

비선형 상호작용에 의한 풍파 성분간 에너지 전달의 계산 Computation of Nonlinear Energy Transfer among Wind Seas

오병철* · 이길성**

Byung Cheol Oh* and Kil Seong Lee**

要 旨 : 비선형 상호작용에 의한 풍파 성분간 에너지 전달은 스펙트럼의 발달에서 중요한 역할을 한다. 비선형 전달을 표현하는 Boltzmann 적분을 계산하는 데에는 방대한 계산시간이 필요하기 때문에 파랑모형에서 비선형 상호작용을 고려하는 것은 불가능하다. 본 연구에서는 산란계수의 특성과 상호작용의 상세균형의 원리를 이용하여 비선형 전달을 효율적으로 계산하는 방법에 대하여 고찰하였다. Webb의 방법(IWM)은 특이점을 퇴화시켜 매우 안정한 계산 결과를 주지만 상세균형의 원리를 적용할 수 없기 때문에 계산의 효율성에는 한계가 있는 것으로 나타났다. 한편, Masuda의 방법(IMM)에서는 특이점을 해석적으로 처리하며 계산시간은 Pentium 300MHz Processor에서 1.3초가 소요되었다. 따라서 IMM은 1차원 파랑모형에 실용적으로 사용할 수 있으며 취송시간과 취송거리에 의한 풍파 스펙트럼의 성장 과정 연구 등에 매우 유용하다.

핵심용어 : 비선형 에너지 전달, 공명상호작용, Boltzmann 적분, 산란계수, 상세 균형의 원리

Abstract □ The energy transfer between sea-wave components by way of nonlinear wave-wave interactions plays a central role in spectral evolution. Since huge calculation time is required to exact computation of the resulting Boltzmann integral, however, the exact nonlinear energy transfer has not been directly introduced into operational wave models. Thus, effective calculation methods were examined in the present study which exploit the scale property of a scattering coefficient and the detailed balance of interactions. The improved Webb's method (IWM) has inherent stability because singularities degenerate into a negligible point. The improved Masuda's method (IMM) makes a quasi-analytical treatment of the inherent singularities and requires only 1.3 seconds of computer time via Pentium 300MHz processor. The IMM is, therefore, projected to be very useful for theoretical researches in spectral evolution with fetch- or duration-limited situations.

Keywords : nonlinear energy transfer, resonant interaction, Boltzmann integral, scattering coefficient, detailed balance principle

1. 서 론

최근에 사용되고 있는 대부분의 파랑예보모형에서는 파랑장을 에너지 스펙트럼으로 표현하고, 에너지 평형방정식을 해석하여 스펙트럼의 시·공간적 발전을 추적한다. 이 방법에서는 4파 공명상호작용에 의하여 발생하는 성분파간 에너지 교환이 중요한 원천항이다. Phillips(1960)와 Hasselmann(1962)이 처음으로 해

양파의 비선형 에너지 전달 문제를 취급한 이래로 많은 연구자들이 이를 계산하기 위한 연구를 수행하였다 (Hasselmann, 1963b; Sell and Hasselmann, 1972; Fox, 1976; Webb, 1978; Masuda, 1980; Hasselmann and Hasselmann, 1981, 1985 등). Hasselmann(1962)에 의하면 풍파 성분파간의 비선형 에너지 전달은 Boltzmann 적분으로 나타난다. 이를 직접적인 방법으로 적분하면 방대한 계산시간이 소요되기 때문에 파랑예보모형에

* 한국해양연구소 연안·항만공학연구센터 (Coastal and Harbor Engineering Research Center, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, Seoul 425-600, Korea)

