

# 極座標 拋物形 波動方程式을 이용한 變水深 點源波의 數值解析 Numerical Analysis of Waves from Point Source in Variable Depth Using Parabolic Wave Equation in Polar Coordinates

郭文秀\* · 片宗根\*

Moon-Su Kwak\* and Chong-Kun Pyun\*

**要 旨** : 본 연구에서는, 等水深의 港內波高分布 計算을 목적으로 이미 確立되어져 있는 Green函數法을 變水深場에 適用하기 위하여 變水深場의 點源波에 대한 基本解를 구한다. 平面波浪場의 가장 일반적인 緩傾斜方程式을 基礎方程式으로 하여, 點源波가 圓環狀으로 전파하는 狀況을 나타내기 위하여 이것을 極座標로 표시하고, 進行性의 波를 간편하게 計算할 目的으로 拋物形 方程式으로 근사화하였다. 유도된 拋物形 波動方程式을 差分化하여 變水深場에서의 點源波의 基本解를 數值的으로 구하였으며 嚴密解와 비교하여 수치해의 타당성을 검토하였다.

**핵심용어** : 포물형 파동방정식, 극좌표, 점원파, 수치해석, 기본해

**Abstract** □ The Green function method is widely used for the analysis of waves in a harbor with a constant depth. In extending this method to a wave field over arbitrary depth, a generalized and convenient method is needed to obtain unit solutions for waves emerging from a point source. For this purpose, a parabolic wave equation is derived to approximate the mild-slope equation written in terms of polar coordinates. Usefulness of the equation obtained is examined through trial computations.

**Keywords** : parabolic wave equation, polar coordinates, point source waves, numerical analysis, unit solution

## 1. 서 論

港內的 波浪場을 구하는 것은 港灣設計상 중요하다. 요즘에는 많은 경비와 노력을 요하는 水理模型實驗 대신에 다양한 數值解析이 행하여지고 있다. 그러나 廻折 및 多重反射, 屈折 등 복잡한 波의 變形을 표현할 수 있는 數值解析 방법으로 여러 가지가 제안되어 있지만 아직 충분한 수준은 아니라고 판단된다.

等水深場의 항내 파랑장해석에는 계산의 효율성과 경계조건 처리의 간편성 때문에 Green函數法이 널리 사용되어져왔다. 그러나 이 방법은 수심이 변화하는 水域에는 적용할 수가 없는 한계를 지니고 있다. 만일 본래의 Green函數法이 갖고 있는 장점을 유지하면서 變水深場으로의 확장이 이루어진다면 매우 효과적인

파랑장 해석법이 될것으로 생각한다. Green函數法의 變水深場으로의 확장은 Green函數法과 拋物形 波動方程式의 조합에 의해서 가능하리라 생각되어 진다. Green函數法은 위에서 열거한 요소중 廻折, 反射에 대해서는 충분한 값을 얻을 수 있으나 屈折解析은 곤란하다. 여기에 반해서 拋物形 波動方程式에 의한 해석은 廻折, 反射 모두 만족할 만한 값을 얻지 못하지만 屈折에 대해서만은 그 현상을 본래의 형태로 파악할 수 있다. 따라서 이 두 가지 해석법의 조합이 가능하다면 서로의 결점을 보완하여 두 해석법의 이점을 충분히 나타낼 수 있다고 생각한다. 더우기, 기본적으로 Green函數法은 等水深에 있어서의 Helmholtz方程式을 基礎方程式으로 하기 때문에 수심이 변화하는 경우에는 적용할 수 없으나 緩傾斜方程式이 自己隨伴型(self

\* 明知大學教 土木·環境工學科 (Department of Civil & Environmental Engineering, Myongji University, 38-2, Nam-Dong, Yongin-Si, Kyunggi-Do 449-728, Korea)

adjoint) 微分方程式인 것을 생각하면 수치적으로는 이 방법의 變水深場에의 적용도 불가능하지 않다. 본래, Green函數法은 境界의 취급에 관한 이론이고 境界上에 분포된 각 點源으로부터 방사하는 波를 취급하는 해석법으로 볼 수 있다. 이 방법을 變水深場에 적용시키기 위하여 等水深에 있어서의 일반해인 Hankel函數를 대신 할 수 있는 變水深場에서의 基本解를 구하는 것이 가능하다면, 종래의 解析法의 이점을 겸비한 새로운 數值解析法의 확립이 가능할 것이다.

