최적 유통경로를 찾는 문제이다[1, 5, 14].

이 문제에 대한 해법으로는 환 제거 (cycle canceling) 알고리즘, 연속적인 최단경로(successive shortest path) 알고리즘, 원-쌍대(primal-dual) 알고리즘, Out-of-kilter 알고리즘, 완화(relaxation) 알고리즘, 규모화(scaling) 알고리즘 등 여러 방법이 알려져 있다[5, 14].

의사결정자는 이러한 해법에 의한 최적해에 관심을 가지면서도 동시에 입력자료들의 예견치 못한 변동에도 많은 관심을 갖는다. 예를 들어주어진 네트워크의 호가 절단되거나 파괴되어 전체 네트워크의 성능에 큰 영향을 미치게 될 경우 이에 대한 적절한 대응책을 마련할 필요가 있다.

본 연구에서는 이러한 최소비용문제에서 어떤 호의 제거가 최소비용문제의 수요/공급량이나 수송비용에 가장 큰 영향을 미치는 호인가를 결정하는 치명호(most vital arc)를 찾는 방법을 제시하고자 한다.

이러한 문제는 적의 공격 하에 처해 있는 통신망이나 수송보급로 등과 같은 네트워크에서 어느 회선이나 수송로가 가장 치명적인지를 알고자 하는 문제에 잘 적용될 수 있다[2,3,4,12, 13,15]. 공격자의 입장에서는 적의 통신망이나 보급로에 가장 치명적인 손실을 줄 수 있는 통신회선이나 수송로를 알고 싶을 것이고, 방어자의 입장에서는 가장 타격이 클 것으로 예상되는 통신회선이나 수송로를 미리 파악하여 그곳에 여분의 통신회선을 확보하거나 경계를 강화하는 것이 대단히 중요하기 때문이다.

이 분야의 연구로는 최단경로문제나 최대유통문제에서 치명호를 찾는 문제를 들 수 있으며, 최단경로나 최대유통문제에서 치명호를 찾는 문제는 주어진 문제에서 한 호의 제거가 최단경로를 가장 크게 늘려 주거나 최대유통문제에서 최대유통량을 가장 크게 줄여 주는 호를 찾는 문제로 정의된다[5,7,12].

최단경로문제에서의 치명호에 대한 연구는 Fulkerson[9]과 Golden[10], Corley[7]와 Malik[13] 그리고 Bar-Noy[17] 등이 연구하였다. Fulkerson 등[9]은 호를 제거하는데 비용이 소요되는 문제에서 주어진 예산의 제약 하에서 시점과 종점의 최단거리를 가장 크게 줄이는 문제를 다루었는데 이 문제가 매개변수 최소비용문제(parametric minimum cost flow problem)와 동치임을 보였다. Golden[10]은 호가 제거될 때 시점에서 종점으로 향하는 최단경로가 적어도 주어진 T 이상 늘어나면서 제거비용은 최소가 되는 문제를 다루었는데, 이 문제를 최소비용문제로 풀 수 있는 방법을 제시하였다. Corley[7]등은 최단거리를 가장 크게 증가시키는 k개의 호를 찾는 방법을 $O(|V|^4)$의 복잡도로 계산할 수 있는 해법을 제시했고, Malik[13] 등이 위의 문제를 $O(|V|^2)$에 해결하는 방법을 제시하였으나 이 알고리듬이 정확한 해를 제공하지 못함을 Bar-Noy[17] 등이 반례로 보이고 있다.

최대유통문제에서의 치명호에 대한 연구는 Wollmer[16]와 Lubore[12]에 의해 처음으로 수행되었고, Durbin[8]에 의해 고속도로시스템에 적용되었다. Wollmer는 최대유통문제에서 최대유통량을 확보하기 위해 각 호에서 반드시 수송해야 되는 호의 값

을 정의하여 이 호의 값이 가장 큰 호가 치명호가 됨을 보였다. 그러나 모든 호에 대하여 각 호에서 반드시 수송해야 되는 호의 값을 구해야 하기 때문에 효율성이 떨어지는 단점을 갖고 있다. 이러한 단점은 Lubore 등 [12]에 의하여 개선되었다. Lubore는 최소절단(minimal cut)에 속하는 호의 용량보다 적어도 더 큰 호만이 치명호가 될 수 있다는 필요조건을 제시하여 치명호를 결정하는 방법의 효율성을 개선시켰다. 그리고 Ratliff[15] 등에 의해 다수개의 치명호(k-MVA)를 결정하는 방법에 대한 연구가 진행되었다.

최소비용문제에서의 치명호에 대한 연구는 아직 연구가 되지 않은 분야로서 앞의 최단경로문제나 최대유통문제와는 다르게 호의 제거라는 상황이, 주어진 수요/공급량을 만족시킬 수 없는 경우와 호의 제거가 수송비용의 증가로만 나타나는 두 가지의 경우가 발생할 수 있다. 따라서 호의 제거로 인하여 수요/공급량을 만족시킬 수 없는 경우와 수요/공급량은 만족하나 수송비용을 크게 증가시키는 경우를 분석해야 하며, 두 경우를 모두 고려할 때 어떤 호가 중요한 호가 되는지를 정의할 필요가 있다. 이러한 분석을 통해 하나의 호가 제거될 때 수요/공급량의 변화여부의 예측 그리고 네트워크의 성능을 유지 혹은 강화시킬 수 있는 호의 우선 순위를 파악할 수 있기 때문이다.