** 서울대학교 지구환경시스템공학부 (School of Civil, Urban and Geosystem Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea)

도입하기가 곤란하다. 따라서, 지금까지는 비선형 에너지 전달을 스펙트럼으로 파라미터화하여 처리하거나(HYPA 등 제2세대 모형) 또는 직접적으로 계산하더라도 단지 하나의 공명상호작용쌍만을 고려하는(WAM 등 제3세대 모형) 방법을 사용하여 왔다. The SWAMP Group(1985)은 여러 가지 파랑모형을 상호 비교한 후 급변하는 풍장(wind field)에 대해서 제2세대 모형은 적용에 한계가 있음을 지적하면서 그 이유로서 비선형 에너지 전달의 불안정한 취급을 언급하였다. 다시 말해서 스펙트럼의 형상에 크게 의존하는 비선형 전달을 특정한 형태의 스펙트럼에 대한 선계산결과(precalculation)를 이용하는 파라미터 방법으로 처리하는 것은 불충분하다는 것이 판명된 것이다. 그래서 현재 세계적으로 많이 사용되고 있는 제3세대 모형인 WAM(The WAMDI Group, 1988)에서는 비선형 에너지 전달을 주어진 스펙트럼에 대해서 직접 계산하는 이산상호작용근사(Discrete Interaction Approximation; DIA)를 도입하였다. 그러나 Hasselmann *et al.*(1985)의 DIA에서는 계산시간을 줄이기 위하여 무수히 많은 공명상호작용배치를 한 개의 배치로 대표시키기 때문에 스펙트럼의 형태에 따라서 큰 오차를 유발할 수도 있다. 그러므로 해양파랑 수치모형의 발전을 위해서는 비선형상호작용에 의한 에너지 전달을 엄밀하고 효율적으로 계산할 수 있는 방법의 개발이 필요하다.

Hasselmann(1963b)은 Neumann 스펙트럼에 대하여 수치계산을 행하여 처음으로 비선형 에너지 전달을 엄밀계산하였다. 그의 계산에 의하면 비선형 상호작용은 스펙트럼 첨두부의 에너지를 증가시키고 중간 주파수 영역의 에너지를 감소시키는 역할을 하는 것으로 나타났다. Sell and Hasselmann(1972)은 동일한 계산법을 JONSWAP 스펙트럼에 적용하여 비선형 에너지 전달이 스펙트럼의 첨두부분을 저주파 영역으로 이동시키는 역할을 하고 있음을 발견하였으며 이는 Neumann 스펙트럼과 PM 스펙트럼의 경우와는 다른 현상이다. 그러나, 이 방법은 방대한 계산시간을 필요로 하며 또한 수치적인 불안정을 보이고 있다. Longuet-Higgins(1976)는 JONSWAP 스펙트럼과 같은 협대역 스펙트럼의 경우에 복잡한 비선형 상호작용 계수를 일정하다고 가정하여 Hasselmann(1963b)의 방법보다 훨씬 용이하고 수치적으로 안정한 계산 방법을 제시하였으며, Fox(1976)는 스펙트럼이 정규분포의 합으로 표현된다고 가정하고 협대역 근사를 JONSWAP 스펙트럼에 적

용하여 Sell and Hasselmann(1972)과 다른 결과를 얻었다. 또한, Hasselmann and Hasselmann(1981)은 비선형 상호작용의 대칭성을 활용하여 계산 시간을 단축하는 방법을 제안하였으나 수치적으로 매우 불안정한 결과를 주고 있다. Boltzmann 적분에 포함된 delta 함수의 소거 과정에서 특이점이 도입되는데 이의 수치적 처리가 불완전하기 때문에 비선형 전달의 계산에서 불안정이 나타나는 것이다. 이러한 수치 불안정을 제거하기 위하여 Webb(1978)은 Boltzmann 적분을 등고선 적분(contour integral)으로 변환하여 비선형 에너지 전달을 계산하는 방법을 제안하였으며 Masuda(1980)는 특이점 주변의 적분을 준해석적으로 구하는 방법을 제안하였다.

본 연구에서는 제3세대 파랑 모형에서 사용하고 있는 이산상호작용근사법에 대하여 간략히 설명하고 안정한 엄밀적분법인 Webb(1978)과 Masuda(1980)의 방법을 개선하여 비선형 상호작용에 의한 에너지 전달의 엄밀계산을 효율적으로 수행할 수 있도록 하였다.