Green函數法은 반무한평면에서 Green함수를 정의하는 방법(Barailler and Gaillard, 1967)과 원통과에 대한 Weber의 해를 이용하는 방법(Lee, 1969)이 있으며, 拋物形 波動方程式은 Radder (1979)에 의해서 유도된 이래 여러 가지의 방법이 제안되어져 있다. 특히, 拋物形 波動方程式에는 방파제 후면으로 회절되는 파랑의 해석정도를 높이기 위해서 파향선 좌표계를 사용한 방법(Isobe, 1986)과 경계고정좌표계를 사용한 방법(Liu and Boissevain, 1988; Kirby, 1988)등이 있으며, Kirby 등(1994)은 conformal 좌표변환을 이용하여 拋物形 波動方程式을 유도한 후, 극좌표계를 사용하여 방파제 주위의 파랑장을 해석하고 실험을 통해서 비교 검토하였다. 또한 국내에서는 이(1998)가 拋物形 波動方程式 및 쌍곡형 파동방정식 모델에 경계고정좌표계를 적용하여 만곡 수로에서의 파랑장을 해석하고 해석해와 비교하였다.

본 연구는, 等水深場에서의 일반해인 Hankel函數를 대신할 수 있는 變水深場에서의 點源波의 基本解를 구하는 것이 목적이다. 따라서 緩傾斜方程式을 基礎方程式으로 하고 點源波가 圓環狀으로 전파하는 상황을 표현하기 위하여 이것을 極座標로 표시한 다음, 進行性의 波를 간편하게 計算하기 위해서 分轄行列法(splitting matrix method; Coronas, 1975)을 이용하여 拋物形方程式으로 근사화하였다. 유도된 拋物形 波動方程式을 差分化하여 變水深場에서의 點源波의 基本解를 數值的으로 구하였으며 엄밀해와의 비교를 통해서 수치해의 타당성을 검토하였다.

## 2. 基礎方程式의 誘導

點源으로부터 나오는 波가 圓環狀으로 전파하는 것을 생각하면, 波浪場은 極座標로 표시하는 편이 편리하다. 그래서 變水深場에 있어서 緩傾斜方程式을 基礎

方程式으로 하여 이것을 極座標로 표기한다. 더우기 이 방정식의 취급을 간단히 하기 위하여 拋物形方程式으로 근사화시키는 것도 생각한다.

우선 第 2.1節에서는 等水深場의 基礎方程式인 Helmholtz方程式과 그 解인 Hankel函數를 소개한다. 이어서 第 2.2節에서 極座標系에 있어서 Helmholtz方程式 및 緩傾斜方程式의 拋物形 近似를 수행한다.

### 2.1 Helmholtz方程式과 Hankel函數

等水深에 있어서의 水面波形을

$$\eta = \phi(x, y)e^{-i\omega t} \quad (1)$$

로 하면, 複素振幅波浪函數  $\phi(x, y)$ 는 平面波浪場의 基礎方程式인 Helmholtz方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = 0 \quad (2)$$

을 만족한다. 여기서  $(x, y)$ 는 水平面內의 직교좌표,  $t$ 는 시간,  $\omega$ 는 각주파수,  $k$ 는 波數이다. 式 (2)를 極座標表記로 나타내면

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi + k^2 \phi = 0 \quad (3)$$

가 된다. 여기서  $r$ 은 點源으로부터의 距離,  $\theta$ 는 方向角이다.

$\phi(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta)$ 로 變數分離하여 式 (3)에 대입하면

$$\frac{1}{R} \left( r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = n^2 \quad (4)$$

이고, 이에 의해 다음과 같은 Bessel方程式을 얻는다.

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} + (k^2 r^2 - n^2) R = 0 \quad (5)$$

이 方程式은 다음과 같은 두 개의 線型獨立인 解를 갖는다.

$J_\nu(kr)$  : Bessel 函數

$N_\nu(kr)$  : Neumann 函數

이 2개의 函數에 의해 式 (5)의 解, 즉 Helmholtz方程式의 하나의 解로서 다음의 식으로 정의되는 Hankel函數를 얻는다.

$$H_v^1(kr) = J_v(kr) + iN_v(kr) \tag{6}$$

$$H_v^2(kr) = J_v(kr) - iN_v(kr) \tag{7}$$

특히 第1種 0次 Hankel函數( $H_0^1$ )는  $r=0$ 에서 無限大의 값을 갖고 그 점으로부터湧出되는 点源波를 나타낸다( $H_0^2$ 는 吸入을 나타낸다). 이 函數는  $r$ 방향으로만 변화하고  $\theta$ 방향 즉 波峰線방향으로는 傾斜를 갖지 않고 있다. 이것은 數學的으로 미루어보면 Hankel函數가 Helmholtz方程式을  $r$ 과  $\theta$ 방향으로 變數分離하여 유도한 Bessel方程式의 解라고 하는 사실로부터 자명하다.

