

새로운 분할법에 의한 평면 및 곡면의 삼각형 요소망 자동생성

이민철*, 전만수**, 임우섭***

Triangular Mesh Generation on Planes or Surfaces by a New Looping Method

M. C. Lee*, M. S. Joun** and W. S. Lim***

ABSTRACT

A general approach to automatic generation of triangular meshes on three-dimensional surfaces is presented in this paper. The approach, developed with emphasis on program generality and interface with CAD/CAM systems, is based on the double mapping method and the looping method. The double mapping method is introduced and a new splitting scheme is proposed for the looping method employed for triangular mesh generation on the parametric domain. Several application examples are given.

Key words : Automatic Mesh Generation, Three-Dimensional Surface, Triangular Meshes, Double Mapping Method, Looping Method

1. 서 론

최근까지만 하더라도 컴퓨터 하드웨어의 제약과 함께 요소망 자동생성 분체가 유한요소해석 기술의 활용 확산에 큰 걸림돌이 되어 왔다. 기하학적 문제의 특성상 요소망 생성 기술을 확보하는데는 많은 시간과 노력이 요구된다. 이런 이유로 응용의 관점에서 선결 과제에 불과하고 연구 기피 대상이 되어 왔으며, 그 결과 관련 연구가 소수의 연구집단에 의하여 주도되어 왔다. 평면 요소망 생성 기술은 비교적 다양하게 연구되었으며^[1-6], 삼각형의 경우 Delaunay 삼각화기법^[1,2,3]의 사용이 일반화되어 있고, 사각형의 경우 회로법(looping method^[4,5,6])이 가장 널리 사용되고 있다. 대부분의 곡면 요소망 생성 기술들은 사상법(mapping method^[7,8])에 근간을 두고 발전되어 왔다.

삼각형 및 사면체 요소망이 사각형 및 육면체 요소에 비하여 결점이 많은 이유로 인하여, 이에 관한 유한요소해석 목적의 연구는 사각형 및 육면체 요소에 비하여 주목을 받지 못하고 있는 것이 사실이다. 그러나, 삼각형 요소망은 CAD/CAM 분야에서 곡면의 근사적 표현 목적과 급속조형기술(rapid prototyping) 등의 응용 목적으로 널리 연구되고 있다^[9-11]. 또한 접촉여부의 판단과 법선벡터의 계산 등에 효과적이므로 단조 시뮬레이션 등의 금형을 표현하기 위한 목적으로도 널리 사용되고 있다.

Delaunay 삼각화기법은 비록 몇 가지 단점^[12]이 보고되고 있으나, 확장성과 일반성이 뛰어나므로 이에 관한 연구가 폭넓게 이루어졌다. 반면, Shuiter와 Hansen^[4]에 의하여 개발된 회로법에 바탕을 둔 삼각형 요소망 생성 기술은 이 방법이 지닌 장점에 비하여 충분한 연구가 수행되지 않았다. 회로법은 경계요소의 입력만으로 요소망의 밀도를 제어할 수 있고 비교적 양호한 요소망을 얻을 수 있다는 장점을 가지고 있다^[6].

곡면상의 요소망 생성기법은 대부분 사상법에 근간을 두고 있다. 이 방법에서는 곡면을 사상평면에

*경성대학교 기계공학과, 항공기부품기술연구소

**정회원, 경성대학교 기계공학과, 항공기부품기술연구소

***요성EBARA(주)

투영하거나 사상하여 예비 요소망을 생성한 후 예비 요소망을 원래의 3차원 영역으로 역사상함으로써 요소망을 생성한다^[7,8]. 이 방법은 사상평면에서 생성된 요소망을 삼차원 곡면상으로 역사상했을 때, 형상비가 큰 요소망이 생성되거나, 요소망이 퇴화되는 단점을 지니고 있다. 저자들^[13]은 곡면상의 사각형 요소망 생성을 위하여 2중사상기법(double mapping method)을 개발한 바 있다. 이 방법은 이미 사각형 요소망 생성 프로그램의 개발에 성공적으로 적용되었다.

본 연구에서는 요소망의 비틀림이 적고, 기하학적인 형상에 제약이 없는 삼각형 요소망 생성 목적의 새로운 회로법을 제시한다. 이를 바탕으로 2중사상기법을 기초로 한 곡면상의 삼각형 요소망 생성 기법을 제시하며, 복잡한 형상에 적용해 봄으로써 일반성을 검증한다.

2. 새로운 분할함수에 의한 삼각형 요소망의 생성

회로법에서는 하나의 폐회로를 두 개의 폐회로로 분할하는 작업을 모든 폐회로가 세 개의 절점을 가질 때까지 반복함으로써 삼각형 요소망을 생성한다. 이 기법의 핵심은 분할방법에 있다.

