

## 에너지 최소화에 근거한 B-spline curve fitting을 이용한 근사적 lofting 방법

박형준\*, 김광수\*\*

### Approximate Lofting by B-spline Curve Fitting Based on Energy Minimization

Hyung-Jun Park\* and Kwang-Soo Kim\*\*

#### ABSTRACT

Approximate lofting or skinning is one of practical surface modeling techniques well used in CAD and reverse engineering applications. Presented in this paper is a method for approximately lofting a given set of curves within a specified tolerance. It is based on refitting input curves simultaneously on a common knot vector and interpolating them to get a resultant NURBS surface. A concept of reducing the number of interior knots of the common knot vector is well adopted to acquire more compact representation for the resultant surface. Energy minimization is newly introduced in curve refitting process to stabilize the solution of the fitting problem and get more fair curves. The proposed approximate lofting provides more smooth surface models and realizes more efficient data reduction especially when the parameterization and compatibility of input curves are not good enough. The method has been successfully implemented in a new CAD/CAM product *VX Vision*<sup>TM</sup> of Varimetrix Corporation.

**Key words** : B-spline curve fitting, Energy minimization, Approximate NURBS lofting

#### 1. 서 론

Lofting 또는 skinning은 가장 널리 이용되는 곡면 모델링 기법 중의 하나로서 Fig. 1에서와 같이 여러 개의 입력 곡선들을 보간(interpolation)하는 곡면을 생성하는 기법이다.<sup>[1-4]</sup> 이러한 lofting은 CAD나 컴퓨터 그래픽스 분야에서 물체의 외형을 모델링하고자 할 때에 사용되기도 하고, 역공학(reverse engineering) 분야에서 원하는 물체의 외형에서 측정된 단면들로부터 형상 모델을 복원하고자 할 때에도 유용하게 사용된다.<sup>[5]</sup>

일반적으로 입력 곡선들의 차수와 knot vector가 다르기 때문에 차수올림(degree elevation) 및 knot

insertion 기법<sup>[6]</sup>을 이용하여 입력 곡선들의 형상은 변화시키지 않고 차수와 knot vector를 일치시켜 준다. 즉, 입력 곡선들의 적합성(compatibility)을 유지시킨다. 그런 다음, 적합화된(compatible) 입력 곡선들을 지나는 loft 곡면을 구한다. 이러한 차수올림 및 knot insertion에 근거한 lofting 방식을 exact lofting이라고 한다. 입력 곡선들은 결과 곡면의 정확한 iso-curve가 된다.

Exact lofting 방식은 입력 곡선들의 parameterization이나 적합성에 영향을 많이 받기 때문에 곡면의 품질이 좋지 않거나 곡면의 조종점들의 수가 매우 커지는 단점을 갖고 있다. 이러한 상황은 입력 곡선의 수가 커짐에 따라 자주 발생한다. 최근에 이러한 exact lofting의 단점을 보완하기 위해 근사적(approximate) lofting 기법들이 제시되었다. 근사적 lofting에서는 입력 곡선들의 적합성 유지를 위해 curve fitting 기법이

\*정회원, 삼성전자 중앙연구소 E-CIM팀

\*\*종신회원, 포항공과대학교 산업공학과

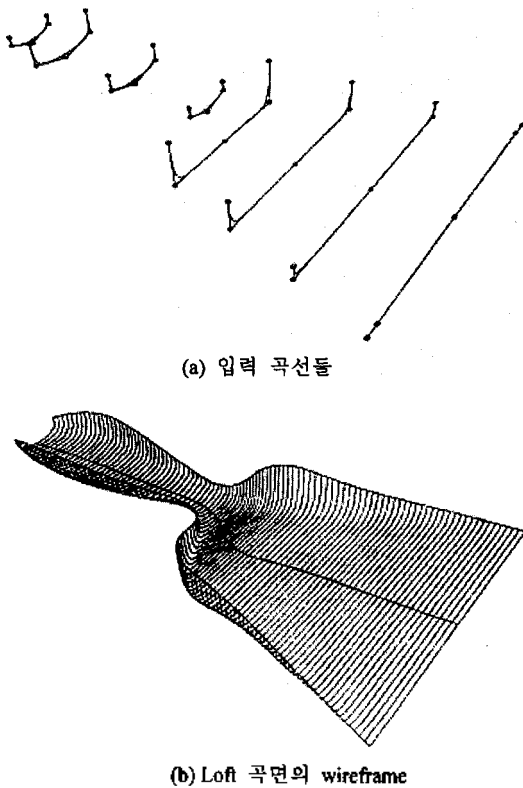


Fig. 1. Example of lofting. (a) input curves, (b) wireframe of lofted surface.

중요하게 이용된다. 근사 허용오차에 따라 입력 곡선으로부터 점들을 샘플링(sampling)하고, 공통의 차수와 knot vector를 적절히 선정한 다음, 샘플링 점들을 지나거나 근사하는 곡선을 생성함으로써 입력 곡선들의 적합성을 유지시킨다. Park와 Kim<sup>[6]</sup>은 역공학 분야에서 쉽게 발생하는 측정 profile들로부터 loft 곡면을 근사하는 방법을 제시하였다. 그들의 방법에서는 근사 오차에 따라 곡면의 조종점 개수를 효율적으로 줄이는 방법이 제시되었다. 그리고, Piegl과 Tiller<sup>[7]</sup>는 입력 곡선들을 근사적으로 lofting하여 NURBS 곡면을 생성하는 일반적인 방법을 제시하였다.

본 논문에서는 Park와 Kim<sup>[6]</sup>이 제시한 근사 곡면의 조종점을 줄이는 방식을 바탕으로 입력 곡선들을 근사적으로 지나는 loft 곡면을 생성하는 방법을 제시한다. 기존의 방법<sup>[6-7]</sup>에서는 least square 오차의 최소화만을 고려한 curve fitting 기법<sup>[8-12]</sup>을 이용하여 입력 곡선들의 적합성을 유지했다. 이러한 least square 오차 최소화에 근거한 curve fitting 기법은 입력점들의 분포 또는 parameterization의 영향에 민감하여 불안정한 해를 도출하기 쉬우며, 좋지 않은 결과

곡선을 생성할 수 있다. 그러나, 본 논문에서 제시된 방법은 에너지 최소화<sup>[13-15]</sup>와 least square 오차 최소화를 함께 고려한 curve fitting 기법을 이용하여 curve fitting 문제의 해를 보다 안정화시키고, 부드러운 곡선을 제공한다. 결과적으로, 본 논문의 근사적 lofting 방법은 곡면의 품질을 보다 향상시키고, 적은 수의 조종점으로 이루어진 간결한 곡면 모델을 제공한다.

제2장에서는 논문의 전개를 위해 필요한 B-spline 곡선 및 곡면의 정의에 대해 언급하고, 제3장에서는 논문에서 제시하는 근사적 lofting 방법에 중요하게 이용되는 에너지 최소화에 근거한 B-spline curve fitting 기법에 대해 설명한다. 제4장에서는 논문에서 제시하는 근사적 lofting 방법에 대해 설명하고, 제5장에서는 근사적 lofting 방법의 적용 사례에 대해 설명한다. 마지막으로 결론을 맺는다.

## 2. B-spline 곡선과 곡면의 정의

B-spline 함수는 매개변수 곡선 및 곡면을 표현하는데 매우 많이 이용되는 함수로서  $i$ 번째( $p-1$ )차 표준화된 B-spline basis 함수는 다음과 같이 정의된다.<sup>[2]</sup>

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+p}-t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} N_{i+1,p-1}(t)$$

여기서, 매듭값(knot value)  $t_i$ 는 knot vector의 원소로서  $t_i \leq t_{i+1}$ 을 만족한다. ( $p-1$ )차 B-spline 곡선  $C(t)$ 는 다음과 같이 B-spline 함수들의 linear combination으로 표현될 수 있다.<sup>[2]</sup>

$$C(t) = \sum_{i=0}^n B_i N_{i,p}(t) \quad (t_{p-1} \leq t \leq t_{n+1}) \quad (2)$$

여기서,  $(n+1)$ 개의 조종점  $B_i$ 는 조종 다각형(control polygon)을 이루고,  $N_{i,p}(t)$ 는 knot vector  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+p-1}, t_{n+p}\}$ 상에서 정의된다.