2. 최소비용문제의 유통치명호

본 연구에서 다루는 최소비용문제는, 각 호 (i,j)에 대해 용량상한을 u_{ij}, 수송비용을 c_{ij}, 각 호에 대한 유통량을 x_{ij}, 수요/공급량을 v라고 할 때, 주어진 네트워크 $G=(N,A)$에서 v의 양을 최소비용으로 공급지에서 수요지에 보내는 최적경로와 유통량을 찾는 문제[1,5,14]로써, 공급지에서 출발하여 수요지로 도착하는 수요/공급량을 v라고 할 때 모형식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij}$$

st

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = \begin{cases} v, & i=\text{시점} \\ 0, & i=\text{중간점}, i\in N \\ -v, & i=\text{종점} \end{cases}$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \quad \text{모든 } (i,j)\in A$$

단, 최소비용문제의 $G=(N,A)$는 마디 수가 |N|=n 이고, 호의 수가 |A|=m인 유방향 네트워크라고 가정한다.

최소비용문제에서 임의의 한 호의 제거를 통해 나타날 수 있는 상황은 문제의 가능성(feasibility)이 깨지는 경우와 가능성은 유지되나 최소비용의 흐름이 바뀌어 수송비용이 증가되는 경우를 들 수 있다. 이 때 가능성이 깨지는 경우는 수요/공급량을 만족시키지 못하는 경우에 해당되는데, 이 경우가 수송비용은 증가되더라도 수요/공급량을 만족시킬 수 있는 경우보다 일반적으로 더 치명적이 될 것이다. 따라서 본 연구에서는 최소비용문제에서 치명호를 결정하기 위해서 한 호의 제거로 수요/공급량을 만족시키지 못하는 경우가 수송비용은 증가되더라도 수요/공급량을 만족시키는 경우보다 더 치명적이라고 가정한다.

먼저 최소비용문제에서 한 호의 제거로 수요/공급량을 만족시키지 못하는 양이 가장 큰 호를 결정하기 위해 호의 유통치명도와 유통치명호를 다음과 같

이 정의해 보자.

[정의 1] 호의 유통치명도 및 유통치명호

최소비용문제에서 호 (i,j)의 유통치명도는 호 (i,j)의 제거를 통해 수요/공급량을 만족시키지 못하는 양이다. 그리고 유통치명호는 주어진 네트워크를 이루는 모든 호들 중에서 호의 유통치명도가 가장 큰 호이다.

이 때, 호의 유통치명도는 수요/공급량을 만족시키기 위해서 반드시 이 호에서 보내주어야 하는 유통량을 의미한다. 만일 주어진 네트워크의 모든 호의 유통치명도가 0이면 유통치명호가 없다고 말할 수 있다.

본 연구에서는 최소비용문제에서 호의 유통치명도를 구하기 위하여 호의 제거를 통해 공급지에서 수요지로 보내야 하는 수요/공급량이 줄어드는 양을 정의할 필요가 있다. 이를 위해 어떤 호의 주어진 수요/공급량에 대한 최소유통량을 다음과 같이 정의한다.

[정의 2] 최소유통량

최소비용문제에서 호 $(i,j)\in A$의 수요/공급량 v에 대한 최소유통량 k_{ij}은 공급지에서 수요지간의 수요/공급량 v를 얻기 위해 호 (i,j)를 통해 반드시 통과시켜주어야 하는 최소한의 유통량이다.

최소비용문제에서 최소유통량의 개념을 적용하기 위해 주어진 수요/공급량에 대한 임의의 가능해를 이용한 네트워크를 구성할 필요가 있다. 그러나 최소비용문제는 호마다 단위수송비용이 부가적으로 더 존재하기 때문에 주어진 수요/공급량과 변환네트워크에 수정된 단위수송비용을 표현할 수 있는 최소비용문제의 관련 네트워크(Associate Network) [1]를 다음과 같이 정의한다.

[정의 3] 네트워크 $G=(N,A)$에 대한 관련 네트워크 $G_v(X)=(N,A'(X))$의 정의

최소비용문제에서 수요/공급량 v를 가진 해 X에 대한 관련 네트워크 $G_v(X)=(N,A'(X))$는 다음과 같이 정의된다.

만일 G의 호 (a,b)에 대한 유통량이 $x_{ab}=0$이면 G_v의 호 $A'(X)=(a,b)$로 놓고, 만일 $x_{ab}>0$이면 $A'(X)=(b,a)$로 한다. 이 때 수정된 용량은 $x_{ab}=0$일 때 $u'_{ab}=u_{ab}$로 하고, $x_{ab}>0$ 일 때 $u'_{ba}=x_{ab}$ 이며, 수정된 단위수송비용은 $x_{ab}=0$일 때 $c_{ab}'=c_{ab}$로 하고, $x_{ab}>0$ 일 때, $c_{ba}'=-c_{ab}$ 라고 둔다.

먼저 최소비용문제에서 호의 유통치명도를 구하기 위해서는 호의 수송비용을 고려하지 않고 단지 호의 용량상한만을 고려하여 가능유통량을 구해야 한다.

[특성 1] 가능유통문제의 해 X에 대한 관련 네트워크 $G_v(X)=(N,A'(X))$에서 마디 i에서 마디 j까지의 최대유통량을 h_{ij}라고 하자. 이 때 h_{ij}는 $G=(N,A)$의 모든 대안 최적해에 대해 동일한 값을 가진다.