본 연구에서는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 분할선 또는 분할후보선에 대하여 다음과 같은 분할기준함수 η 를 정의하고, 이 함수가 최소가 되는 선분을 최종 분할선으로 선정한다.

2.1 폐회로가 볼록할(convex) 경우

$$\eta = c_1 \sum_{k=1}^4 \psi(\theta^k) + c_2 \frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}{d} + c_3 \sum_{k=1}^n \frac{|s_{ideal}^k - s_{actual}^k|}{\rho_{max}} + c_4 \frac{(\rho_i + \rho_j)}{2\rho_{max}} \tag{1}$$

여기서

$$\psi(\theta) = \begin{cases} \left| \frac{3\theta - \pi}{2} \right|, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \left| \frac{3\theta}{2} - \pi \right|, & \theta \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{2}$$

이다.

2.2 폐회로가 오목할(concave) 경우

$$\eta = c_1 \sum_{k=1}^4 \phi(\theta^k) + c_2 \frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}{d}$$

$$+ c_3 \sum_{k=1}^n \frac{|s_{ideal}^k - s_{actual}^k|}{\rho_{max}} + c_4 \frac{(\rho_i + \rho_j)}{2\rho_{max}} \tag{3}$$

여기서

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 3 - \frac{12\theta}{\pi}, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\cos(6\theta - \pi) + 1}{2}, & \theta \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{4}$$

이다. 식 (1)과 (3)에서 c_1, c_2, c_3, c_4 는 가중상수(weighting constant)이다. d 는 폐회로를 에워싸는 직사각형에서 대각선의 최소 길이를 의미한다. n 은 분할선분 $i-j$ 를 분할한 숫자이고, s_{actual}^k 은 절점 i 와 j 의 요소밀도상수를 선형 보간을 실시함으로써 분할점(splitting point) $k-1$ 과 k 에 부여한 요소밀도상수의 평균값을 의미한다. s_{actual}^k 은 분할점 $k-1$ 과 k 사이의 길이 l 를 뜻한다. ρ_i 와 ρ_j 는 Fig. 1의 폐회로상의 절점 i 와 j 에 부여된 요소밀도상수이고, ρ_{max} 는 폐회로상의 모든 절점에 부여된 요소밀도상수중의 최대값이다. θ^i 와 θ^j 는 Fig. 1에서 정의된 바와 같이 각각 절점 i 와 j 에서의 내각을 의미하고, θ_i ($i=1,2,3,4$)는 Fig. 1에서 정의되어 있는 바와 같다. θ_{min} 은 폐회로상의 모든 절점에서 정의된 θ ($i=1,2,3,4$) 중에서 최소값을 의미한다.

구체적인 요소망 생성 과정에 관한 설명은 참고문헌^[4,5,6]으로 대신한다. Figs. 2-4는 본 연구에서 제시한 분할기준함수를 사용하여 생성한 삼각형 요소망을 나타내고 있다. Fig. 2는 해석영역에 공극이 존재하는 예이다. Fig. 2(a)는 외부경계와 공극들의 경계를 바탕으로 자동생성된 공극분할 선분을 나타내고 있다. Fig. 2(b)는 외부회로, 내부회로, 공극분할 선분등을 하나의 폐회로로 취하여 생성한 요소망을 나타내고 있다. 폐회로의 형상과 요소밀도가 복잡함에도

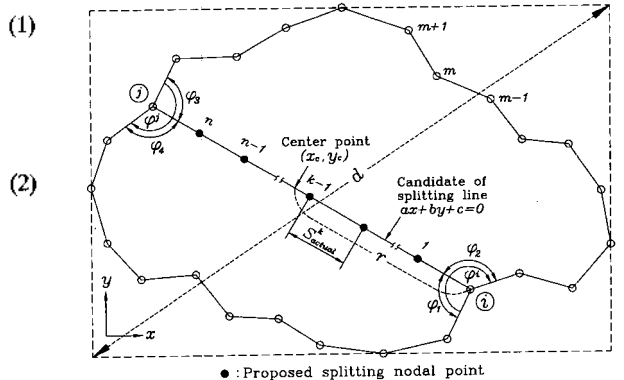


Fig. 1. Concept of a looping strategy and definition of splitting parameters.