일반적으로 매듭값을 처음과 끝에서  $p$ 번씩 반복시키는 clamped knot vector  $T = \{\alpha, \dots, \underbrace{\alpha = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-p+1}}_p, \xi_{n-p+2} = \beta, \dots, \beta\}$ 를 많이 이용하는데 닫힌 곡선

(closed curve)인 경우에는 다음과 같이 정의되는 periodic knot vector  $T$ 를 이용하기도 한다.<sup>[5,6]</sup>

$$T = \{\xi_{-(p-1)}, \dots, \xi_{-1}, \alpha = \xi_0, \dots, \xi_{n-p+2} = \beta, \xi_{n-p+3}, \dots, \xi_{n+1}\}$$

여기서  $\xi_1 = \xi_{i+1} + \xi_{n-p+2}, \xi_{n-p+3}, \dots, \xi_{n-p+2+i} = \xi_{n-p+1+i} + \xi_{n-p+1}, (i = 1, \dots, p-1)$ 이고,  $\xi_k (k=0, \dots, n-p+2)$ 를 domain knot이라고 부른다. 보통  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 0과 1을 사용한다.

B-spline 곡면은 B-spline 곡선들의 tensor product 형식으로 정의될 수 있는데,  $(p-1) \times (q-1)$ 차 B-spline 곡면은 다음과 같이 정의된다.<sup>[2]</sup>

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_{i,j} M_{j,p}(v) N_{i,p}(u) \quad (3)$$

$$(u_{p-1} \leq u \leq u_{m+1}, v_{q-1} \leq v \leq v_{n+1})$$

여기서,  $(m+1) \times (n+1)$ 개의 조종점  $V_{ij}$ 는 3차원 상에서의 조종망(control net)을 이루며,  $N_{i,p}(u)$ 는 knot vector  $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{m+p-1}, u_{m+p}\}$ 상에서 정의되는 표준화된 B-spline basis 함수들이고,  $M_{j,p}(v)$ 는 knot vector  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n+q-1}, v_{n+q}\}$ 상에서 정의되는 표준화된 B-spline basis 함수들이다.  $S(u, v=v_i)$ 는 곡면 상에서 매개변수  $v=v_i$ 가 일정한 u-curve로서 B-spline 곡선으로 표현될 수 있다. 마찬가지로 v-curve  $S(u=u_i, v)$ 도 B-spline 곡선으로 표현될 수 있다. B-spline 곡선 및 곡면에 대한 상세한 설명은 문헌을 참고하기 바란다.<sup>[14]</sup>

### 3. 에너지 최소화에 근거한 B-spline curve fitting

본 장에서는 논문에서 제시하는 근사적 lofting 방법에서 중요하게 이용되는 에너지 최소화에 근거한 B-spline curve fitting 기법에 대해 설명하고자 한다. B-spline curve fitting은 주어진 점들  $P_i (i=0, \dots, m)$ 을 지나거나 근사하는 B-spline 곡선  $C(t)$ 를 구하는 문제이다. 경우에 따라서는 특정점에서의 미분벡터 또는 법선벡터 등의 제약 조건이 주어지는 경우도 있다. B-spline 함수의 차수, knot vector  $T$ , 입력점  $P_i$ 에 대한 곡선 상의 매개변수  $\bar{t}_i (i=0, \dots, m)$ 가 결정되었다면, 구하고자 하는 곡선  $C(t)$ 와 입력점  $P_i$ 와의 관계를 다음과 같은 선형 시스템으로 나타낼 수 있다.

$$P_j = C(\bar{t}_j) = \sum_{i=0}^m B_i N_{i,p}(\bar{t}_j) \quad (j = 0, \dots, m)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} N_{0,p}(\bar{t}_0) & \dots & N_{n,p}(\bar{t}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}(\bar{t}_m) & \dots & N_{n,p}(\bar{t}_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\Rightarrow AX = P$$

여기서,  $A$ 는  $(m+1) \times (n+1)$  시스템 행렬이고,  $X = [B_0 \dots B_n]^T$ 는  $(n+1) \times 1$  조종점 벡터이고,  $P = [P_0 \dots P_m]^T$ 는  $(m+1) \times 1$  입력점 벡터이다. 매개변수  $\bar{t}_i (i=0, \dots, m)$ 를 결정하는 방법은 크게 uniform method, chord length

method, 그리고 centripetal method가 있다.<sup>[34]</sup> 그러나, uniform method는 많이 사용하지 않는다. Knot vector  $T$ 는 보통 매개변수  $\bar{t}_i (i=0, \dots, m)$ 를 근거로 결정되는데,  $m$ 과  $n$ 의 크기에 따라 적절한 방식들에 의해 구할 수 있다.<sup>[34]</sup>  $m=n$ 인 경우에는 평균법에 의거하여 다음과 같이 knot vector  $T$ 를 결정할 수 있다.

$$\xi_0 = \alpha = \bar{t}_0, \xi_{n-p+2} = \beta = \bar{t}_m$$

$$\xi_j = \frac{1}{p-1} \sum_{i=j}^{j+p-2} \bar{t}_i \quad (j = 1, \dots, n-p+1)$$

$m > n$ 인 경우에는 Piegl과 Tiller<sup>[4]</sup>가 제시한 방식에 의거하여 다음과 같이 knot vector  $T$ 를 결정할 수 있다.

$$\xi_0 = \alpha = \bar{t}_0, \xi_{n-p+2} = \beta = \bar{t}_m$$

$$\xi_j = (1-t) \times \bar{u}_k + t \times \bar{u}_{k+1} \quad (j = 1, \dots, n-p+1)$$

여기서,  $d = (m+1)/(n-p+2)$ 이고,  $k = \text{int}(j \times d)$ 이고,  $t = (j \times d - k)$ 를 나타낸다. 닫힌 곡선(closed curve)에 대한 knot vector  $T$ 를 구하는 방법은 Park와 Kim<sup>[6]</sup>의 논문을 참조하기 바란다.  $m < n$ 인 경우에는 매개변수  $\bar{t}_i$ 로부터  $(n+1)$ 개의 매개변수  $\bar{u}_i (i=0, \dots, n)$ 를 다음과 같이 추출하여 평균법을 적용할 수 있다.

$$\bar{u} = \mu_{i \times m} \quad (i = 0, \dots, n)$$

$$\mu_j = \begin{cases} \bar{t}_0 & (j = 0) \\ \mu_{j-1} + \bar{\Delta}_{m(j-1)/n} & (j = 1, \dots, m \times n) \end{cases}$$

$$\bar{\Delta}_k = \bar{t}_{k+1} - \bar{t}_k \quad (k = 0, \dots, m-1)$$

제약 조건이 없는 경우에는 다음과 같은 least square 오차  $E'(X)$ 를 최소화하는 해를 구함으로써 조종점 벡터  $X$ 를 구할 수 있다.

$$\min E'(X) = \sum_{i=0}^m \| P_i - C(\bar{t}_i) \|^2$$

$$= (AX - P)' (AX - P) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \partial E(X) / \partial X = 0$$

$$\Rightarrow A^T A X = A^T P \Rightarrow X = (A^T A)^{-1} A^T P$$

여기서, 행렬  $A^T A$ 는 bandwidth가  $(2p-1)$ 인 symmetric banded matrix이다.  $m=n$ 인 경우에는 curve interpolation 문제로서 시스템 행렬  $A$ 가 일반적으로 nonsingular하므로 조종점 벡터는  $X = A^{-1}P$ 와 같게 되어 입력 점들을 정확히 지나는 곡선을 구할 수 있다.  $m > n$ 인 경우에는 curve approximation 문제로서 행렬  $A^T A$ 가 positive definite 해져서 입력점들을 근사적으로 지나는 곡선을 구할 수 있다. 그러나,  $m < n$ 인 경우에는 행렬  $A^T A$ 가 semi-positive definite matrix가 되어 singular해지므로 해를 구할 수가 없게