2.2 極座標系의 拋物形 波動方程式

2.2.1 Helmholtz方程式에 대한 拋物形 近似

極座標로 標記한 Helmholtz方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + k^2 \phi = 0 \tag{8}$$

의 解  $\phi$ 가 湧出波成分  $\phi^*$  및 吸入波成分  $\phi$ 의 합으로 表示되는 것으로 한다(Radder, 1979). 즉

$$\phi = \phi^* + \phi \tag{9}$$

이다. 직좌표계에서는 입사파와 반사파로 구분하지만 극좌표계의 点源波(source waves)의 경우는 방사되는 파와 흡입되는 파로 구분한다. 一般的으로  $\partial\phi/\partial r$ 도  $\phi^*$  및  $\phi$ 의 線形結合으로 表示되기 때문에 이것을

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = A \phi^* + B \phi \tag{10}$$

로 놓는다. 式 (8) 및 (9)로부터  $\phi$ 를 消去하면

$$\phi^* = \frac{B}{(B-A)} \phi - \frac{1}{(B-A)} \frac{\partial \phi}{\partial r} \tag{11}$$

가 된다. 여기서  $\phi^*$ 와  $\phi$ 에 대해서는 近似的으로 다음과 같은 Hankel函數의  $r \rightarrow \infty$  일 때의 漸近展開式을 利用한다.

$$\phi^* = a \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{12}$$

$$\phi = b \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{13}$$

式 (12), (13)을  $r$ 에 관하여 微分하면

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial r} = \left(-\frac{1}{2r} + ik\right) \phi^* \tag{14}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(-\frac{1}{2r} - ik\right) \phi \tag{15}$$

이 된다. 따라서 式 (10)의  $A, B$ 는 각각

$$A = \left(-\frac{1}{2r} + ik\right) \tag{16}$$

$$B = \left(-\frac{1}{2r} - ik\right) \tag{17}$$

이다. 式 (16), (17)을 式 (11)에 代入하면

$$\phi^* = \alpha \phi + \beta \frac{\partial \phi}{\partial r} \tag{18}$$

가 된다. 단

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{4kr}\right) \tag{19}$$

$$\beta = -\frac{i}{2k} \tag{20}$$

이다. 式 (18)의 兩邊을  $r$ 로 微分하면

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial r} = \frac{\partial \alpha}{\partial r} \phi + \left(\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial r}\right) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \tag{21}$$

가 된다. 여기서 Helmholtz方程式 (8)을  $\partial^2 \phi / \partial r^2$ 에 관하여 整理하고 式 (21)에 代入하면

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \beta k^2 - \frac{\beta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \phi + \left\{ \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\beta}{r} \right\} \frac{\partial \phi}{\partial r} \tag{22}$$

가 된다. 다시 式 (9), (10)을 위 式에 代入하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} = & \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \beta k^2 - \frac{\beta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} (\phi^* + \phi) \\ & + \left\{ \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\beta}{r} \right\} (A \phi^* + B \phi) \end{aligned} \tag{23}$$

가 된다. 여기서 吸入波成分  $\phi$ 는 아주 작은 것으로 하여 無視하고  $\phi^*$ 를 다시  $\phi$ 로 놓으면

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \beta k^2 - \frac{\beta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + A \alpha + A \frac{\partial \beta}{\partial r} - A \frac{\beta}{r} \right\} \phi \tag{24}$$

가 되고, 式 (16) 및 式 (19), (20)을 代入하여 整理하면

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left( ik - \frac{1}{2r} + \frac{i}{8kr^2} \right) \phi + \frac{i}{2kr^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \tag{25}$$

가 된다. 式 (25)는  $\phi$ 에 대하여  $r$ 에 관한 1階微分과  $\theta$ 에 관한 2階微分을 포함하기 때문에 拋物形方程式이고 이것이 Helmholtz方程式의 極座標系에 있어서의 拋物形 近似式이 된다.