2. Boltzmann 적분

비선형 상호작용에 의한 풍파 성분과간 에너지 교환은 Hasselmann(1962)에 의하여 처음으로 정식화되었다. 그는 Laplace 방정식과 자유수면 경계조건에 섭동법을 적용하여 수면파의 비선형 에너지 전달은 4파 공명상호작용의 결과로서 나타나며, 이는 다음 식과 같이 스펙트럼에 대한 3차의 order의 Boltzmann 적분으로 표현됨을 유도하였다.

$$S_{nl}(\mathbf{k}_4) = \frac{dN_4}{dt} = \int G \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{k}_i (i=1,2,3,4)$ 는 파수벡터, ω_i 는 각주파수, t 는 시간, S_{nl} 은 비선형 에너지 전달을 의미한다. 그리고 $N_i = N(\mathbf{k}_i) = F(\mathbf{k}_i)/\omega_i$ 는 파랑작용(wave action)이며, $F(\mathbf{k})$ 는 파수공간에서 정의되는 에너지 스펙트럼을 나타낸다. 한편, $\delta(\cdot)$ 는 Dirac의 delta 함수이며 $G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ 는 상호작용에 관련되는 연계계수 또는 산란계수(coupling or scattering coefficient)이다. 일반적인 수심에 대한 산란계수는 Hasselmann(1962)에 나타나 있으며 심해파인 경우에는 다음과 같은 Dungey and Hui

(1979)의 식을 사용하여 구하는 것이 편리하다.

$$G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \frac{\pi g^2 D^2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)}{4\rho^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} \quad (2)$$

$$D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \frac{2(\omega_1 + \omega_2)^2 (k_1 k_2 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)(k_3 k_4 - \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4)}{\omega_{1+2}^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2} + \frac{2(\omega_1 - \omega_3)^2 (k_1 k_3 + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3)(k_2 k_4 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_4)}{\omega_{1-3}^2 - (\omega_1 + \omega_3)^2} + \frac{2(\omega_1 - \omega_4)^2 (k_1 k_4 + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4)(k_2 k_3 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)}{\omega_{1-4}^2 - (\omega_1 - \omega_4)^2} + \frac{1}{2}[(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4) + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_4) + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)] \quad (3) - \frac{1}{4g^2}(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4)(\omega_1 + \omega_2)^4 + \frac{1}{4g^2} \times (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_4)(\omega_1 - \omega_3)^4 + \frac{1}{4g^2}(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)(\omega_1 - \omega_4)^4 + \frac{5}{2}k_1 k_2 k_3 k_4 + \frac{1}{g^3}(\omega_1 + \omega_2)^2(\omega_1 - \omega_3)^2(\omega_1 - \omega_4)^2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$

여기서 $\omega_i = \sqrt{gk_i}$, $i=1, 2, 3, 4$ 이며

$$\omega_{1+2} = \sqrt{g|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|}, \quad \omega_{1-3} = \sqrt{g|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3|}, \quad \omega_{1-4} = \sqrt{g|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4|} \quad (4)$$

이다. 식 (3)으로부터 상호작용계수 G 는 \mathbf{k}_1 과 \mathbf{k}_2 및 \mathbf{k}_3 와 \mathbf{k}_4 에 대하여 대칭이며 $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ 와 $(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ 에 대하여도 대칭임을 알 수 있다. 그리고 식 (2)와 (3)으로부터 $G(\lambda \mathbf{k}_1, \lambda \mathbf{k}_2, \lambda \mathbf{k}_3, \lambda \mathbf{k}_4) = \lambda^6 G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ 이므로 산란계수는 파수의 변화에 대하여 매우 민감하다.

Delta 함수의 성질에 의하여 식 (1) 적분이 존재하기 위해서는 파수와 주파수가 다음과 같은 관계를 만족시켜야 한다.