된다. 해결 방안으로는 식 (4)에 부족한 제약 조건을 추가함으로써 curve interpolation 문제로 전환하여 푸는 방식이 있다.<sup>15)</sup> 특정점에서의 미분벡터 등의 선형 제약 조건(linear constraints)이 주어져 있는 경우에는 다음과 같은 선형 시스템의 해를 구함으로써 조종점 벡터  $\mathbf{X}$ 를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \min E'(\mathbf{X}) \\ (st) h_k(\mathbf{X}) = \mathbf{C}_{k0} \cdot \mathbf{X} = D_k, (k = 0, \dots, r) \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} + \sum_{i=0}^r v_i \frac{\partial (C_i \cdot \mathbf{X} - D_i)}{\partial \mathbf{X}} = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{D} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 벡터  $\mathbf{v}$ 는 Lagrangian multiplier 벡터로서  $\mathbf{v} = [v_0, v_1, \dots, v_r]^T$ 를 가리키고,  $\mathbf{C}$ 와  $\mathbf{D}$ 는 제약 조건들에 대한 선형 시스템을 이루는 행렬들이다. 식 (6)이 해를 갖기 위해서는 선형 제약 조건들의 수가 항상 조종점의 수보다 작아야 하며( $r < n$ ), 선형 제약식들은 서로가 독립이어서  $\text{rank}(\mathbf{C}) = (r+1)$ 이 되어야 한다. 그리고,  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 가 positive definite matrix가 되도록 하기 위해 입력점들의 수가 조종점의 수보다 같거나 커야 한다( $m \geq n$ ).

Least-square 오차 최소화에 근거한 curve fitting 기법은 입력점의 개수가 조종점의 개수보다 상대적으로 큰 경우에는 좋은 곡선을 생성한다. 그러나, 입력점의 개수가 조종점의 개수에 비해 약간 큰 경우( $m > n, m \approx n$ )에는 입력점들의 분포 또는 parameterization의 영향에 민감하여 불안정한 해를 도출하기 쉬우며, 결과적으로 나쁜 품질의 곡선을 생성할 수가 있다. 또한, 입력점의 개수가 조종점의 개수보다 작은 경우에는 least-square 오차 최소화에 근거한 curve fitting 기법을 적용할 수 없다는 단점이 있다. Fig. 2은 곡선의 차수가 3(cubic), 입력점의 개수가 21개로 주어지고, 조종점의 수를 각각 10, 20, 21로 했을 때, least-square 오차 최소화에 근거한 curve fitting 기법에 의해 구해진 B-spline 곡선들이다. Fig. 2(c)에서와 같은 나쁜 품질의 곡선이 생성되는 경우가 발생한다. Fig. 2(b)-(d)에서는 곡선들과 함께 knot vector와 parameter 값을 보여준다. Fig. 2(e)-(g)에서는 곡선의 조종점들을 보여준다.

곡선의 에너지 함수(energy functional)의 최소화를 도입하면 이러한 문제점이 쉽게 해결될 수 있다. 에

너지 함수의 최소화는 비교적 최근 제시된 curve fitting 기법들에서 이용되었다.<sup>13-15)</sup> Celniker와 Gossad<sup>13)</sup>는 곡선의 global fairness 척도로서 곡선의 stretching term과 bending term에 대한 가중치 합으로 표현되는 곡선의 에너지 함수의 최소화를 이용한 곡선 설계 방식을 제시하였다. Fang과 Gossad<sup>14)</sup>는 비슷한 형태의 에너지 함수에 점들과 곡선 간의 최소 거리 오차(shortest distance error)가 추가된 비선형 에너지 함수(nonlinear energy functional)의 최소화를 이용한 curve fitting 기법을 제시하였다. 본 논문에서는 다음과 같이 Celniker와 Gossad<sup>13)</sup>가 이용한 곡선의 에너지 함수와 점들과 곡선 간의 least-square 오차  $E(\mathbf{X})$ 의 합으로 표현되는 에너지 함수(quadratic energy functional)를 이용한다.

$$\begin{aligned} E^{13}(\mathbf{X}) = \int_0^1 (\alpha \|\dot{\mathbf{C}}(t)\|^2 + \beta \|\ddot{\mathbf{C}}(t)\|^2) dt \\ + \gamma \sum_{i=0}^m \|\mathbf{P}_i - \mathbf{C}(\bar{t}_i)\|^2 \quad (7) \\ = \int_0^1 [\alpha (\dot{\mathbf{N}}^T \mathbf{X})^2 + \beta (\ddot{\mathbf{N}}^T \mathbf{X})^2] dt + \gamma \|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P}\|^2 \\ = \int_0^1 [\alpha \mathbf{X}^T \dot{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{N}}^T \mathbf{X} + \beta \mathbf{X}^T \ddot{\mathbf{N}} \ddot{\mathbf{N}}^T \mathbf{X}] dt + \gamma \|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P}\|^2 \\ = \mathbf{X}^T (\alpha \int_0^1 \dot{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{N}}^T dt + \beta \int_0^1 \ddot{\mathbf{N}} \ddot{\mathbf{N}}^T dt) \mathbf{X} \\ + \gamma (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P})^T (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P}) \\ = \mathbf{X}^T (\alpha \mathbf{K}_1 + \beta \mathbf{K}_2) \mathbf{X} + \gamma (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P})^T (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P}) \\ = \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} + \gamma (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P})^T (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P}) \end{aligned}$$

여기서,  $\alpha, \beta, \gamma$ 는 음이 아닌 실수를 가리키는데, 각각 stretching 계수, bending 계수, fitting 계수라고 말한다.  $\mathbf{X} = [\mathbf{B}_0 \dots \mathbf{B}_n]^T$ 는 조종점 벡터를 가리키고,  $\mathbf{N}^{(k)} = [N_0^{(k)}(t) \dots N_n^{(k)}(t)]^T$ 은 B-spline 함수의  $k$ 차 미분 벡터를 가리킨다. 그리고,  $\mathbf{K} = \alpha \mathbf{K}_1 + \beta \mathbf{K}_2 = \alpha \int_0^1 \dot{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{N}}^T dt + \beta \int_0^1 \ddot{\mathbf{N}} \ddot{\mathbf{N}}^T dt$ 는 B-spline 곡선  $\mathbf{C}(t)$ 에 대한  $(n+1) \times (n+1)$  stiffness 행렬을 가리키는데, bandwidth가  $(2p-1)$ 인 symmetric banded matrix이고, semi-positive definite singular matrix이다.<sup>13-15)</sup> Stiffness 행렬  $\mathbf{K}$ 의 각 diagonal 성분에 매우 작은 양수(perturbation epsilon)를 더해줌으로써 행렬  $\mathbf{K}$ 가 positive definite non-singular matrix가 되도록 한다.