2.2.2 緩傾斜方程式에 대한 拋物形 近似

Berkhoff(1972)에 의해서 유도된 緩傾斜方程式

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi = 0 \quad (26)$$

을 極座標로 表示하면

$$CC_g \left( k^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \phi + \frac{\partial CC_g}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial CC_g}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad (27)$$

이다. 여기서  $C$ 는 位相速度,  $C_g$ 는 群速度이다. 위 式을  $\partial^2 \phi / \partial r^2$ 에 관하여 整理하면

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = - \left( k^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi - \frac{1}{CC_g} \frac{\partial CC_g}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{CC_g r^2} \frac{\partial CC_g}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (28)$$

이 된다. Helmholtz方程式으로부터 拋物形 波動方程式을 유도할 때와 마찬가지로 式 (28)을 式 (21)에 代入하면,

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \frac{\beta}{CC_g} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(CC_g)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \beta k^2 - \frac{\beta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \phi + \left\{ \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\beta}{CC_g} \frac{\partial(CC_g)}{\partial r} - \frac{\beta}{r} \right\} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (29)$$

가 되고, 式 (9), (10)을 위式에 代入하면,

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \frac{\beta}{CC_g} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(CC_g)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \beta k^2 - \frac{\beta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} (\phi^* + \phi) + \left\{ \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\beta}{CC_g} \frac{\partial(CC_g)}{\partial r} - \frac{\beta}{r} \right\} (A \phi^* + B \phi) \quad (30)$$

가 된다. 여기에서도, 吸入波成分  $\phi^*$ 는 아주 작은 것으로 하여 無視하고,  $\phi^* = \phi$ 로 다시 놓으면,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \frac{\beta}{CC_g} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(CC_g)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \beta k^2 - \frac{\beta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \phi$$

$$+ \alpha A + A \frac{\partial \beta}{\partial r} - A \frac{\beta}{CC_g} \frac{\partial(CC_g)}{\partial r} - A \frac{\beta}{r} \left\} \phi \quad (31)$$

가 되고, 式 (16) 및 式 (19), (20)을 위式에 代入하여 整理하면, 다음과 같은 緩傾斜方程式의 極座標系에 있어서의 拋物形 近似式이 얻어진다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left\{ ik - \frac{1}{2r} + \frac{i}{8kr^2} - \frac{1}{2kCC_g} \frac{\partial}{\partial r} (kCC_g) - \frac{i}{4kr} \frac{1}{CC_g} \frac{\partial CC_g}{\partial r} \right\} \phi + \frac{i}{2kr^2 CC_g} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( CC_g \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (32)$$

等水深인 경우에는,  $k$ 와  $CC_g$ 가 일정하므로 式 (32)는

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left( ik - \frac{1}{2r} + \frac{i}{8kr^2} \right) \phi + \frac{i}{2kr^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (33)$$

가 되어, Helmholtz方程式의 拋物形 近似式 (25)가 된다.

3. 數值計算法

3.1 基礎方程式의 差分化

前節에서 구한 基礎方程式 (32)

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left\{ ik - \frac{1}{2r} + \frac{i}{8kr^2} - \frac{1}{2kCC_g} \frac{\partial}{\partial r} (kCC_g) - \frac{i}{4kr} \frac{1}{CC_g} \frac{\partial CC_g}{\partial r} \right\} \phi + \frac{i}{2kr^2 CC_g} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( CC_g \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (34)$$

를 差分化하기 위하여  $\phi$ 에 대한 偏微分項마다 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + p \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + q \frac{\partial \phi}{\partial r} + f \phi = 0 \quad (35)$$

여기서,

$$p = \frac{1}{CC_g} \frac{\partial CC_g}{\partial \theta} \quad (36)$$

$$q = 2ikr^2 \quad (37)$$

$$f = 2k^2 r^2 + ir^2 \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{ikr^2}{CC_g} \frac{\partial CC_g}{\partial r} + ikr - \frac{r}{2CC_g} \frac{\partial CC_g}{\partial r} + \frac{1}{4} \quad (38)$$