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_a \quad (5)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 = \omega_a \quad (6)$$

식 (5)와 (6)은 4개의 파랑 성분이 상호 간섭하여 공명(resonance)을 일으키는 조건으로서 4파 공명상호작용조건이라 부르며 이 조건이 만족되는 4파 성분간에는 에너지의 교환(energy transfer)이 일어나며 그 양은 식 (1)로서 계산되는 것이다. 특히, 식 (5)는 상호작용시 운동량이 보존됨을 의미하며 식 (6)은 에너지의 보존을 의미한다(Hasselmann, 1963a). 식 (5)와 (6)으로부터 세

개의 파랑이 결정되면 나머지 한 개의 파랑이 결정되므로 스펙트럼을 25개의 주파수 영역(frequency bin)과 36개의 방향으로 이산화하는 파랑 모형에서는 $(25 \times 36)^3 = 9.26 \times 10^8$ 가지의 조합에 대하여 공명조건을 조사하고 식 (1)의 Boltzmann 적분을 계산하여야 한다. 이를 모두 계산하는데는 방대한 계산시간이 소요되므로 대부분의 파랑 모형에서는 직접계산 대신 간접적인 방법을 사용하여 비선형 상호작용을 고려하고 있다.

식 (1)은 형식상 파수공간에서 6중 적분이지만 적분에 포함된 delta 함수를 소거하면 3중 적분으로 변환된다. 그러나 에너지 delta 함수 $\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)$ 의 소거 과정에서 분모가 영으로 되는 특이점(singularity)이 도입되며 이의 적절한 수치적 처리가 안정적인 비선형 전달의 계산에서 매우 중요하다.

3. 상호작용의 대칭성

식 (1)은 공명 delta 함수를 만족시키는 파수쌍 $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ 의 상호작용에 의해서 파수 \mathbf{k}_a 가 단위시간당 얻는 작용(또는 에너지)을 나타낸다. 식 (1)은 파수 \mathbf{k}_a 의 작용변화율만을 표현하고 있기 때문에 표면적으로는 대칭이 아니다. 그러나, 산란계수 $G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ 는 파수의 순서 교환에 대하여 대칭이므로 주어진 상호작용에 참여하는 4개의 파수가 얻거나 잃는 작용의 양은 동일하다. 이는 식 (1)을 N_1, N_2 및 N_3 에 관한 식으로 고치면 명백하게 알 수 있다. \mathbf{k}_1 과 \mathbf{k}_2 는 작용을 잃고 \mathbf{k}_3 와 \mathbf{k}_4 는 작용을 얻는다. 따라서, Boltzmann 적분은 내용적으로는 파수에 대해서 대칭이다. 이것을 상세 균형의 원리(principle of detailed balance)라고 하며 이를 이용하면 적분의 계산시간을 25%로 단축시킬 수 있다(Hasselmann and Hasselmann, 1981).

한편, Hasselmann and Hasselmann(1985)은 상세 균형 원리를 따르는 파랑의 공명 상호작용을 입자(particle)의 관점에서 설명하였다. 이에 따르면 4파의 공명상호작용은 입자의 충돌과정(collision process)으로 이해된다. 일반적으로 작용밀도의 스펙트럼은 입자 또는 波束의 개수 밀도(number density)로 해석될 수 있다(Komen et al., 1994). 파열(wave train)은 유한시간 동안에 상호작용하는 유한波束(finite wave packet)으로 나타낼 수 있으며 상호작용을 하는 동안에 4개의 波束은 공간상에서 동일 영역을 점유한다. 그러므로, 이 시간 동안에 일어나는 파열간 작용(입자)의 평균교환(mean exchange)