제약 조건이 없는 경우에는 식 (7)의 에너지 함수 최소화에 대한 해인 조종점 벡터  $\mathbf{X}$ 는 다음과 같은 간단한 계산에 의해 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \min E^{13}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} + \gamma (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P})^T (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P}) \quad (8) \\ \Rightarrow \partial E(\mathbf{X}) / \partial \mathbf{X} = 0 \end{aligned}$$

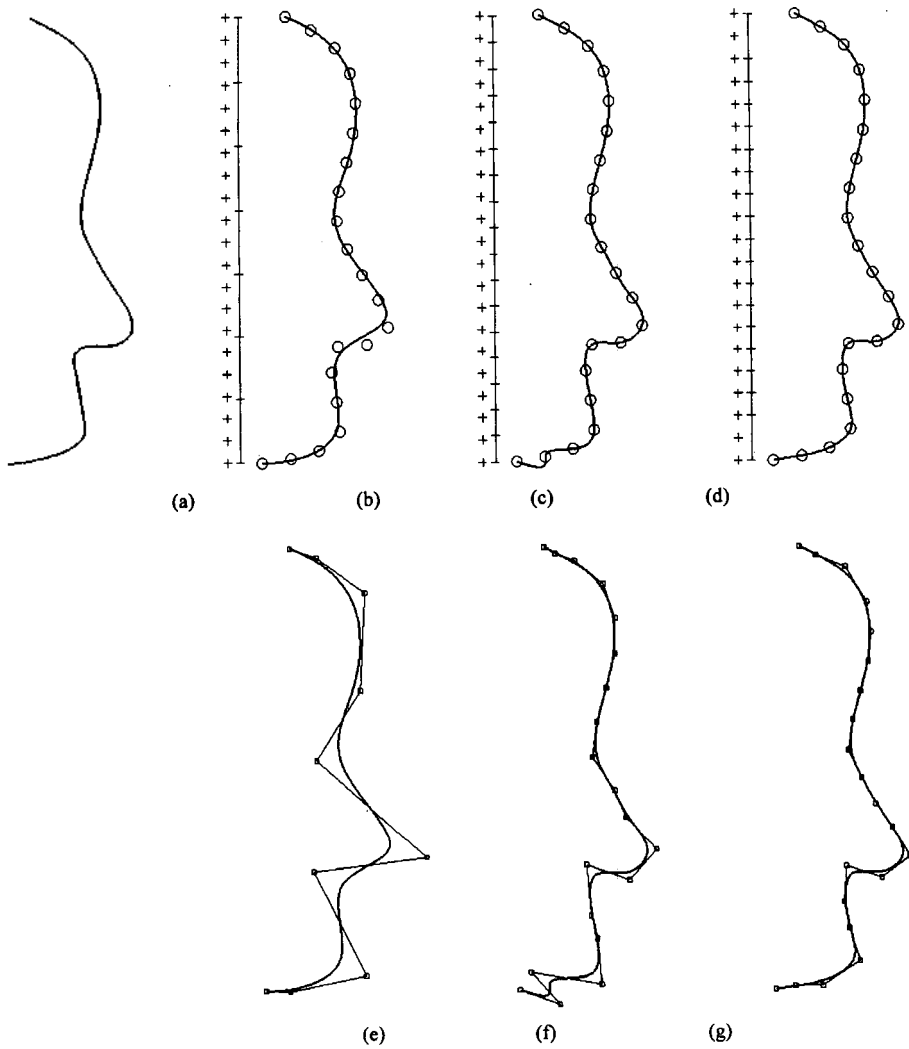


Fig. 2. B-spline curve fitting based on least-square error minimization. (a) 21 sample points, (b) curve fitted with 10 control points, (c) curve fitted with 20 control points, (d) curve fitted with 21 control points, (e) control points of the curve in (b), (f) control points of the curve in (c), (g) control points of the curve in (d).

$$\Rightarrow (\mathbf{K} + \gamma \mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{X} = \gamma \mathbf{A}^T \mathbf{P}$$

$$\Rightarrow \mathbf{X} = \gamma (\mathbf{K} + \gamma \mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}$$

곡선의 stiffness 행렬  $\mathbf{K}$ 가 추가됨으로써 시스템 행렬  $(\mathbf{K} + \gamma \mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 는 bandwidth가  $(2p-1)$ 인 symmetric banded matrix이고, positive definite non-singular matrix가 되어 조종점 벡터에 대한 해가 항상 존재한다. 결국, 행렬  $\mathbf{K}$ 는 시스템을 안정화시키고, 궁극적으로는 곡선의 품질을 향상시키는 역할을 한다.

곡선에 대한 선형 제약 조건들이 주어졌을 경우에는 다음과 같은 선형 시스템의 해를 구함으로써 조종점 벡터  $\mathbf{X}$ 를 얻을 수 있다.

$$\min E^{l+c}(\mathbf{X})$$

$$(st) h_k(\mathbf{X}) = \mathbf{C}_{k0} \cdot \mathbf{X} = D_k, (k = 0, \dots, r)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} + \sum_{i=0}^r \nu_i \frac{\partial (\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{X} - D_i)}{\partial \mathbf{X}} = 0 \\ \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{D} \end{cases} \quad (9)$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbf{K} + \gamma \mathbf{A}^T \mathbf{A}) & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

본 논문에서 제시하는 에너지 최소화에 근거한 B-spline curve fitting은 결과적으로 식 (8)과 (9)와 같은

선형 시스템을 푸는 문제로 귀착된다. 따라서, 비선형최소화에 근거한 기존 방식들보다 수행 속도 측면에서 큰 장점을 갖는다. 식 (5)과 (8)에서 역행렬을 직접 이용하여 해를 구하는 방식보다 symmetric banded matrix system에 대한 LU decomposition 방식을 적용하여 해를 구하는 것이 계산적으로 보다 효율적이고, 식 (6)과 (9)에서는 가우스 소거법(Gauss elimination)에 의한 upper triangular matrix system으로 먼저 전환한 후 backward substitution 방식을 적용하여 해를 구하는 것이 계산적으로 보다 효율적이다.

Fig. 3(a)-(c)에서는 Fig. 2에서 이용한 입력점들에 대해 논문에서 제시한 곡선의 에너지 최소화에 근거한 curve fitting 기법에 의해 구해진 B-spline 곡선들

이다. Fig. 3(d)에서는 조종점의 개수(25)가 입력점의 개수(21)보다 큰 경우, 에너지 최소화에 근거한 curve fitting 기법에 의해 구해진 B-spline 곡선을 나타낸다. 여기서  $\alpha, \beta, \gamma$ 는 1.0, 0.2, 1000000.0으로 하였다. Fig. 3(a)-(d)에서는 곡선들과 함께 knot vector와 parameter 값을 보여준다. Fig. 3(e)-(h)에서는 곡선의 조종점들을 보여준다.

Fitting 계수  $\gamma$ 를 작게 하면 곡선의 fairness는 강화되어 곡선이 smooth해지지만 입력점과의 fitting 오차가 증가한다. 반면,  $\gamma$ 를 너무 크게 하면 fitting 오차는 감소하지만, 곡선의 fairness가 저하된다. 부가적으로 curve fitting 오차를 더욱 줄이기 위해서는 입력점  $P_i$ 에 대한 곡선 상의 매개변수  $\bar{t}_i (i = 0, \dots, m)$ 를