이다. 点源을 중심으로 하여  $r$ 방향의 格子番號를  $i$ ,  $\theta$



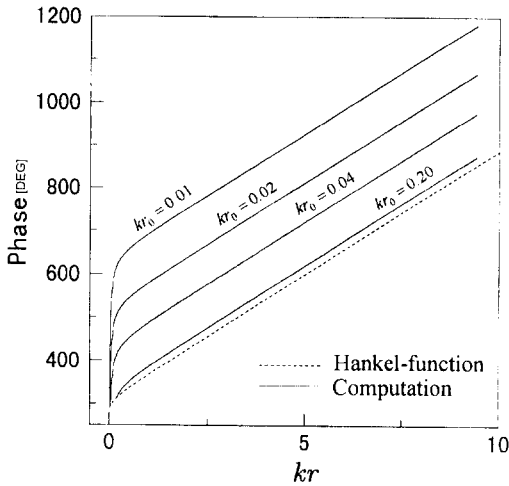


Fig. 2. Comparison of phases obtained from numerical and analytical solutions for constant depth ( $k$ : wave number,  $r$ : distance from the wave source).

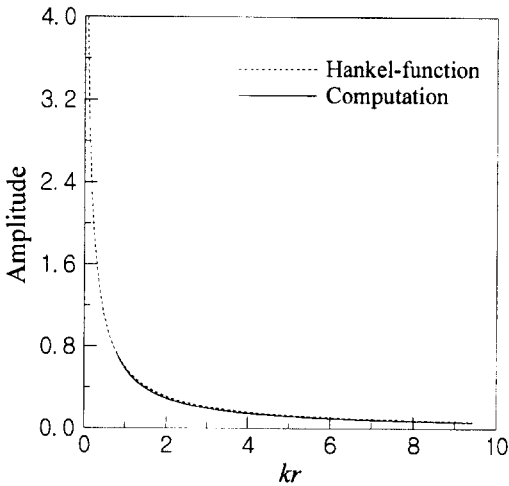


Fig. 3. Comparison of amplitudes obtained from numerical and analytical solutions for constant depth.

相의 差가 크다. 그러나 計算始點을  $kr_0 > 0.8$ 로 잡으면 Hankel函數值와 잘 一致하는 結果를 얻을 수 있었다. 또한 이 條件下에서는, Fig. 3의 振幅變化에 대해서도 充分한 精度가 얻어졌다.

다음으로는 水深이 變化하는 경우로서 平行等深線 斜面上的의 点源으로부터 나오는 波의 計算結果를 나타낸다. 이와 같이 平行等深線斜面 條件에서는 波浪場의 비회전성으로부터 얻어지는 屈折方程式으로부터 출발하여 특히 波速  $C$ 가 線形으로 變化하는 경우에 있어서 点源波의 波峰線에 대한 嚴密解를 얻을 수 있다(郭, 1998). 이때 수심  $h$ 는 分散關係式

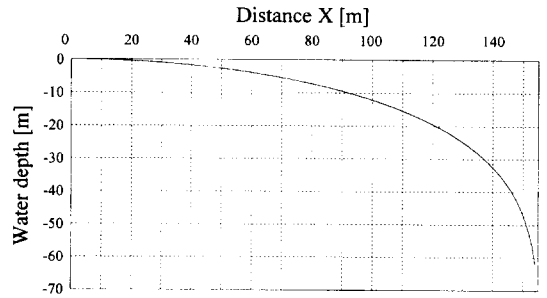


Fig. 4. Change of water depth for wave celerity  $C=0.1x$ .

$$\omega^2 = gk \tanh kh = gk \frac{e^{2kh} - 1}{e^{2kh} + 1} \quad (49)$$

로부터

$$h = \frac{C}{2\omega} \log \frac{g + \omega C}{g - \omega C} \quad (50)$$

로 주어진다. 여기서  $g$ 는 중력가속도이다.

波速이  $C = \beta x$  ( $\beta = 0.1 s^{-1}$ ) 일 때 거리  $x$ 에 따른 水深의 變化를 나타내면 Fig. 4와 같이 되고, 이 경우에 대하여 計算值와 理論解를 比較한 것이 Fig. 5이다. Fig. 5에서 計算值는 거리간격  $\Delta r$ 을 5m, 방향간격  $\Delta \theta$ 를  $2^\circ$ 로 하여 計算한 결과로서, 極淺海域에서 兩者間に 뚜렷한 差가 있지만 여기서는 緩傾斜方程式을 拋物形方程式으로 近似化하여 數值解를 구했기 때문에 이러한 差가 발생한 것으로 생각된다. 그 이외의 영역에서는 아주 좋은 일치를 볼 수 있다. 거리  $r$ 이 무한이 커지면