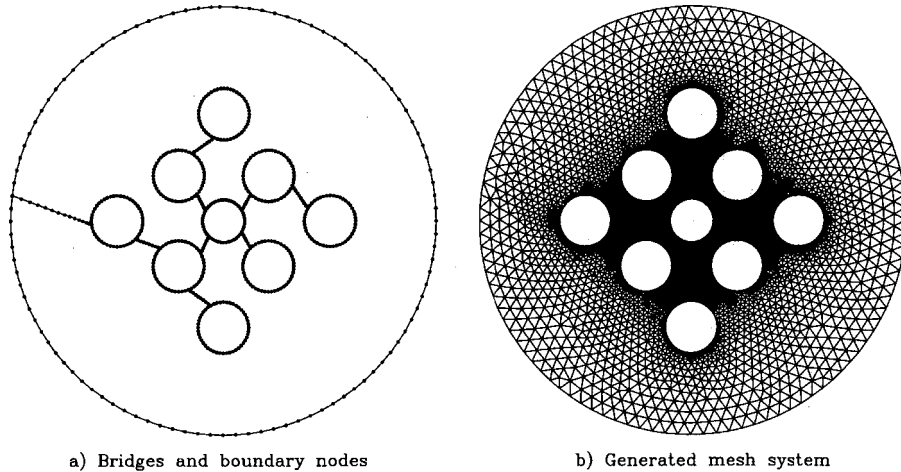


Fig. 2. Mesh generation of a complex domain with many cavities.

불구하고, 요소망의 밀도가 양호함을 알 수 있다. Fig. 3은 임의의 형상에 대하여 생성한 요소망이다. 요소밀도가 높은 부분에서 낮은 부분으로 적절하게 변화하고 있다. Fig. 4는 온도해석 및 응력해석 목적에 적합하도록 생성한 축대칭 금형의 요소망이다. 비교적 요소망 밀도 변화가 큼에도 불구하고 천이 요소가 많지 않으며, 정삼각형에 가까운 요소가 많이 차지함을 알 수 있다.

3. 2중사상기법에 의한 곡면상의 요소망 자동 생성

기존의 사상기법에 의한 곡면상의 요소망 생성기술은 요소망의 품질이 형상에 크게 영향을 받는 문제를 안고 있다. 저자들은 이러한 문제를 해결하기 위하여 2중사상기법¹³⁾을 제안하였다. 2중사상기법에 바탕을 둔 요소망 자동생성 기법의 개념을 Fig. 5에 나타내었으며, 2중사상기법에 바탕을 둔 삼각형 요소망 자동생성 기법의 골격을 다음과 같이 요약하였다.

- ① 기하정보와 위상정보로부터 경계절점을 생성한 후, 생성된 경계절점 정보를 곡면과 함께 사상평면에 사상한다. Fig. 5(b)에 예를 나타내었다.
- ② 사상평면에 사상된 형상을 재사상평면으로 재사상한다. Fig. 5(c)에 예를 나타내었다.
- ③ 재사상평면에 재사상된 형상에 대하여 2차에서 제시한 회토법을 이용하여 요소망을 생성한다. Fig. 5(d)에 예를 나타내었다.
- ④ 재사상평면에서 생성된 요소망을 사상평면으

로 역사상합니다.

⑤ 사상평면에 역사상된 요소망의 매개변수값을 구한 후, 원래의 곡면상으로 역사상한다. Fig. 5(e)에 예를 나타내었다.

본 연구에서는 전술한 곡면상의 삼각형 요소망 자동생성 기법에 바탕을 둔, 범용 요소망생성 프로그램인 NEPMESH의 일부 모듈(module)을 개발하였다. 개발된 프로그램의 요소기술은 CAD/CAM 연결(interface), 다중패치처리기법, 이중사상기법 등에 있다.

요소망 생성기술은 응용 목적의 연구 대상이므로 CAD/CAM 연결은 매우 중요하다. 본 연구에서는 적용성과 일반성을 감안하여 CAD/CAM 시스템에서 생성한 IGES 파일로부터 형상정보를 입력하여, IGES 파일의 E144로 정의되는 트림곡면(trimmed surface)의 매개변수 정보를 이용하였다. 트림곡면의 기초곡면(basis surface)은 매개변수 형태로 입력되며, 경계는 매개변수 형태 또는 3차원 좌표로 입력된다. 경계가 3차원 좌표로 입력되는 경우, 경계를 기초곡면에 투영하여 매개변수 값을 구하였다. 또한 공유경계처리기법¹³⁾을 이용하여 기하정보로부터 위상정보를 자동생성하였다.

일반적으로 상용 모델러를 이용하여 생성된 물체는 다수의 곡면으로 구성되어 있으며, 각 곡면은 다수의 패치로 이루어져 있다. 회토법을 이용하여 요소망을 생성할 경우, 각 곡면상의 폐경계를 하나의 폐회로로 간주하는 것이 기하학적 특징을 반영하고 과도한 요소망 생성을 방지하는 측면에서 바람직하다.