위의 [특성 1]은 가능유통문제에서 대안 최적해가 존재할 때 임의의 한 최적해만 주어지더라도 그것으로부터 호(i,j)의 최소유통량을 구할 수 있다는 사실을 말해 준다.

위의 특성에 따라 최소비용문제에서 임의의 가능

해 X를 구한 뒤, 이 해 X에 대한 관련 네트워크 $G_v(X)=(N, A'(X))$에서 구한 최대유통량 h_{ij}을 이용하여 호의 v에 대한 최소유통량 k_{ij}을 구할 수 있다.

[보조정리 1] 최소비용문제의 네트워크 $G=(N, A)$에서 호 $(i, j) \in A$의 용량상한을 u_{ij}, 임의의 가능해 X에 대한 관련 네트워크 $G_v(X)=(N, A'(X))$에서 마디 i에서 마디 j로 향하는 최대유통량을 h_{ij}라고 할 때, 호 $(i, j) \in A$의 주어진 수요/공급량 v에 대한 최소유통량 k_{ij}은 $\max\{u_{ij}-h_{ij}, 0\}$이다.

(증명)

최소비용문제에서 임의의 가능해 X에 대한 관련 네트워크 $G_v(X)=(N, A'(X))$에서 마디 i를 시작점으로 하고 마디 j를 종착점으로 하여 최대유통문제를 풀어서 나온 유통량을 h_{ij}, 호 $(i, j) \in A$의 v에 대한 최소유통량을 k_{ij}, 호 (i, j)의 해를 x_{ij}라고 하자. 그러면 임의의 가능해 X에 대한 관련 네트워크 $G_v(X)=(N, A'(X))$에서 마디 i로부터 마디 j까지 향하는 유통량은 호 (i, j)를 통하여 직접 보내는 유통량과 호 (i, j)를 우회하여 보내는 경로들의 유통량의 합 $\sum_{p \in P \setminus (i, j)} x_{ij}^p$으로 표시될 수 있다.

이를 위해 마디 i로 부터 마디 j까지 향하는 유통경로의 집합 P_{ij} 를 임의의 가능해 X에 대한 관련 네트워크($G_v(X)=(N, A'(X))$)에서 시작점 i에서 종착점 j로 향하는 모든 경로로 정의하자. 그러면 유통량을 $h_{ij} = \sum_{p \in P_{ij}} x_{ij}^p$ 가 된다.

그러면 마디 i로 부터 마디 j까지 보내는 유통량 h_{ij}은 호 (i, j)를 통해 직접 보내는 유통량인 $(u_{ij}-x_{ij})$ 와 호 (i, j)를 우회하여 보내는 유통량의 합($\sum_{p \in P_{ij} \setminus (i, j)} x_{ij}^p$)으로 나타낼 수 있다. 즉, $h_{ij} = (u_{ij}-x_{ij}) + \sum_{p \in P_{ij} \setminus (i, j)} x_{ij}^p$ 이다.

그런데 호 (i, j)의 v에 대한 최소유통량 k_{ij}는 x_{ij}에서 마디 i로 부터 마디 j까지 우회해서 보내는 유통량 $\sum_{p \in P_{ij} \setminus (i, j)} x_{ij}^p$를 뺀 값, 즉, $k_{ij} = x_{ij} - \sum_{p \in P_{ij} \setminus (i, j)} x_{ij}^p$ 이다. 따라서 다음 식에 의해

$$k_{ij} = x_{ij} - \sum_{p \in P_{ij} \setminus (i, j)} x_{ij}^p = u_{ij} - (u_{ij} - x_{ij} + \sum_{p \in P_{ij} \setminus (i, j)} x_{ij}^p) = u_{ij} - h_{ij}$$ 이 된다.

이때 만일 $x_{ij} \geq \sum_{p \in P_{ij} \setminus (i, j)} x_{ij}^p$ 이면 $k_{ij} = u_{ij} - h_{ij}$이 되고, 만일 $x_{ij} < \sum_{p \in P_{ij} \setminus (i, j)} x_{ij}^p$ 이면 호 (i, j)의 v에 대한 최소유통량이 음수로 나타나는데 호 (i, j)의 v에 대한 최소유통량의 [정의 2]에 따라 이때의 k_{ij}는 0의 값을 가진다. 이를 간단히

나타내면 만일 호 (i, j)의 v에 대한 최소유통량은 $u_{ij} - h_{ij}$가 비음이면 $k_{ij} = u_{ij} - h_{ij}$이고 $u_{ij} - h_{ij}$가 음수이면 $k_{ij} = 0$ 이 된다. 즉, 호 (i, j)의 v에 대한 최소유통량 k_{ij}은 $\max\{u_{ij} - h_{ij}, 0\}$ 이다.

위의 보조정리를 이용하여 최소비용문제에서 한 호의 제거를 통해 보내고자 했던 양을 보내지 못하는 수요/공급량의 감소를 표현할 수 있는 정리는 다음과 같다.

[보조정리 2] 최소비용문제에서, 호 (i, j)의 수요/공급량 v에 대한 최소유통량을 k_{ij}라고 할 때, 호 (i, j)의 제거를 통한 수요/공급량의 감소는 $v - k_{ij}$이다.