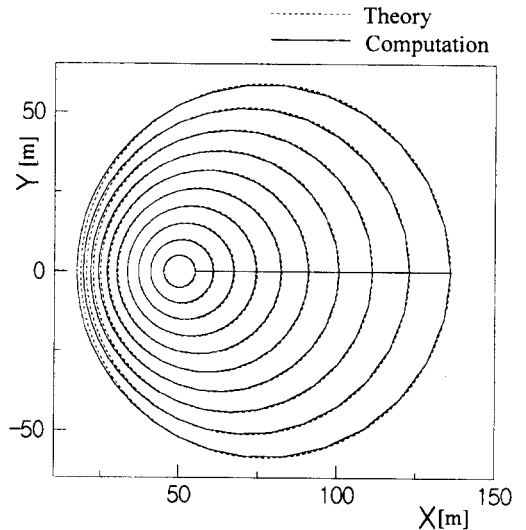


Fig. 5. Propagation of point-source waves over a parallel contour line topography.

방향간격  $\Delta\theta$ 가 매우 커지게 되고 해석의 정도가 상대적으로 방향간격  $\Delta\theta$ 가 작은 경우 보다 저하될 것으로 생각되어 진다. 그러나 확장 Green함수법에서는 반무한 평면의 Green함수법을 사용하므로 전 계산대상 영역을 몇 개의 소구역으로 분할하고 각각의 소구역에서 파랑장을 해석하여 인접한 공유경계에서 해를 접속하게 된다. 따라서 소구역의 길이는 수백 미터 이하가 되므로 방향간격  $\Delta\theta$ 를  $1^\circ$  정도로 작게 취하면 충분한 정도를 유지할 것으로 생각된다.

## 5. 結 論

緩傾斜方程式으로부터 출발하여 極座標系에 있어서의 拋物形 近似式를 誘導하였다. 또한 얻어진 拋物形 波動方程式을 數值的으로 풀으로써, 点源 근방의 小領域을 제외하면 高精度의 數值解가 얻어지는 것을 確認하였다.

本 研究에서 얻어진 拋物形 波動方程式의 基本解를 Hankel函數 대신에 点源波로서 組合하는 것에 의해, Green函數法의 一般化가 기대된다. 단 여기서 얻어진 拋物形 近似式으로는 点源으로부터  $1/8$  波長까지의 領域( $kr < 0.8$ )에서는 精度가 좋치않으므로 이 範圍에서 等水深으로 가정하여 Hankel函數를 그대로 이용하는 것이 좋을 것으로 판단된다.

## 參考文獻

- 이정렬, 1998. 만곡 수로에서의 파랑 전파 예측을 위한 경계 고정 좌표계의 적용, 한국해안·해양공학회지, 10(3): 125-131.
- Barailler, L. and Gaillard, P., 1967. Evolution recent des modeles mathematiques dagitation due a la houl:

Calcul de la diffraction en profondeur non uniforme, *La Houille Blanche*, 22(8), pp. 861-869.

- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction, *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Engrg.*, pp. 471-490.
- Corones, J., 1975. Bremmer series that correct parabolic approximation, *J. Math. Anal. and Appl.*, 50, pp. 361-372.
- Isobe, M., 1986. A parabolic refraction-diffraction equation in the ray-front coordinate system, *Proc. 20th Int. Conf. Coastal Engrg.*, pp. 306-317.
- Kirby, J.T., 1988. Parabolic wave computation in non-orthogonal coordinate systems, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, 114, pp. 673-685.
- Kirby, J.T., Dalrymple, R.A. and Kaku, H., 1994. Parabolic approximations for water waves in conformal coordinate systems, *Coastal Engineering*, 23, pp. 185-213.
- Lee, J.J., 1969. Wave induced oscillations in harbors of arbitrary shape, *Report No. KH-R-20*, W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, , Div. of Eng. and Applied Science, Calif. Inst. of Tech., Pasadena, Calif.
- Liu P.L.-F. and Boissevain, P.L., 1988. Wave propagation between two breakwaters, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, 114, pp. 237-247.
- Radder, A.C., 1979. On the parabolic equation method for water-wave propagation, *J. Fluid Mech.*, 95, pp. 159-176.
- 郭文秀, 1998. Green函數法による任意水深水域の波浪場解析に関する研究, 日本國立筑波大學 博士學位論文.

Received October 1, 1998

Accepted March 19, 1999