은 충돌과정에서 입자 또는 波束의 생성(creation)과 소멸(annihilation)의 확률로서 표현되는데 이것이 파랑-입자 상사(wave-particle analogy)이다. 즉, 波束은 에너지와 운동량을 갖는 입자군(group of particle)으로 해석된다. 한편, 파동을 입자로 취급할 때 기본단위 입자의 에너지는 $E = \hbar \omega$, 운동량 벡터는 $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ 이며 \hbar 는 매우 작은 상수로서 Plank 상수에 대응한다(Gasiorowicz, 1974). 따라서, 작용 밀도(action density)는 입자의 개수 밀도(number density)에 대응됨을 알 수 있다. 파랑-입자 상사에서 4파 공명 상호작용은 입자(또는 波束)간의 충돌과정이며 이에 대한 개념도를 Fig. 1에 나타내었다. 이 그림에서 화살은 입자를 의미하고 양의 파수, 주파수, 에너지, 작용, 운동량을 가지며 빗장 화살은 반입자(antiparticle)로서 음의 파수, 주파수, 에너지, 작용, 운동량을 갖는다. 비선형 에너지전달은 입자충돌의 결과로서 해석될 수 있으며 충돌과정의 제약조건(side condition)은 충돌의 결과 오로지 한 개의 출력 성분(outgoing component)만 존재하는 것이다(Fig. 1). 따라서, 4파 공명 상호작용은 입자 및 반입자(합은 3개이다)가 충돌하여 소멸하고 한 개의 파랑이 생성되는 과정으로 이해된다. 그리고 반입자의 소멸은 입자의 생성과 동등하며 역도 성립한다.

입자의 충돌 확률은 입자 밀도(particle density)에 비례한다. 그러므로, Fig. 1에서 충돌 확률은 세 개의 입력성분(ingoing component)의 작용 밀도(입자의 개수 밀도)의 곱에 비례한다. 8차원 위상공간에서의 충돌 확률은 다음과 같다.

$$\begin{matrix} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{matrix} \begin{pmatrix} N_1 N_2 N_3 \\ N_1 N_2 N_4 \\ N_2 N_3 N_4 \\ N_1 N_3 N_4 \end{pmatrix} \frac{Q}{4} d\Xi \quad (7)$$

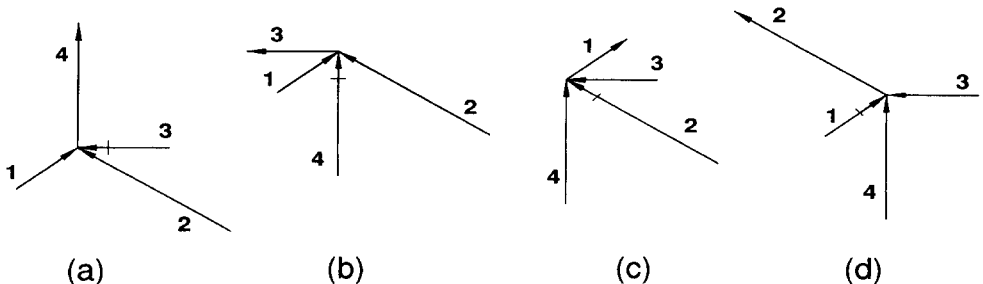


Fig. 1. The four basic collision diagrams in the particle picture for the resonantly interacting quadruplet due to Hasselmann and Hasselmann (1985); arrows represent particles and cross-stroked arrows antiparticles; all four diagrams satisfy the resonance condition, $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$, $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$.

$$Q = G \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \quad (8)$$

$$d\Xi = d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4 \quad (9)$$

위의 식에서 (a), (b), (c) 및 (d)는 각 Fig. 1의 충돌과정 (a), (b), (c) 및 (d)에 상당한다. 반입자의 소멸은 입자의 생성과 같다는 원리를 Fig. 1의 4개의 충돌 도식에 적용하여 단위 시간당 작용의 변화량 ΔN_i 을 구하면 다음 식으로 표현되며 이는 Boltzmann 적분의 계산에 유용하게 사용된다(Hasselmann and Hasselmann 1985; Snyder *et al.*, 1993).

$$\begin{pmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \Delta N_3 \\ \Delta N_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} d\Theta \quad (10)$$

$$d\Theta = \frac{\Theta}{4} [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] d\Xi \quad (11)$$

위의 식으로부터 4파 공명상호작용에 의하여 4개의 파랑 성분이 얻거나 잃는 작용은 동일하며 부호만 다르다는 것을 알 수 있다. 또한, 이 식을 이용하여 비선형 전달을 계산하면 계산과정에서 에너지, 운동량 및 작용을 자동적으로 보존시킨다.