(증명)

최소비용문제에 대한 수요/공급량(v)이 주어져 있으므로 각 호 (i, j)를 통해서 x_{ij} 만큼의 유통량을 수송하고 있음을 알 수 있다. 호 (i, j)를 통해서 보내는 이 x_{ij}의 양은 마디 i에서 마디 j까지 우회경로가 존재할 경우 유통량을 우회시킬 수도 있으나, 수요/공급량을 수송하기 위해서는 적어도 호의 v에 대한 최소유통량 k_{ij}만큼의 유통량을 호 (i, j)를 통해서 보내 주어야 한다. 그런데 호 (i, j)가 제거된다면 호 (i, j)의 v에 대한 최소유통량 k_{ij}만큼의 유통량을 공급지에서 수요지까지 전달할 수 없기 때문에 수요/공급량은 k_{ij}만큼 감소되게 된다. 따라서 호 (i, j)가 제거되게 되면 감소되는 수요/공급량은 $v - k_{ij}$가 된다.

따라서 본 연구에서 정의한 호 $(i, j) \in A$의 유통치명도는 호의 v에 대한 최소유통량 k_{ij}와 같게 된다. 그러므로 주어진 네트워크의 유통치명호는 [보조정리 2]에 의해 최대의 수요/공급량의 감소를 가져오는 호가 된다. 이를 정리하면 다음과 같다.

[정리 3] 최소비용문제에서의 유통치명호 (i, j)는 호의 주어진 수요/공급량에 대한 최소유통량이 가장 큰 호이다.

(증명)

[정의 1]에 의해 호 (i, j)의 유통치명도가 호 (i, j)의 제거를 통해 수요/공급량을 만족시키지 못하는 양으로 정의되었고 [정의 2]에 의해 호 (i, j)의 v에 대한 최소유통량 k_{ij}가 공급지에서 수요지간의 수요/공급량 v를 얻기 위해 호 (i, j)를 통과해야하는 최소한의 유통량으로 정의되었다. 그러므로 호의 유통치명도는 수요/공급량(v)에서 호의 v에 대한 최소유통량을 뺀 값이다. 그런데 [보조정리 2]에 의해 호 (i, j)의 v에 대한 최소유통량은 $v - k_{ij}$ 이므로 호 (i, j)의 유통치명도는 $v - (v - k_{ij}) = k_{ij}$가 된다. 그러므로 구하고자 하는 유통치명호는 [정의 1]에 의해 호의 유통치명도가 가장 큰 호가 되므로 $k_{ij} = \max_{(a,b) \in A} \{k_{ab}\}$이 된다.

유통치명호를 구할 때 다음 [특성 2]를 이용하면 계산 효율을 크게 향상시킬 수 있다.

[특성 2] 최소비용문제에서 임의의 가능해가 주어졌을 경우, 호에 유통량이 흐르지 않는 호는 유통치명호가 될 수 없다. 즉, 유통량이 흐르는 호 중에서 유통치명호가 존재한다.

(증명)

가능해에서 유통량이 흐르지 않는 호의 경우는 그 호를 제거하여도 공급지에서 수요지로 향하는 수요/공급량을 줄일 수 없게 된다. 그러므로 대안해와 무관하게 가능해에서 아무 유통량도 흐르지 않는 호에 대한 유통치명도는 0 이 된다.

3. 최소비용문제의 수송비용치명호

최소비용문제에서 유통치명도에 따라 치명호를 결정할 때 유통치명호가 다수개가 존재하거나 유통치명호를 정할 수 없는 경우가 있다. 이 경우에는 호의 유통치명도와 다른 치명도인 수송비용치명도를 정의하여 호의 치명도를 결정할 수 있다.

먼저 주어진 네트워크에서 치명도를 결정하지 못한 호들에 대한 집합을 수송비용치명호 후보집합 Q라고 하자. 만일 한 호 (i,j)의 제거로 θ만큼의 유통량이 감소된다면 한 호의 제거를 통해 $(v-\theta)$의 수요/공급량을 공급지에서 수요지로 보낼 수 있다. 이 때 수송비용치명호 후보집합 Q를 구성하고 있는 각 호 (i,j)의 각각의 제거를 통해 $(v-\theta)$의 수요/공급량을 공급지에서 수요지로 보낼 때 가장 비용이 많이 드는 호가 더욱 치명적인 호가 될 수 있다. 이러한 기준을 정의하면 다음과 같다.

[정의 4] 최소비용문제에서 임의의 한 호의 제거를 통해 θ 이상의 수요/공급량의 감소가 나타나지 않는 경우와 호의 제거를 통해 θ 만큼의 수요/공급량의 감소가 생기는 호들의 집합을 수송비용치명호 후보집합 Q라고 하자. 그러면 수송비용치명호 후보집합 Q의 구성요소인 호 $(i,j)\in Q$의 수송비용치명도는 호 (i,j)의 제거로 $(v-\theta)$만큼의 수요/공급량을 공급지에서 수요지로 최소의 비용으로 수송하는 비용에서 어떤 호도 제거하지 않고 $(v-\theta)$만큼의 수송량을 수송하는 최소수송비용을 뺀 값이다. 이 때 수송비용치명호 후보집합 Q의 구성요소 중에서 수송비용치명도가 가장 큰 호가 수송비용치명호가 된다

여기서 수송비용치명호를 구하기 위하여 Q의 모든 구성요소를 각각 제거한 상태에서 수요/공급량 $(v-\theta)$의 최소비용문제를 다시 구할 필요는 없다. 대신 각각의 호에 대하여 최소의 비용으로 우회하는 경로를 차례로 구하여 현재의 최적해에서의 유통량인 x_{ij}에서 호의 최소유통량인 k_{ij}를 제외한 양 만큼을 계산해 주면 된다. 따라서 호 (i,j)를 우회하는 우회비용을 현재의 최적해 X에 대한 변환네트워크에서 구하여 이때의 우회비용만을 구하면 된다.