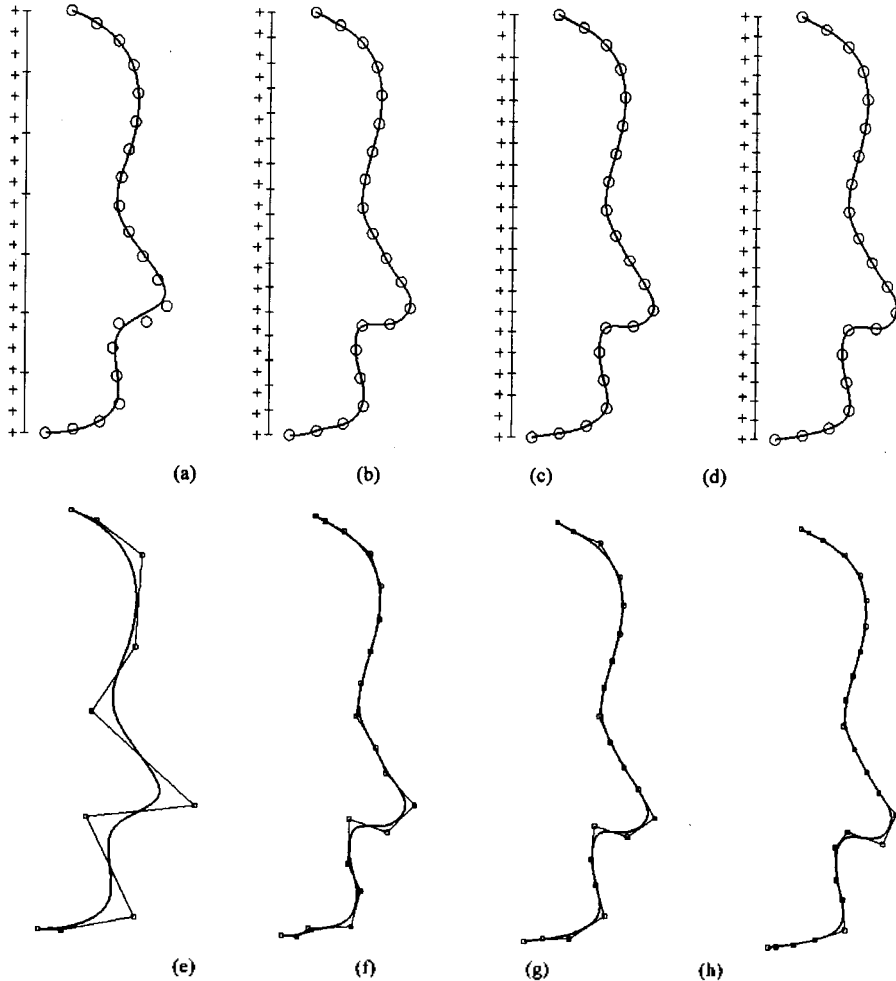


Fig. 3. B-spline curve fitting based on energy minimization. (a) curve fitted with 10 control points, (b) curve fitted with 20 control points, (c) curve fitted with 21 control points, (d) curve fitted with 25 control points, (e) control points of the curve in (a), (f) control points of the curve in (b), (g) control points of the curve in (c), (h) control points of the curve in (d).

$\bar{t}_i^{new} \leftarrow \bar{t}_i + \{(\mathbf{P}_i - \mathbf{C}(\bar{t}_i)) \cdot \dot{\mathbf{C}}(\bar{t}_i)\} / [\dot{\mathbf{C}}(\bar{t}_i) \cdot \dot{\mathbf{C}}(\bar{t}_i)]$ 와 같이 점진적으로 개선하여 curve fitting 기법을 반복적으로 적용할 수 있다.<sup>[9,11]</sup>

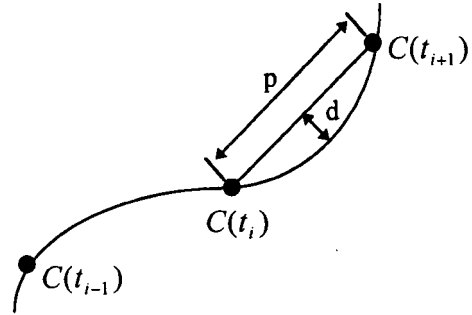
#### 4. Approximate lofting 방법

본 장에서는 근사적lofting 방법에 대한 전반적인 절차에 대해 설명한다. 설명의 편의상, 입력 곡선들은 미리 정렬(alignment)이 되어있다고 가정한다. 즉, 입력 곡선들의 방향(parametric direction)이 서로 일정해야 되며, closed 곡선인 경우에는 곡선들의 시작점이 일관성이 있도록 위치되어야 한다. 설계(design) 측면에서의 정렬 작업은 사용자의 도움(user interaction)에 의해 쉽게 해결되지만, 복원(reconstruction) 측면에서의 정렬 작업은 처리하기 힘든 일이 될 수 있다. 예를 들어, 시작점과 방향(parametric direction)이 서로 다른 closed 곡선들에 대한 자동적 정렬 작업은 상당한 계산과 추론이 요구되는 어려운 일이 된다.<sup>[5,6]</sup>

정렬된 입력 곡선들에 대한 근사적 lofting 방법에 대한 전반적인 절차는 다음과 같다. 우선, 각 입력 곡선들에 대하여 샘플링 점(sampling point) 간의 단위 곡선 길이 및 chordal deviation을 고려하여 곡선 점 샘플링(curve point sampling)을 수행한다. 그런 다음, 입력 곡선들의 샘플링 점들에 대해서 에너지 최소화해 근거한 B-spline curve fitting 기법을 적용하여 공통 knot vector 상에서 정의되는 B-spline 곡선들을 생성한다. 이 과정에서 Park과 Kim<sup>[6]</sup>이 제시한 기법을 적용하여 공통 knot vector의 knot 개수를 줄이므로써 B-spline 곡선들의 조중점의 수를 줄인다. 마지막으로, 적합화(compatible)된 B-spline 곡선들을 보간(interpolation)하는 NURBS 곡면을 생성한다.

##### 4.1 Curve point sampling

근사적lofting의 첫 단계는 각 입력 곡선  $\mathbf{C}_i(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ )상의 점들을 샘플링하여 근사 다각형(polygonal approximation)  $\bar{\mathbf{P}}_i$ 을 구하는 것이다. 이러한 근사 다각형  $\bar{\mathbf{P}}_i$ 의 점들을 3장에서 언급된 에너지 최소화해 근거한 curve fitting 기법을 적용하여 입력 곡선  $\mathbf{C}_i(t)$ 에 대한 B-spline 근사 곡선  $\bar{\mathbf{C}}_i(t)$ 을 구한다. 결국, 입력 곡선들의 적합성(compatibility)를 유지하기 위해 다각형 근사화와 curve fitting 과정을 거친다. 따라서, 입력 곡선  $\mathbf{C}_i(t)$ 와 근사 곡선  $\bar{\mathbf{C}}_i(t)$ 간의 오차  $\epsilon$ 는 다각형 근사화(curve point sampling)에서 발생하는 오차  $\epsilon_1$ 과 curve fitting에서 발생하는 오차  $\epsilon_2$ 가 혼합되어 발생한다.



d: chord height  
 p: chord length =  $|\mathbf{C}(t_{i+1}) - \mathbf{C}(t_i)|$   
 q: curve segment length =  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\mathbf{C}'(t)\| dt$

Fig. 4. Criteria for sampling points on a curve.

오차  $\epsilon$ 가 근사 허용오차  $\delta$ 보다 항상 작음을 보장하는 일이 쉽지 않기 때문에 실제적으로는 다각형 근사화에 사용되는 근사 허용오차  $\delta_1$ 와 curve fitting 기법에 사용되는 근사 허용오차  $\delta_2$ 가  $\delta_1 + \delta_2 < \delta$ 를 만족하도록 설정한다. 다각형 근사화에 주로 이용되는 샘플링 척도로는 Fig. 4에서와 같이 chord height, chord length, curve segment length 등이 있는데, 대부분 chord height가 허용오차보다 크지 않으며, 되도록 적은 수로 이루어진 근사 다각형을 구하는 방법들이 제시되었다. 이러한 chord height만을 고려한 샘플링 기법은 곡선의 곡률이 큰 부위에서는 많은 점들을 샘플링하고, 곡률이 작은 부위에서는 적은 점들을 샘플링한다. 결과적으로, Fig. 5에서와 같이  $\delta$ 보다 훨씬 작은 근사 허용오차로 curve fitting 기법을 적용하더라도 입력 곡선  $\mathbf{C}_i(t)$ 와 근사 곡선  $\bar{\mathbf{C}}_i(t)$ 간의 오차  $\epsilon$ 가 근사 허용오차  $\delta$ 보다 커지는 경우가 발생한다. 본 논문에서는 이러한 상황을 피하기 위해서  $\delta_1 = \delta_2 = (\delta - \epsilon) / 2$ 로 하였으며 ( $\epsilon$ 는  $\delta$ 보다 매우 작은 임의의 실수), chord height이 근사 허용오차  $\delta_1$ 보다 크지 않으며, curve segment length가  $k\delta_1$

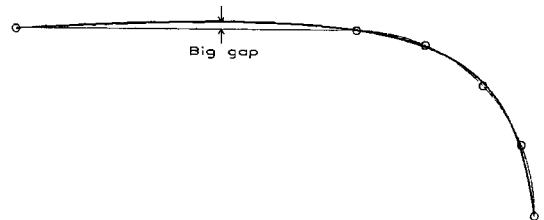


Fig. 5. A drawback in sampling by chord height deviation.