본 연구에서는 곡면상의 폐경계를 하나의 폐회로

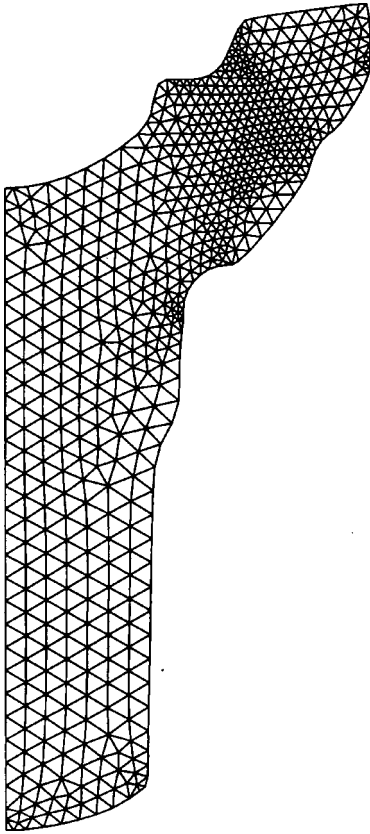


Fig. 3. Mesh generation of an arbitrary geometry.

로 간주하기 위하여 CAM 분야에서 사용하고 있는 다중패치처리기법을 요소망 자동생성 목적에 적합하도록 개선하여 사용하였다. 즉, Fig. 6에서 보는 바와 같이 u -방향으로 i 번째이고 v -방향으로는 j 번째에 위치한 패치에 대한 사상함수를 패치 길이를 고려하여 다음과 같이 제안하였다.

$$\begin{aligned}
 u_g &= \frac{\sum_{k=1}^{i-1} L_k^u + u_i L_i^u}{\sum_{k=1}^n L_k^u} \\
 v_g &= \frac{\sum_{k=1}^{j-1} L_k^v + v_j L_j^v}{\sum_{k=1}^m L_k^v}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

여기서 하첨자 g 는 광역좌표를 l 은 지방좌표를 의미하며, n 은 u -방향의 패치 수를, m 은 v -방향의 패치 수를 뜻한다. L_k^u , L_k^v 는 그림에서 보는 바와 같이 k 번

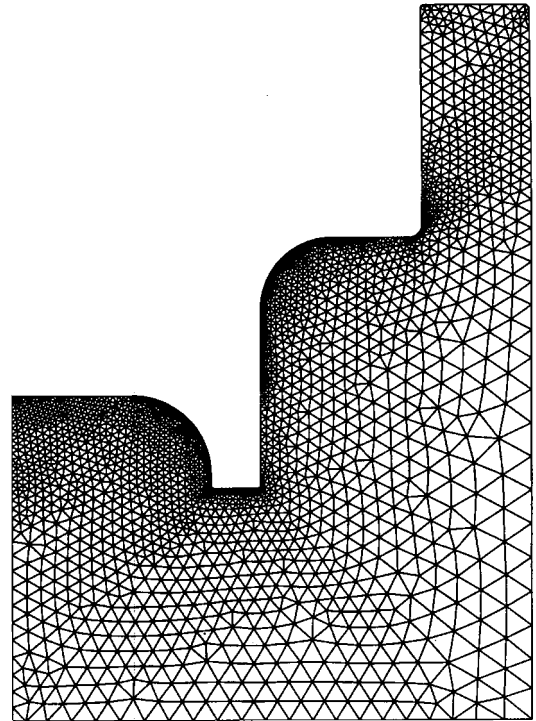


Fig. 4. Mesh generation of a forging die composed of arcs and line segments.

째 패치의 u -방향과 v -방향의 길이를 뜻한다.

예를 들면, Fig. 5(b)는 Fig. 5(a)의 트림곡면과 곡면상의 경계절점을 식 (5)의 사상함수를 이용하여 매개변수영역으로 사상한 것이다. 그림에서 보는 바와 같이, u_g -방향 또는 v_g -방향으로 보았을 때 경계절점이 비교적 균일하게 분포하고 있다. 이 점은 사상함수에서 패치 길이의 영향이 반영된 결과이다. 그러나 각 방향에 대한 경계절점의 밀도가 비교적 큰 차이를 보이고 있다. 이 문제로 인하여 사상함수 (5)를 요소망 자동생성 목적으로 직접 사용하는 것이 바람직하지 못하다. 매개변수 영역에서 3차원 곡면 형상을 근사적으로 표현할 수 없을 경우, 주어진 경계점 정보로부터 요소망 생성에 실패할 확률이 높을 뿐만 아니라, 생성한 요소망을 곡면상으로 사상했을 때 요소망의 왜곡현상이 발생하기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 재사상기법으로 이 문제를 해결하였다. 재사상기법이란 매개변수 영역(u, v)에 사상된 형상을 요소망의 품질을 고려하여, 제 2의 사상면(재사상 영역, (u, v))에 다시 사상하는 것을 일컫는다.