4. 이산상호작용근사법

제3세대 모형에서는 주어진 $\mathbf{k}_i (= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ 와 $\omega_i (= \omega_1 + \omega_2)$ 에 대하여 식 (5)와 (6)의 공명조건을 만족시키는 많은 4파 공명상호작용 배치(configuration) 가운데서 오로지 하나의 鏡像配置雙(mirror image pair)만을 고려하여 비선형 에너지 전달항을 계산한다. Hasselmann *et al.*(1985)은 많은 시험 계산을 통하여 비선형

에너지 전달은 다음 식으로 표현되는 배치와 그에 대한 경상배치에 대한 계산으로 근사할 수 있음을 발견하였다(Fig. 4참조).

$$\omega_3 = \omega(1 + \lambda_s) = \omega_+ \quad (12)$$

$$\omega_4 = \omega(1 - \lambda_s) = \omega_- \quad (13)$$

여기서 $\lambda_s=0.25$ 이고, 이 때 \mathbf{k}_3 와 \mathbf{k}_4 가 \mathbf{k}_a 와 이루는 각은 각각 11.5° 및 -33.6° 이며 이 배치는 WAM 모형에서 채택되었다. 한편, 일본기상협회(1995)는 $\lambda_s=0.197$ 가 $\lambda_s=0.25$ 보다 더 좋은 결과를 준다고 보고하였다. 이 때에 \mathbf{k}_3 와 \mathbf{k}_4 가 \mathbf{k}_a 와 이루는 각은 각각 10.20° 및 -22.47° 이다. 위의 공명 배치에 대하여 비선형 상호작용의 상세균형의 원리를 적용한 후 에너지 스펙트럼에 관한 식으로 나타내면 다음과 같다(Hasselmann *et al.*, 1985).

$$\begin{pmatrix} \delta S_{nl} \\ \delta S_{nl}^+ \\ \delta S_{nl}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2\Delta f \Delta \theta}{\Delta f \Delta \theta} \\ \frac{(1+\lambda_s)\Delta f \Delta \theta}{\Delta f^+ \Delta \theta} \\ \frac{(1-\lambda_s)\Delta f \Delta \theta}{\Delta f^- \Delta \theta} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\times Cg^{-4} f^{11} \left[F^2 \left\{ \frac{F_+}{(1+\lambda_s)^4} + \frac{F_-}{(1-\lambda_s)^4} \right\} - 2 \frac{FF_+F_-}{(1-\lambda_s^2)^4} \right]$$

여기서 $F(f, \theta)$ 는 주파수-파향 공간에서 정의되는 에너지 스펙트럼을 나타낸다. Hasselmann *et al.*(1985)은 $C=3 \times 10^7$ 을, 일본기상협회(1995)는 $C=2.5 \times 10^7$ 을 사용하였다.

5. Webb의 방법

이 절에서는 Webb(1978)의 방법에 근거하여 비선형 에너지 전달을 효율적으로 계산하는 방법에 대하여 고찰한다. 비선형 에너지 전달을 나타내는 식(1)을 전달함수를 도입하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\partial N_4}{\partial t} = \int_{\mathbf{k}} T_w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_1 \quad (15)$$

$$T_w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4) = \int_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} G \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \quad (16)$$

여기서 T_w 는 Webb의 전달함수이다. 식 (16)에서 파수

에 관한 delta 함수를 소거하면 다음 식을 얻는다.

$$T_w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \int_{\mathbf{k}_3} G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] d\mathbf{k}_3 \quad (17)$$

그러므로, 식 (17)에서 주파수 delta 함수를 소거하면 전달함수를 계산할 수 있다. 적분을 수행하기 위하여 먼저 \mathbf{k}_1 과 \mathbf{k}_4 를 고정시키면 주파수 delta 함수의 인수가 다음 식을 만족할 때에만 적분의 값이 존재한다.

$$W(\mathbf{k}_3) = \alpha(\mathbf{k}_1) + \alpha(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1) - \alpha(\mathbf{k}_4) = 0 \quad (18)$$