이의 계산을 위해 X에 대한 관련 네트워크 $G_v(X)=(N,A'(X))$에서 호 (i,j)의 유방향환을 정의하면 다음과 같다.

[정의 5] 가능해 X에 대한 관련 네트워크 $G_v(X)=(N,A'(X))$에서 $(j,i)\in A'(X)$라고 하자. 그리고 P_{ij}를 $G_v(X)=(N,A'(X)-\{(j,i)\})$에서 마디 i에서 출발하여 마디 j로 들어오는 최단경로라고 하자. 그러면 관련 네트워크에서의 호 $(j,i)\in A'(X)$의 최소유방향환 C_{ji}는 $\{(j,i)\}\cup P_{ij}$이다.

위의 성질에 대해서는 Hamacher가 최소비용문제에서 최적해가 주어졌을 경우 2번째의 최적해를 구하기 위해 변환네트워크에서 최소유방향환을 통해 사용한 전제를 이용한 결과이다[11].

그런데, 최소비용문제에서 주어진 최적해에 대한 관련 네트워크에서는 다음과 같은 성질 때문에 음의 거리가 존재하는 주어진 최적해에 대한 관련 네트워크에서 최소유방향환을 찾는 방법을 Dijkstra 해법으로 해결할 수 있다.

임의의 유방향환 C 와 임의의 마디의 잠재가 (node potential) $d(i)$ $\forall i \in N$ 가 주어져 있을 경우 $\sum_{(i,j)\in C} c_{ij}' = \sum_{(i,j)\in C} c_{ij}$ 이다[5, 11].

(단, $c_{ij}' = c_{ij} + d(i) - d(j)$)

호 (j, i)의 최소유방향환 C_{ji}에서 다음을 정의할 수 있다. 호 (j, i)의 최소유방향환의 비용을 $c(C_{ji})$라고 하고 호 (j, i)의 최소유방향환 C_{ji}을 통해 흐를 수 있는 유통량의 최대값을 δ_{ji}라고 했을 때 $c(C_{ji})$는 $\sum_{(a,b)\in C_i} c_{ab}$로 표현되고, δ_{ji}는 $\min_{(a,b)\in C_{ji}} u_{ab}$ 로 나타낼 수 있다. 그러므로 호의 증가수송비용 Δ_{ij}를 관련 네트워크에서 호 (j, i)의 최소유방향환 C_{ji}을 통해 우회할 수 있는 우회량의 합이 ($x_{ab} - \theta$)가 될 때 까지 계속한다.

그리고 변화된 유통량에 따라 해 X에 대한 관련 네트워크에서 모든 호 (a, b)에 대해 해를 다음과 같이 수정해주면 된다.

$$x_{ab}' = \begin{cases} x_{ab} - \delta_{ji}, & if\ (a,b) \in C_{ji}\ and\ (a,b) \in A \quad x_{ab} < u_{ij} \\ x_{ab} + \delta_{ji}, & if\ (b,a) \in C_{ji}\ and\ (b,a) \in A \quad x_{ba} > 0 \\ x_{ab}, & otherwise \end{cases}$$

$$x_{ba}' = \begin{cases} x_{ba} + \delta_{ji}, & if\ (a,b) \in C_{ji}\ and\ (a,b) \in A \quad x_{ab} < u_{ij} \\ x_{ba} - \delta_{ji}, & if\ (b,a) \in C_{ji}\ and\ (b,a) \in A \quad x_{ba} > 0 \\ x_{ba}, & otherwise \end{cases}$$

이를 정리하면 다음과 같다.

[보조정리 4] 호 (a, b)의 제거를 통해 최소비용흐름이 증가하는 경우에서 호의 제거를 통한 최소비용흐름의 증가를 나타내고 있는 호 (a, b)의 증가수송비용(Δ_{ab})은 다음과 같다.

$$\Delta_{ab} = \sum_{i=1}^{k} \delta_{ba}^{(i)} \cdot c^{(i)}(C_{ba})$$

, 이 때 $k = \arg\max \begin{cases} \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{ba}^{(i)} < (x_{ab} - \theta) \\ \sum_{i=1}^{k} \delta_{ba}^{(i)} \geq (x_{ab} - \theta) \end{cases}$,

$$\delta_{ba}^{(k)} = (x_{ab} - \theta) - \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{ba}^{(i)}$$

(증명)

현재의 최적해에서는 임의의 한 호 (a, b)를 통해서 x_{ab} 만큼의 유통량이 흐르고 있다. 그런데 이 x_{ab} 중에서 k_{ab}(또는 θ) 만큼은 호 (a, b)의 제거를 통해서 공급지에서 수요지로 흐를 수 없는 양이고, ($x_{ab} - \theta$) 만큼의 유통량은 현재 호 (a, b)에서 흐르고 있지만, 호의 제거를 통해서 우회해야 하는 양이다.