재사상된 2차원 영역에서의 경계 형상은 기초곡면을 펼친 모양일 때 가장 이상적이다. 그런데 임의의

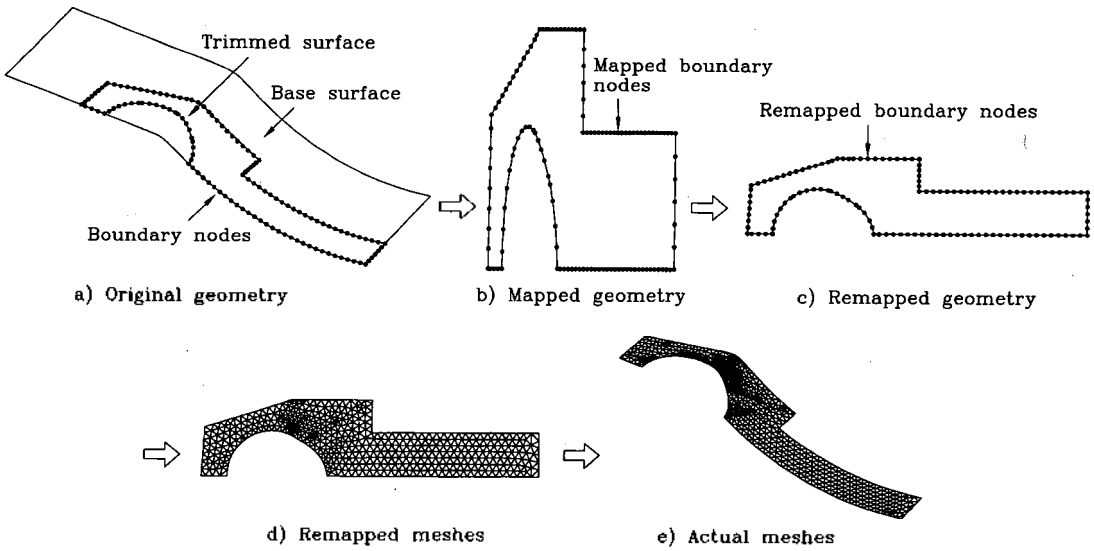


Fig. 5. Conceptual procedures of the presented approach.

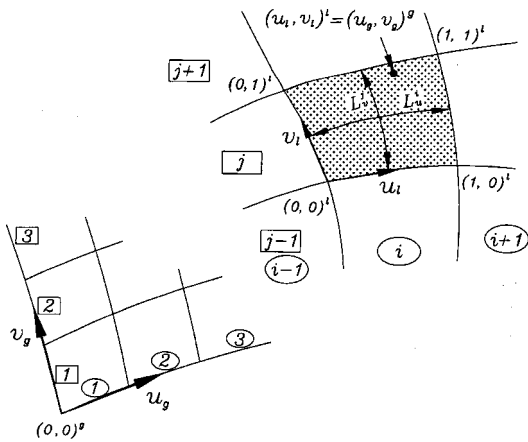


Fig. 6. Multi-patches treatment scheme.

$$N_3 = u_g v_g$$

$$N_4 = u_g (1 - v_g)$$

이다. Fig. 7에서 보는바와 같이 점 (u_1, v_1) 는 재사상영역의 정의구역 내의 임의의 점으로 선정할 수 있으며, l_1 을 만족하도록 점 (u_2, v_2) 를 결정한다. 점 (u_3, v_3) 과 점 (u_4, v_4) 는 경계의 길이 l_2, l_3, l_4 의 제 조건과 l_5 와 l_6 중에서 오차를 최소로 하는 길이로써 결정한다.

Fig. 5(c)는 재사상한 경계형상을 나타내고 있으며, Fig. 5(d)는 재사상 영역에서의 요소망 생성결과를, Fig. 5(e)는 재사상 영역에서 생성한 요소망을 3차원 공간상으로 역사상한 결과를 나타내고 있다.

4. 적용예제

3차원 곡면을 2차원에 펼칠 수가 없기 때문에 펼친 형상을 근사적으로 표현할 수밖에 없다. 본 연구에서 사용한 재사상기법을 Fig. 7에 나타내었다. 기초 곡면의 경계를 재사상 영역에서 근사적으로 반영하기 위한 목적으로 다음과 같은 재사상 함수를 제안하였다.