( $10 \leq k \leq 30$ )보다 크지 않도록 샘플링하는 방식을 채택하였다.

**4.2 Construction of B-spline curves on a common knot vector**

근사적 lofting의 다음 단계는 에너지 최소화에 근거한 curve fitting 기법을 이용하여 다각형들  $\tilde{P}_i$  ( $i = 0, \dots, n$ )로부터 공통 knot vector 상에서 정의되는 B-spline 근사 곡선들  $\tilde{C}_i(t)$ 을 생성하는 것이다. 근사 다각형  $\tilde{P}_i$ 의 점들과 근사 곡선  $\tilde{C}_i(t)$ 간의 curve fitting 오차  $\epsilon_2$ 는 근사 허용오차  $\delta_2$ 보다 작아야 한다. 이러한 근사 곡선  $\tilde{C}_i(t)$ 은 loft 곡면  $S(u,v)$ 의 iso-curve가 된다. 이 단계에서 중요한 일은 공통 knot vector의 내부 매듭값(interior knot) 개수를 되도록 줄여서 B-spline 근사 곡선들  $\tilde{C}_i(t)$ 의 조종점의 개수를 줄이는 것이다. Park과 Kim<sup>[6]</sup>의 방식에 근거하여 curve fitting 오차  $\epsilon_2$ 가 허용오차  $\delta_2$ 보다 적음을 유지 하면서 조종점 개수의 허용 구간을 양분(bisect-and-bracket)하여 나감으로써 적은 계산량으로 근사 곡선들  $\tilde{C}_i(t)$ 의 조종점의 수를 효율적으로 줄일 수 있다. 다각형  $\tilde{P}_i$  ( $i = 0, \dots, n$ )로부터 공통 knot vector 상에서 정의되는 ( $n+1$ )개의 B-spline 근사 곡선  $\tilde{C}_i(t)$ 을 생성하는 절차는 다음과 같다.

**Algorithm** 공통 knot vector 상에서 정의되는 B-spline 근사 곡선 생성

- [Input]  $\tilde{P}_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) : ( $n+1$ )개의 다각형
- $\delta_2$ : 근사 허용오차
- $p$ : B-spline 곡선의 order (degree+1)
- [Output]  $\tilde{C}_i(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) : ( $n+1$ )개의 B-spline 근사 곡선
- $m_{com}$ : 근사 곡선의 조종점 수
- $\mathbf{T}_{com}$ : 공통 knot vector
- $\mathbf{T}_{com} = \{t_0^{com}, t_1^{com}, \dots, t_{m_{com}+p-2}^{com}, t_{m_{com}+p-1}^{com}\}$

(Step 1) 다각형을 이루는 점들의 개수가 큰 순서대로 다각형  $\tilde{P}_i$  ( $i = 0, \dots, n$ )를 정렬(sorting)하여 CLIST에 저장한다.

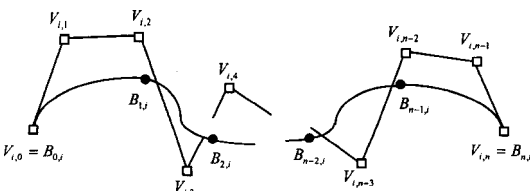


Fig. 6. Determination of each column of control points.

(Step 2) 각 다각형  $\tilde{P}_i$ 의 점들에 대한 매개변수 값을 정한다.

(Step 3) 근사 곡선들의 조종점의 개수의 허용 구간  $M$ 을 다음과 같이 초기화한다.

$$M \in (m_{low}, m_{upp}] = (\min(p-1, m_{min}-1), m_{max}]$$

여기서,  $m_{min}$ 는 ( $n+1$ )개의 다각형 중에서 점들의 개수가 가장 작은 수를 가리키며,  $m_{max}$ 는 점들의 개수가 가장 큰 수를 가리킨다.

(Step 4)  $m_{now} \leftarrow (m_{low} + m_{upp})/2, \mathbf{T}_{now} \leftarrow \Phi$

$$\tilde{C}_i^{now}(t) \leftarrow \Phi, (i = 0, \dots, n)$$

(Step 5)  $\mathbf{T}_{pre} = \mathbf{T}_{now}, \tilde{C}_i^{pre}(t) \leftarrow \tilde{C}_i^{now}(t), (i = 0, \dots, n)$

(Step 6) B-spline 곡선의 order  $p$ 와 현재의 조종점의 개수  $m_{now}$ 에 대한 공통 knot vector  $\mathbf{T}_{now}$ 를 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{now} &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{T}_i^{loc} \\ &= \frac{1}{n+1} \left\{ \sum_{i=0}^n t_{\theta^{loc,i}}^{loc,i}, \sum_{i=0}^n t_{1^{loc,i}}^{loc,i}, \dots, \sum_{i=0}^n t_{m_{now}+p-2}^{loc,i}, \sum_{i=0}^n t_{m_{now}+p-1}^{loc,i} \right\} \end{aligned}$$

여기서,  $\mathbf{T}_i^{loc}$ 는 다각형  $\tilde{P}_i$ 의 curve fitting에 이용되는 표준화된 knot vector로서 다각형  $\tilde{P}_i$ 의 점들에 대한 parameterization을 이용하여 구한다.

(Step 7) // 공통 knot vector  $\mathbf{T}_{now}$ 에 대한 curve fitting 검사 //

(a) 공통 knot vector  $\mathbf{T}_{now}$ 상에서 다각형  $\tilde{P}_{CLIST[i]}$  ( $i = 0, \dots, n$ )의 점들에 대해 에너지 최소화를 도입한 curve fitting 기법을 적용하여 B-spline 근사 곡선  $\tilde{C}_{CLIST[i]}^{now}(t)$ 을 구한다.

(b) 곡선  $\tilde{C}_{CLIST[i]}^{now}(t)$ 의 근사 오차  $\epsilon_2$ 가 허용오차  $\delta_2$ 보다 작으면, 다음 다각형  $\tilde{P}_{CLIST[i+1]}$ 에 대하여 검사를 계속 진행한다. 그렇지 않으면, curve fitting의 실패를 유발시킨 다각형을 기억하고( $\alpha-i$ ), Step 9을 수행한다.

(c) 모든 근사 곡선  $\tilde{C}_{CLIST[i]}^{now}(t)$ 의 근사 오차  $\epsilon_2$ 가 허용오차  $\delta_2$ 보다 작으면, Step 8을 수행한다.

(Step 8) // 공통 knot vector  $\mathbf{T}_{now}$ 에 대한 curve fitting 성공 //

(a) 만약  $(m_{upp} - m_{low}) \leq 1$ , Step 7에서 구한 근사 곡선들  $\tilde{C}_i^{pre}(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ )를 결과로 출력한다.

$$m_{com} \leftarrow m_{now}, \mathbf{T}_{com} \leftarrow \mathbf{T}_{now}$$

(b) 그렇지 않으면,  $m_{upp} \leftarrow m_{now}, m_{now} \leftarrow (m_{low} + m_{upp})/2$ , 그리고 Step 5를 반복 수행한다.