그러므로 현재의 최적해에서 ($x_{ab} - k_{ab}$) 만큼의 유통량을 최소의 비용으로 현재의 호 (a, b)를 우회하는 우회비용을 계산할 경우 호 (a, b)의 제거를 통해 $(v - \theta)$의 유통량을 최소의 수송비용로 보내는 비용의 증분의 계산이 가능하다. 그러므로 호 (a, b)를 제거하고 난 상태에서 $(v - \theta)$의 유통량

을 최소의 수송비용으로 보내는 비용에서 호 (a, b)의 제거하지 않고 $(v-\theta)$의 유통량을 최소의 수송비용로 보내는 비용을 뺀 값의 차가 바로 호 (a, b)의 증가수송비용이 된다.

이에 따라 [정의 4]에서 정의한 수송비용치명호는 [보조정리 5]에 의해 최대의 우회비용의 증가를 가져오는 호가 된다. 이를 정리하면 다음과 같다.

[정리 5] 최소비용문제의 수송비용치명호는 수송비용치명호 후보집합 Q에 존재하는 호 중에서 호의 증가수송비용이 가장 큰 호이다.

4. 최소비용문제의 치명호 해법

위의 [정리 3], [정리 5]의 유통치명호와 수송비용치명호의 내용을 정리하면 다음과 같다.

[정리 6] 최소비용문제의 치명호는 $k_{ij} = \max_{(a,b)\in A|k_{ab}>0}\{k_{ab}\}$인 호 (i, j)이다. 만일 동일한 $k_{ij} = v-\theta$를 가진 호가 다수개 존재할 경우 최소비용문제의치명호는 $\Delta_{ij} = \max_{(a,b)\in A|k_{ab}=v-\theta}\{\Delta_{ab}\}$ 인 호 (i, j)이다. 만일 이런 호가 존재하지 않을 경우 최소비용문제의 치명호는 $\Delta_{ij} = \max_{(a,b)\in A|k_{ab}=0}\{\Delta_{ab}\}$ 인 호 (i, j)가 된다.

(증명)

v에 대한 최소유통량이 가장 큰 호가 정의에 따라 그 호의 제거를 통해 가장 큰 용량의 감소가 생기는 호이다. 그러므로 최소비용문제의 $G_v(X) = (N, A'(X))$의 유통용량에서 v에 대한 최소유통량이 가장 큰 호가 최소비용문제의 치명호가 된다. 그런데 이때 동일한 유통량 v_1을 갖는 호가 여러 개 존재할 경우, 해당 호 들에 대해 최소비용흐름이 가장 큰 호가 치명호가 된다.

그리고 마지막으로 모든 k_{ij} = 0인 경우는 임의의 호의 제거로 수요/공급량을 만족하지 못하는 호가 존재하지 않는다. 그러므로 이때는 모든 호 $(i, j)\in A$에 대해서 최소비용흐름의 증가수송비용 Δ_{ij}이 가장 큰 호가 치명호가 된다.

[계 산 법]

[단계 1] $G = (N, A)$에 대한 최소비용문제를 푼다.

P = Q = $\emptyset$

[단계 2] P, Q의 분리

$G = (N, A)$의 모든 호의 집합의 원소에 대해 (2-1) $G_v(X) = (N, A'(X))$를 구성한다.

이 때 관련 네트워크에서의 수정된 용량상한 U'와 수정된 단위수송비용은 다음과 같다.

만일 $x_{ab} > 0, (a, b)\in A$ 이면 $u'_{ab} = u_{ab} - x_{ab}$, $u'_{ba} = x_{ab}$

$c'_{ab} = c_{ab}$, $c'_{ba} = -c_{ab}$

만일 $x_{ab} = 0, (a, b)\in A$ 이면 $u'_{ab} = u_{ab}$, $c'_{ab} = c_{ab}$

(2-2) 각 호 (i, j)의 시작마디 i와 도착마디 j를 시작점과 종착점으로 놓고 $G_v(X) = (N, A'(X))$

에서 h_{ij}를 최대유통문제를 풀어 구한다.

(2-3) 각 호 (i,j)의 v에 대한 최소유통량 k_{ij} = max { $u_{ij} - h_{ij}$, 0 }를 계산한다.

[단계 3] 만일 호 (i,j)가 $k_{ij} > 0$ 이면 P = P $\cup$ (i,j)에 속한다. 아니면 만일 호 (i,j) 가 $G = (N, A)$에서 $x_{ij} > 0$ 이면 Q = Q $\cup$ (i,j) 에 속한다.

[단계 4] P간의 순위 결정 및 치명호 결정

v에 대한 최소유통량의 내림차순으로 정렬한다. 만일 v에 대한 최소유통량이 양인 호가 존재하지 않으면 수송비용치명호 후보집합 Q에 A의 모든 호를 놓고 [단계 5]로 간다. 만일 v에 대한 최소유통량이 가장 큰 호가 복수 개 존재할 경우 해당 호들로만 수송비용치명호 후보집합 Q 를 놓고 [단계 5]로 간다.

아니면 v에 대한 최소유통량이 가장 큰 호가 유통치명호가 된다. 끝.