$$u_g(u_g, v_g) = N_1 u_1' + N_2 u_2' + N_3 u_3' + N_4 u_4' \quad (6)$$

$$v_g(u_g, v_g) = N_1 v_1' + N_2 v_2' + N_3 v_3' + N_4 v_4'$$

여기서

$$N_1 = (1 - u_g)(1 - v_g)$$

$$N_2 = (1 - u_g)v_g \quad (7)$$

Figs. 8-10에 본 연구에서 개발한 요소망 자동생성 기법과 프로그램 NEPMESH을 이용하여 생성한 요소망을 나타내었다. 복잡한 3차원 곡면상의 요소망 자동생성을 위하여 공차실린더기법(tolerance cylinder scheme^[13])에 의한 경계절점부여 기법을 이용하였다. Fig. 8는 213개의 트럼곡면으로 구성된 기계부품(ACIS에서 모델링하였음)의 표면상에 생성한 57,872개의 삼각형요소와 28,912개의 절점을 나타내고 있다. Fig. 9는 실린더 헤드의 표면에 생성된 삼각형 요소망(63,909개의 요소와 32,555개의 절점)을 나타내고 있다. Fig. 10은 74,284개의 삼각형요소와 37,

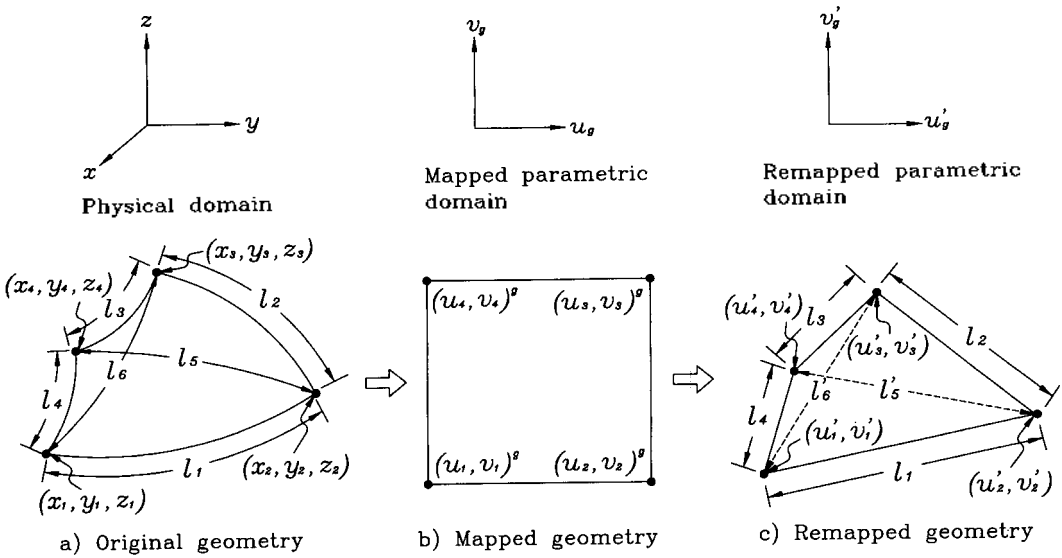


Fig. 7. Mapping and remapping.

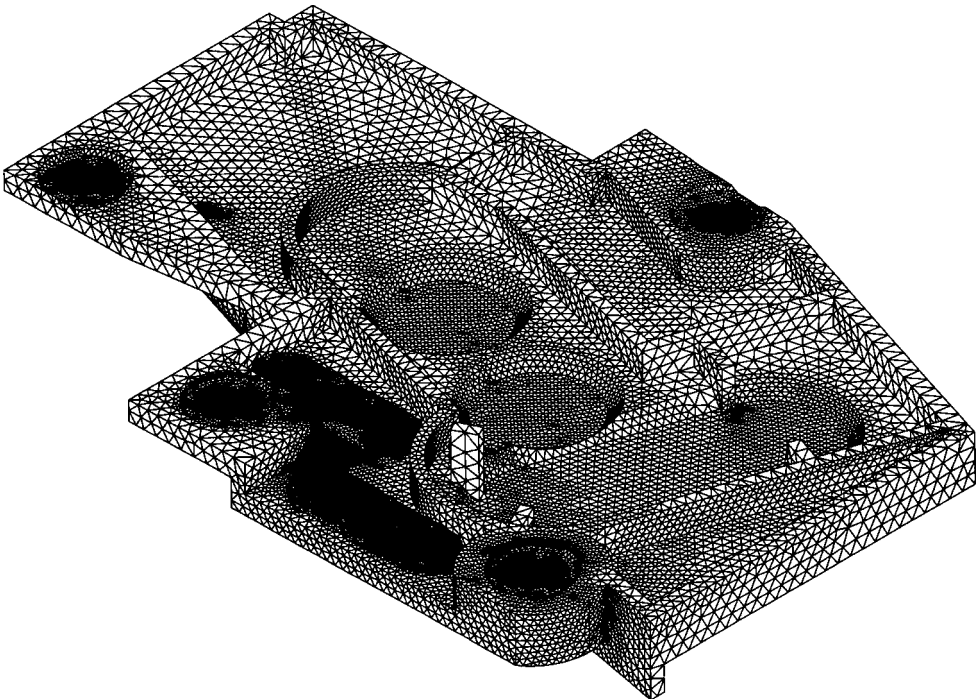


Fig. 8. Meshes generated on a mechanical parts.