(Step 9) // 공통 knot vector  $\mathbf{T}_{now}$ 에 대한 curve fit-



ting 실패 //

(a) 만약  $(m_{app} - m_{now}) \leq 1$ , 근사 곡선들  $\tilde{C}_i^{pre}(t)$  ( $i = 0, \dots, n$ )를 결과로 출력한다.  $m_{com} \leftarrow m_{pre}, T_{com} \leftarrow T_{pre}$

(b) 그렇지 않으면,  $m_{low} \leftarrow m_{now}, m_{now} \leftarrow (m_{low} + m_{app})/2$ , 그리고 공통 knot vector  $T_{now}$ 에 대한 curve fitting의 실패를 유발시킨 다각형  $\tilde{P}_{CLIST[a]}$ 을 CLIST의 맨 앞으로 이동시킨 다음, Step 5를 반복 수행한다.

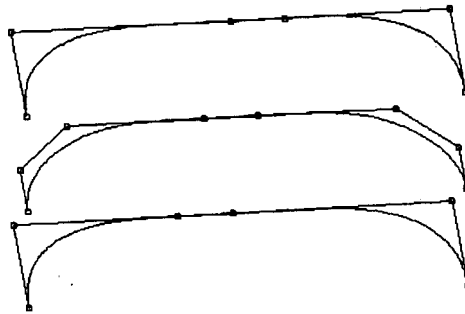
**4.3 Lofting of compatible B-spline curves**

근사적 lofting 방법의 마지막 단계에서는 적합화된

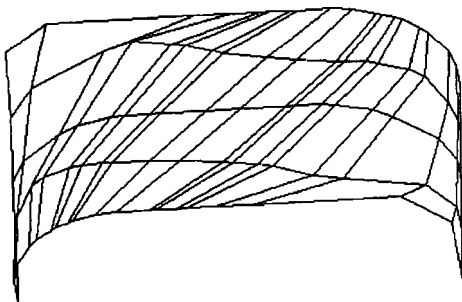
B-spline 곡선들을 보간(interpolation)하는 B-spline 곡면을 생성한다. 구하고자 하는 B-spline 곡면은

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n V_{i,j} M_{j,q}(v) N_{i,p}(u)$$

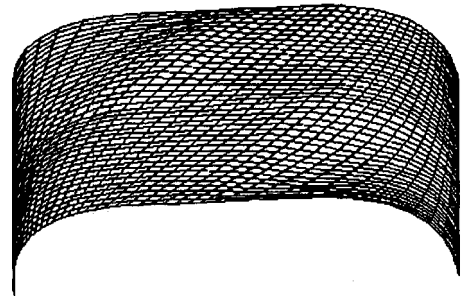
여기서,  $N_{i,p}(u)$ 는 4.2절에서 얻어진 공통 knot vector  $U = \{u_0, u_1, \dots, u_{m+p-1}, u_{m+p}\}$  상에서 정의되고,  $M_{j,q}(v)$ 는 knot vector  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n+q-1}, v_{n+q}\}$  상에서 정의된다. 공통 knot vector  $U$  상에서 정의되는  $(n+1)$ 개의 적합화된 B-spline 곡선  $C_i(u)$ 를 iso-curve로 갖는 B-spline 곡면  $S(u, v)$ 의  $(m+1) \times (n+1)$ 개의 조종점  $V_{ij}$ 를



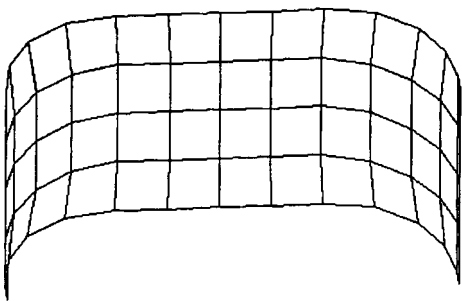
(a) 입력 곡선들과 조종점들



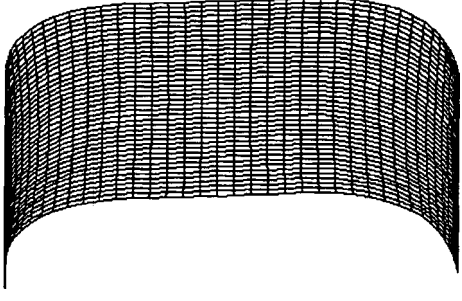
(b) Exact lofting 에 의한 곡면의 조종망



(c) Exact lofting 에 의한 곡면의 wireframe



(d) 근사적 lofting 에 의한 곡면의 조종망



(e) 근사적 lofting 에 의한 곡면의 wireframe

**Fig. 7.** Comparison of exact lofting and approximate lofting. (a) input curves and their control points, (b) control net of a surface by exact lofting, (c) wireframe of the surface in (b), (d) control net of a surface by approximate lofting, (e) wireframe of the surface in (d).

구해야 한다. 이 과정은 결국 B-spline 곡선  $C_i(u)$ 의 조종점  $B_{k,i}$  ( $k=0, \dots, n, i=0, \dots, m$ )의 각 열(column)을 지나는 B-spline 곡선을 구하는 과정을  $(m+1)$  번을 수행하는 것이다. 곡면  $S(u,v)$ 의 u-curve인 B-spline 곡선  $C_i(u)$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$C_i(u) = S(u, \bar{v}_k) = \sum_{j=0}^m \left\{ \sum_{i=0}^n V_{i,j} M_{j,q}(\bar{v}_k) \right\} N_{i,p}(u) \quad (11)$$

$$= \sum_{j=0}^m B_{k,j} N_{i,p}(u) \quad (k=0, \dots, n)$$

여기서  $(m+1)$ 개의 점  $B_{k,i}$ 는  $k$ 번째 적합화된 B-spline 곡선  $C_i(u)$ 의 조종점들이다. 식 (11)을 정리하면 다음과 같은 곡선 보간(curve interpolation) 문제에 대한  $(m+1)$ 개의 선형 시스템(linear systems)이 된다.

$$\sum_{j=0}^n V_{i,j} M_{j,p}(\bar{v}_k) = B_{k,i}, \quad (i=0, \dots, m) \quad (12)$$

여기서  $\bar{v}_k$ 는 각 B-spline 곡선  $C_i(u)$ 의 곡면  $S(u,v)$  상에서의 v-parameter 값을 나타낸다. Knot vector  $V$ 는  $(n+1)$ 개의 매개 변수  $\bar{v}_k(k=0, \dots, n)$ 에 대하여 평균법을 적용하여 구해진다.<sup>[3,4,8,12]</sup> 결국, 식 (12)에 대한  $(m+1)$ 개의 선형 시스템의 해를 모두 합치면  $(p-1) \times (q-1)$ 차 B-spline 곡면  $S(u,v)$ 의 조종점  $V_k$ 를 구하게 된다.

### 5. 적용 사례

제시된 근사적lofting 방법을 SGI EWS Indigo2 상에서 C 언어를 이용하여 구현하였다. Fig. 7은 3개의 B-spline curve들에 대해 exact lofting 방법과 제시된 근사적lofting 방법을 비교 적용한 예를 나타낸다. 입력 곡선들은 차수 및 knot vector가 서로 다르고, 조종점들의 개수도 서로 다르다. Fig. 7(b)-(c)에서와 같이 exact lofting에 의해 구해진 곡면의 품질은 좋지 않음을 알 수 있다. 반면에 Fig. 7(d)-(e)에서와 제시된 근사적 lofting (tolerance=0.1)에 의해 구해진 곡면의 품질이 훨씬 향상되었음을 알 수 있다. 곡면 모델의 크기는 대략  $80 \times 120 \times 32$  정도이다. Exact lofting에 의한 수행 시간은 0.4초 정도이고, 근사적 lofting에 의한 수행 시간은 0.6초 정도이다.