[단계 5] 수송비용치명호 후보집합 Q 간의 순위 결정 및 치명호 결정

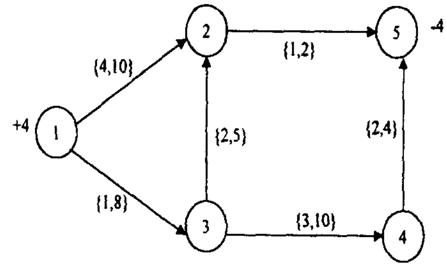
Δ_{ij}를 구한 후 내림차순으로 정렬한다.

Δ_{ij} 가 가장 큰 호가 수송비용치명호가 된다. 끝.

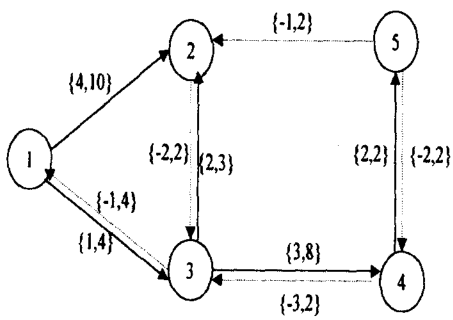
5. 예 제

다음과 같이 마디수가 5개이고 호의 수가 6인 최소비용문제를 고려해 보자. 이 문제의 수요/공급량은 4이며 공급지를 마디 1, 수요지는 마디 5, 최소비용은 20이며, 이 문제의 관련 네트워크가 아래 그림에 나타나 있다.

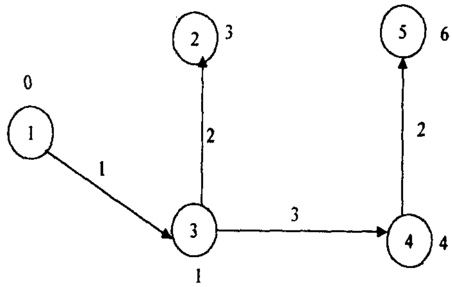
범례 : (비용,용량)



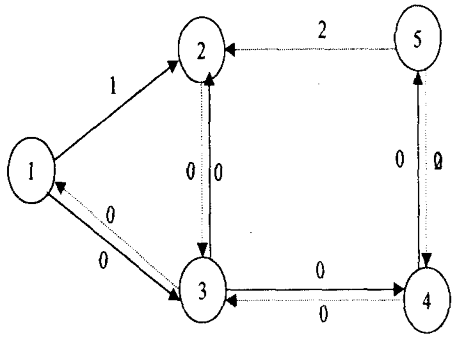
(a) 주어진 네트워크[1]



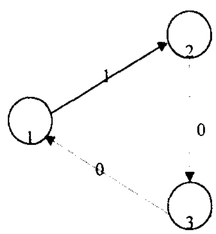
(b) 최적해에 대한 관련 네트워크



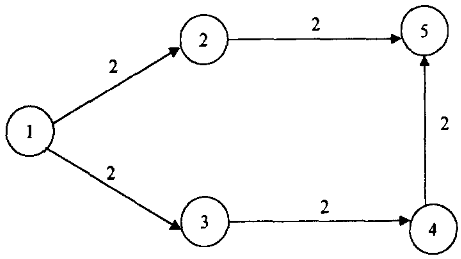
(c) 최적나무



(d) 최적나무의 마디의 잠재가를 통한 호의 비용의 갱신



(e) 호 (3,1)의 최소유방향환 C_{31}



(f) 최적해 X 와 C_{31}을 통해 표현된 유통

[그림 2] 최소비용문제의 치명호문제 해법 예제 및 계산 단계

우선 주어진 최소비용문제의 최적해를 이용한 관련 네트워크에서의 유통치명도를 계산하여보면 다음과 같다.

호 (1,2)의 유통치명도 $k_{12}=\max\{10-14,0\}=0$,

호 (1,3)의 유통치명도 $k_{13}=\max\{8-6,0\}=2$,

호 (2,5)의 유통치명도 $k_{25}=\max\{2-2,0\}=0$,

호 (3,2)의 유통치명도 $k_{32}=\max\{5-7,0\}=0$,

호 (3,4)의 유통치명도 $k_{34}=\max\{10-8,0\}=2$,

호 (4,5)의 유통치명도 $k_{45}=\max\{4-2,0\}=2$이다. 그러므로 유통치명호는 호(1,3), (3,4), (4,5)이다. 그리고 유통치명호의 제거를 통해 보낼 수 없는 유통량 $\theta=2$ 이고 $Q=\{(1,3),(3,4),(4,5)\}$이다.

그러므로 Q에 해당되는 호에 대한 수송비용치명도를 구해보면 다음과 같다. 주어진 최적해에서 호 (1,3)의 제거는 주어진 수요/공급량을 2 단위만큼 만족하지 못하게 된다. 그러므로 호 (1,3)에 현재 4 단위만큼의 유통이 흐르고 있는데 이중에서 2 단위만큼은 호의 제거를 통해 흐르지 못하게 되는 양이고 나머지 2단위는 호(1,3)을 우회하여 2 단위만큼의 유통이 흐르게 되므로 이때의 우회비용을 계산하여야 한다. 그리고 호 (3,4)를 통해서는 현재 2 단위만큼의 유통이 흐르고 있기 때문에 호(3,4)의 제거를 통해 2 단위만큼이 흐르지 못하게 되므로 이에 대한 우회비용을 계산할 필요가 없다. 그리고 호(4,5)의 결과는 호(3,4)의 결과와 같다. 그러므로 호(1,3)에 대한 우회비용을 계산하면 다음과 같다. 관련 네트워크 상에서 호 $(3,1)\in A'(X)$ 을 통과하는 최소유방향환 C_{31}을 구한다. 그리고 이 최소유방향환을 통해 흘려 보낼 수 있는 유통량의 상한

($\min_{(i,j) \in C_{31}} u'_{ij}$)과 θ 중에서 최소값 만큼을 2단위 만큼을 최소유방향환을 따라 우회하여 주면 그 우회비용은 호 (1,3)의 경우 2 * 1 = 2이고, 호 (3,4)와 호(4,5)는 0이기 때문에 우회비용이 가장 큰 호 (1,3)이 수송비용치명호가 된다.