136개의 절점으로 구성된 커빅팅로드의 표면을 나타내고 있다. Fig. 9와 Fig. 10은 CATIA에서 모델링하였으며, 각각 165개와 136개의 트림곡면으로 구성된 것이다.

사용된 예제의 형상은 뾰족한 모서리를 가진 다수의

곡면들로 구성되어 있으며, 매우 복잡하다. 그럼에도 불구하고 요소망의 품질이 양호하며 생성된 요소망은 정삼각형에 가깝다. 형상의 복잡성에 비하면 천이요소도 많지 않다. 이러한 점들은 본 연구에서 제시한 곡면상의 삼각형 요소망 자동생성 기법의 장점이다.

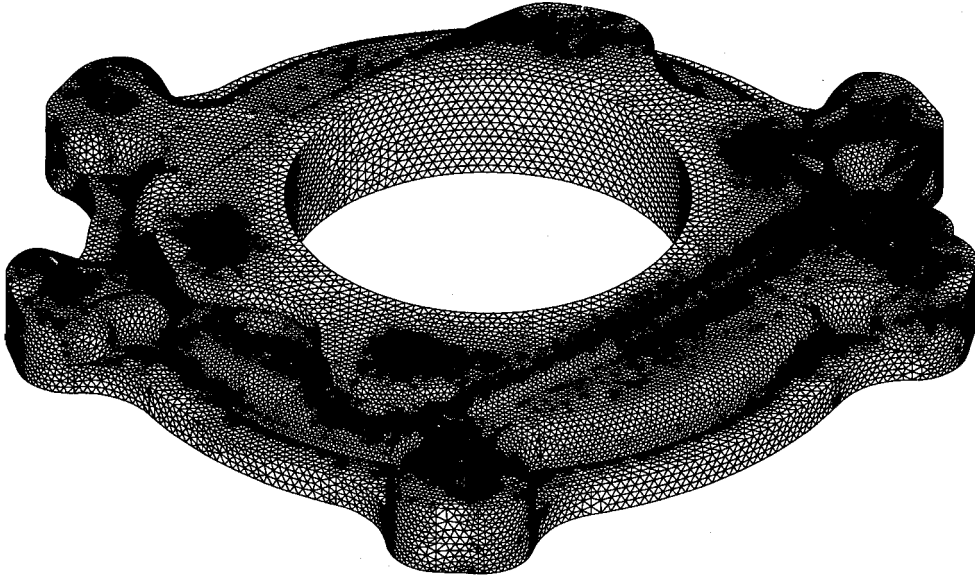


Fig. 9. Meshes generated on the shell structure.

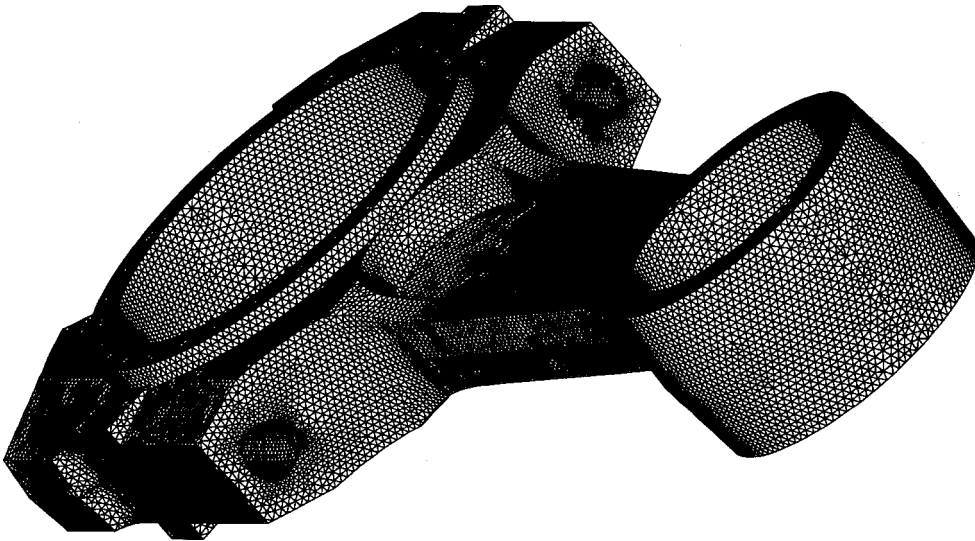


Fig. 10. Meshes generated on a connecting-rod surface.

5. 결 론

및 일반성을 검증하였다.