Fig. 8은 42개의 B-spline 곡선들에 대해 제시된 근사적 lofting 방법을 적용한 예를 나타낸다. 입력 곡선들은 석고로 만들어진 사람 얼굴의 표면으로부터 3차원 laser scanner를 이용하여 42개의 단면들에 대한 profile들을 얻은 다음, 각각의 profile에 대해 B-spline curve fitting 기법을 이용하여 구해진 것이다. 곡면 모델의 크기는 대략  $140 \times 180 \times 100$  정도이고, 근사 허용

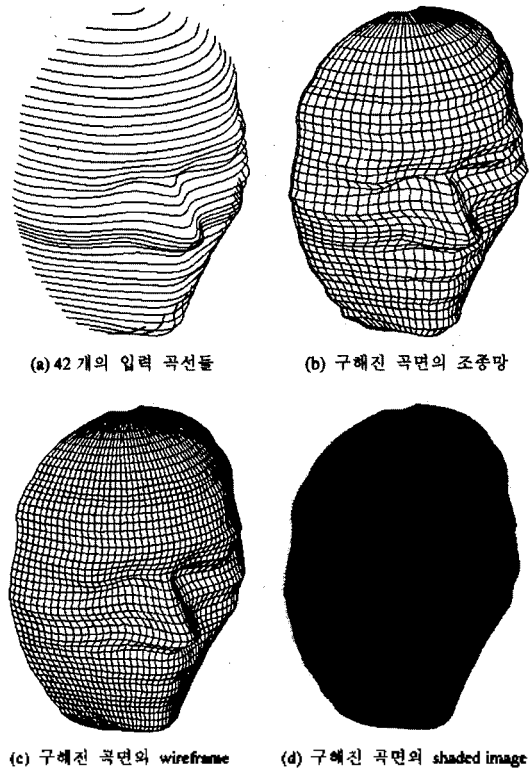


Fig. 8. Approximate lofting applied to cross-sectional curves scanned from a human face. (a) 42 cross-sectional curves, (b) wireframe of a surface, (c) control net of the surface, (d) shaded display of the surface.

오차(tolerance)는 0.1이다. 수행 시간은 10초 정도이다. 근사적 lofting 방법은 exact lofting에 비해 상대적으로 많은 수행 시간이 요구되며, 근사 허용오차에 영향을 받는다. 그러나, 입력 곡선들의 적합성(compatibility)이 좋지 않거나 매개변수의 분포(parameterization)가 나쁜 경우에는 보다 좋은 품질의 곡면 모델과 적은 수의 조종점을 갖는 간결한 곡면 모델을 얻을 수 있다는 장점이 있다. 제시된 근사적 lofting 방법은 현재 미국 Varimetrix사와의 공동 개발 중인 상용 CAD/CAM 시스템인 VX Vision<sup>TM</sup>에 통합되어 성공적으로 이용되고 있다.

### 6. 결 론

Lofting은 CAD, 컴퓨터 그래픽스, 역공학(reverse engineering) 분야 등에 널리 이용되는 실용적인 곡면 모델링 기법이다. Exact lofting 방식은 입력 곡선들의 parameterization이나 적합성(compatibility)에 영향을

많이 받기 때문에 곡면의 품질이 좋지 않거나 곡면의 조종점들의 수가 커지는 단점이 있다. 이러한 단점을 보완하기 위한 근사적 lofting 기법들이 제시되고 있다.

본 논문에서는 에너지 최소화에 근거한 B-spline curve fitting 방식을 이용한 근사적 lofting 방법을 제시하였다. 제시된 방법에서 이용된 B-spline curve fitting 방식은 least square 오차의 최소화 및 곡선의 에너지 함수(energy functional)의 최소화를 함께 고려함으로써 curve fitting 문제의 해를 보다 안정화시키고, 부드러운 곡선을 제공할 수 있다. 입력 곡선들로부터 공통 knot vector 상에서 정의되는 적합화된(compatible) 근사 곡선들을 구하는 과정에서 조종점 개수의 허용 구간을 양분(bisect-and-bracket)하여 나감으로써 근사 곡선들의 조종점의 수를 효율적으로 줄일 수 있다. 결과적으로, 제시된 근사적 lofting 방법은 곡면의 품질을 보다 향상시키고, 적은 수의 조종점으로 이루어진 간결한 곡면 모델을 제공한다.

### 감사의 말

이 연구는 CAD/CAM 시스템 VX Vision™의 개발의 일부를 통하여 수행되었다. VX 및 SEC 개발자들에게 감사를 드리며, 특히 에너지 최소화에 대해 조언과 도움을 주신 이상찬 박사에게 감사 드린다.

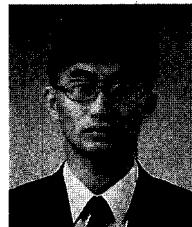
### 참고문헌

1. Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*, Academic Press, 1988.
2. Rogers, D.F. and Adams J.A., *Mathematical Elements for Computer Graphics*, McGraw-Hill, New York, 1990.
3. Hoschek, J. and Lasser, D., *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, A.K. Peters, 1993.
4. Piegl, L. and Tiller, W., *The NURBS Book*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
5. Park, H., *Surface modeling for 3D shape reconstruction from measurement data*, PhD Dissertation, POSTECH, Korea, 1996.
6. Park, H. and Kim, K., "Smooth surface approximation to serial cross-sections", *Computer-Aided Design*, Vol. 28, No. 12, pp. 995-1005, 1996.
7. Piegl, L. and Tiller, W., "Algorithm for approximate nurbs skinning", *Computer-Aided Design*, Vol. 28, No. 9, pp. 699-706, 1996.
8. Pratt, M.J., "Smooth parametric surface approximation to discrete data", *Computer-Aided Geometric Design*,

Vol. 2, pp. 165-171, 1985.

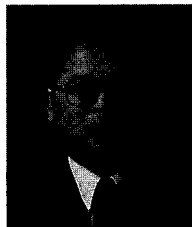
9. Rogers, D.F. and Fog, N.G., "Constrained B-spline curve and surface fitting", *Computer-Aided Design*, Vol. 21, No. 10, pp. 641-648, 1989.
10. Sarkar, B. and Menq, C.H., "Smooth-surface approximation and reverse engineering", *Computer-Aided Design*, Vol. 23, No. 9, pp. 623-628, 1991.
11. Sarkar, B. and Menq, C.H., "Parameter optimization in approximating curves and surfaces to measurement data", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 8, pp. 267-290, 1991.
12. Dobson, G.T., Waggenspack Jr, W.N., and Lamousin, H.J., "Feature based models for anatomical data fitting", *Computer-Aided Design*, Vol. 27, No. 2, pp. 139-146, 1995.
13. Celniker, G. and Gossard, D., "Deformable curve and surface finite elements for free-form shape design", *Computer Graphics*, Vol. 25, No. 4, pp. 257-266, 1991.
14. Fang, L. and Gossard, D.C., "Multidimensional curve fitting to unorganized data points by nonlinear minimization", *Computer-Aided Design*, Vol. 27, No. 1, pp. 48-58, 1995.
15. Vassilev, T.I., "Fair interpolation and approximation of B-splines by energy minimization and points insertion", *Computer-Aided Design*, Vol. 28, No. 9, pp. 753-760, 1996.

### 박 형 준



1991년 포항공대 산업공학과 학사  
 1993년 포항공대 산업공학과 석사  
 1996년 포항공대 산업공학과 박사  
 1996년~현재 삼성전자 중앙연구소 E-CIM팀 선임연구원 (미국 Varimatrix사와 상용 CAD/CAM 시스템인 VX Vision™ 공동개발 중)  
 관심분야: Geometric Modeling, Reverse Engineering, CAD/CAM, Software Development

### 김 광 수



1977년 서울대학교 산업공학과 학사  
 1979년 서울대학교 산업공학과 석사  
 1985년 U. of Central Florida 박사  
 1985년~1988년 Rochester 공과대학교 조교수  
 1988년~현재 포항공과대학교 산업공학과 조교수/부교수  
 관심분야: feature-based parametric modeling, feature-based NC machining, 2D & 3D geometric constraint solving, design process automation, and virtual product modeling