이를 정리하면 다음의 [표 1]과 같다.

5. 결론 및 추후연구과제

본 연구에서는 최소비용문제에서 호의 순위를 결정하기 위해 호의 제거로 가능성이 깨어지는 경우와 최소비용을 증가시키는 경우로 분류하여, 가능성이 깨어지는 호가 더 중요하다는 가정을 통해 최소비용문제의 치명호를 결정하였다.

이 문제의 해법으로는 최소비용문제의 최적해를 변형한 관련 네트워크에서 수정된 유통량을 이용하여 가능성이 깨어지는 호 사이의 순위의 결정이 가능한 방법을 보였고, 최소비용흐름이 증가된 호 사이에 순위의 결정은 관련 네트워크에서 최소비용의 유방향 환을 찾아 해결하는 방법을 제시하였다. 더불어 최소비용문제의 치명호 문제의 특수한 경우가 최단경로문제의 치명호 문제, 최대유통문제의 치명호문제가 됨을 보였다.

본 연구의 결과에서는 어떠한 경우라도 주어진 유통량을 만족시키지 못하는 경우가 비용을 많이 늘리는 경우보다 더 치명적으로 분석되었다. 그러나 이 경우에서 비용을 많이 늘리는 경우와 수요/공급량을 만족시키지 못하는 경우에 대한 trade-off 에 대한 연구가 더 필요하리라 생각된다.

[표 1] 예제의 계산결과

(i,j)	k_{ij}	호의 제거를 통해 시점에서 종점으로 흘려 보낼 수 있는 유통량	호의 분류	비용		호의 순위	결과
				전체 비용	수요량을 만족시키지 못하는 경우의 비용		
(1,2)	0	4		20		⑥	
(1,3)	2	2	Q		10	①	치명호
(3,2)	0	4		22		⑤	
(2,5)	0	4		24		④	
(3,4)	2	2	Q		8	②	
(4,5)	2	2	Q		8	②	

참고문헌

[1] 박순달, 「OR(경영과학)」, 삼정판, 민영사, 1992
[2] 안재근, 정호연, 박순달, "절단기수의 나열을 통한 최대유통문제에서 모든 k-치명호를 찾는 방법",대한산업공학회지 제25권 제2호 (1999.6), pp.184-191
[3] 안재근, 정호연, 박순달, "최단경로문제에서 k개의 치명호를 찾는 방법", 한국경영과학회지 제23권 제4호 (1998.12), pp.11-20
[4] 정호연, "GIS의 가중 네트워크에서 MVA를 결정하는 방법", 공업경영학회지 제21권제45집 (1998.2), pp.181-191
[5] Ahuja, R. K., T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, Network Flows -Theory, Algorithms, and Applications, Prentice-Hall, 1993
[6] Ball, M. O., R. L. Golden, and R. V. Vohra, " Finding the Most Vital Arcs in a Networks", Operations Research Letters, Vol 8, 1989, pp

73 - 76

[7] Corley H. W., David Y. Sha, Most Vital Links and Nodes in Weighted Network, Operations Research Letters, Vol.1 No.4 (1982), pp 157 - 160.

[8] Durbin, E. P., "An Interdiction Model of Highway Transportation", Memorandum RM -4945-PR, May 1966

[9] Fulkerson D. R., G. C. Harding, "Maximizing the Minimum Source-Sink Path subject to a Budget Constraint", Mathematical Programming, No. 13(1977), pp.116-118

[10] Golden R,. "A Problem in Network Interdiction", NRLQ Vol. 25, No. 4 (1978), pp. 711-713

[11] Hamacher H. W., "A Note on K best Network flows", Annals of Operations Research (1995) pp.65-72

[12] Lubore, S. H., Ratliff H. D. and G. T. Sicilia, "Determining The Most Vital Link In a Flow network", NRLQ, Vol.18, No.4, 1971, pp497-502

[13] Malik K., A. K. Mittal, S. K. Gupta, "The k Most Vital Arcs in the Shortest Path Problem", Operations Research Letters, Vol.8 (1989), pp 223 - 227.

[14] Murty, K. G., Network Programming, Prentice-Hall, 1992

[15] Ratliff H. D., G. T. Sicilia and S. H. Lubore, "Finding the n most vital links in flow network", Management Science. Vol. 21, No. 5(1975), pp. 531-539

[16] Wollmer R. D., M. J. Ondrasek, "A Model for Targeting Strikes in an Loc Network", Memorandum RM-5940-PR, September 1969

[17] Bar-Noy A., S. Khuller, B. Schieber, "The Complexity of Finding Most Vital Arcs and Nodes", University of Maryland Technical Reports, CS-TR-3539, 1995

[99년 10월 28일 접수, 99년 11월 11일 최종수정]