본 연구에서는 평면 및 곡면 상의 삼각형 요소망을 생성하기 위한 일반적 접근방법을 제시하였다. 기존의 회로법을 개선하기 위한 새로운 분할기준합수를 제안하였으며, 곡면상에 삼각형 요소망을 생성시키기 위하여 일반성이 강조된 2중사상기법을 사용하였다. 각종 적용예제를 통하여 제시된 분할기준합수 및 분할기법의 효과와 개발된 프로그램의 적용성

참고문헌

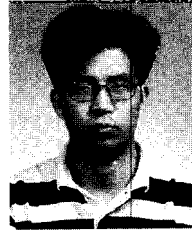
1. Boyer, A., "Computing Dirichlet Tessellations", *Comp. J.*, Vol. 24, No. 2, pp. 162-166, 1981.
2. Watson, D.F., "Computing the n-Dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes", *Comp. J.*, Vol. 24, No. 2, pp. 167-172, 1981.
3. Fang, J., Parpia, J.H. and Kennon, S.R., "Sweepline

algorithm for unstructured grid generation on two-dimensional non-convex domains", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 36, pp. 2761-2778, 1993.

4. Shuter, M.C.L. and Hansen, D.L., "A General Purpose automatic Mesh Generator for Shell and Solid Finite Elements", *Proc. 2nd Int. Comp. Eng. Conf., Comp. Eng., San Diego, California, Aug. 15-19, ASME Comp. Eng. Div.*, pp. 29-34, 1982.
5. Talbert, J.A. and Parkinson, A.R., "Development of an Automatic, Two-Dimensional Finite Element Mesh Generator Using Quadrilateral Elements and Bezier Curve Boundary Definition", *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 29, pp. 1551-1567, 1990.
6. Joun, M.S. and Lee, M.C., "Quadrilateral Finite-Element Generation and Mesh Quality Control for Metal Forming Simulation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 4059-4075, 1997.
7. 채수원, 손창영, "3차원 곡면에서 삼각형 유한 요소망의 자동생성", 한국 CAD/CAM학회 논문집, 제 1권, 제 3호, pp. 911-936, 1996.
8. Potyondy, D.O., Wawrzynek, P.A. and Ingraffea, A. R., "An Algorithm to Generate Quadrilateral or Triangular Element Surface Meshes in Arbitrary Domains with Applications to Crack Propagation", *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 38, pp. 2677-2701, 1995.
9. Sheng, X. and Hirsch, B.E., "Triangulation of Trimmed Surfaces in Parametric Space", *Computer-Aided Design*, Vol. 24, No. 8, pp. 437-444, 1992.
10. Turkiyyah, G.M., Storti, D.W., Ganter, M., Chen, H. and Vimawala, M., "An Accelerated Triangulation Method for Computing the Skeletons of Free-Form Solid Models", *Computer-Aided Design*, Vol. 29, pp. 5-19, 1997.
11. Piegl, L.A. and Tiller, W., "Geometry-Based Triangulation of Trimmed NURBS Surfaces", *Computer-Aided Design*, Vol. 30, pp. 11-18, 1998.
12. Dari, E.A. and Buscaglia, G.C., "Mesh Optimization: How to Obtain Good Unstructured 3D Finite Element Meshes with Not-So-Good Mesh Generators", *Struct.*

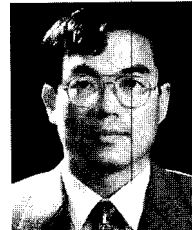
Optim., Vol. 8, pp. 181-188, 1994.

13. Lee, M.C. and Joun, M.S., "General Approach to Automatic Generation of Quadrilaterals on Three-Dimensional Surfaces", *Comm. Num. Meth. Eng.*, Vol. 14, No. 7, pp. 609-620, 1998.



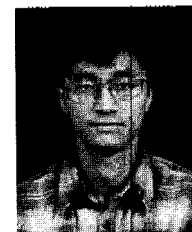
이민철

1995년 경상대학교 기계공학과 학사
 1997년 경상대학교 기계공학과 공학석사
 1997년~현재 경상대학교 기계공학과 박사과정
 관심분야 : CAD/CAE, Mesh Generation



전만수

1983년 서울대학교 기계설계학과 학사
 1985년 한국과학기술원 기계공학과 공학석사
 1985년~1989년 삼성항공산업(주) 연구소 연구팀장
 1992년 포항공과대학교 기계공학과 공학박사
 1992년~현재 경상대학교 기계공학과 부교수
 1997년~1998년 오하이오주립대학교 교환교수
 관심분야 : Metal Forming CAE, Mesh Generation



임우섭

1983년 서울대학교 기계설계학과 학사
 1989년 부경대학교 기계공학과 공학석사
 1985년~현재 효성에마라(주) 공장장
 관심분야 : 산업용 펌프설계 및 생산, 구조물 및 회전체진동