식 (18)은 5차원 초평면을 나타내지만 여기서는 \mathbf{k}_1 과 \mathbf{k}_4 를 고정시켰기 때문에 평면상의 곡선을 나타낸다. 식 (18)로 표현되는 곡선을 따르는 방향을 s 로 하고 s 에 직각인 방향을 n 으로 하면 식 (17)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T_w(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4) = \int_s \int_n G \delta[W(s, n)] [N_1 N_3 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] dn ds \quad (19)$$

여기서 s 의 양의 방향은 \mathbf{k}_3 가 x 축과 이루는 각이 증가하는 방향으로 한다. 식 (18)로 표현되는 폐곡선상에서 $n=0$ 이므로 Jacobian을 사용하면 식 (19)는 다음과 같다 [수면파의 분산관계식을 고려하면 식 (18)은 폐곡선을 나타낸다; Fig. 2].

$$T_w = \int_s \int_n G \delta(n) \left| \frac{\partial W}{\partial n} \right|^{-1} [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] dn ds \quad (20)$$

식 (20)에서 delta 함수를 소거하면 폐곡선에 대한 선적분으로 변환된다.

$$T_w = \oint G \left| \frac{\partial W}{\partial n} \right|^{-1} [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] ds \quad (21)$$

그러므로, 비선형 상호작용에 의한 에너지 전달을 나타내는 식 (15)는 최종적으로 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial N_4}{\partial t} = \int_{\mathbf{k}_1} \oint G |\nabla W|^{-1} [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] ds d\mathbf{k}_1 \quad (22)$$

식 (22)는 $|\nabla W| = 0$ 인 곳에서 특이점을 갖는다. 그러나, 이 특이점은 식 (18)로 표현되는 폐곡선이 하나의 점으로 퇴화(degeneration)하는 경우로서 이 때는 $\mathbf{k}_1 =$

$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4$ 이므로 에너지 전달은 영이 된다. 그러므로 식 (22)를 수치 적분할 경우 특이점에 대한 특별한 처리는 요구되지 않는다.

식 (22)에 대한 해석적인 적분은 구할 수 없으므로 수치적분으로 비선형 에너지 전달을 계산한다. 적분을 수행하기 전에 먼저 식 (18)로 표현되는 폐곡선 \mathbf{k}_3 의 궤적(locus)을 구하여야 한다. 심해의 경우 ω 는 \sqrt{k} 에 비례하므로 식 (18)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W(x, y) = q + \sqrt{k_3} - \sqrt{|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3|} = 0 \quad (23)$$

여기서, $q = \sqrt{k_4} - \sqrt{k_1}$, $\mathbf{p} = \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1$ 이며, $(x, y) = (k_{3x}, k_{3y})$ 이다. 식 (23)으로 표현되는 \mathbf{k}_3 궤적의 특징은 q 의 값에 따라서 결정된다. 먼저 q 가 음인 경우에는 $|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| < k_3$ 이므로 \mathbf{p} 와 \mathbf{k}_3 는 항상 둔각을 이루며 \mathbf{k}_3 의 궤적은 원점을 포함하지 않는다. 한편, q 가 양이면 $|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| > k_3$ 이므로 \mathbf{p} 와 \mathbf{k}_3 의 작은 예각인 경우도 있고 둔각인 경우도 있다. 그러므로 \mathbf{k}_3 의 궤적은 원점을 포함한다. 그리고, $q = 0$ 인 경우에는 $\mathbf{p} = (a, b)$ 라 하면 \mathbf{k}_3 의 궤적은 $ax + by = -0.5 p^2$ 으로 되어 직선이 된다. 전형적인 \mathbf{k}_3 궤적은 계란 형상(egg-shaped)이다(Fig. 2). 이상의 고찰로부터 \mathbf{k}_3 궤적의 모양은 q 와 \mathbf{p} 에 의존하고, 궤적의 주축방향은 \mathbf{p} 와 평행함을 알 수 있으며 또한 궤적은 \mathbf{p} 에 대해서 대칭인 형상을 갖는다.

Fig. 2는 주어진 파수 쌍($\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4$)에 대한 일종의 상호 작용도이며 이 그림의 폐곡선을 따라서 공명조건이 만족되며 Boltzmann 적분에 기여한다.

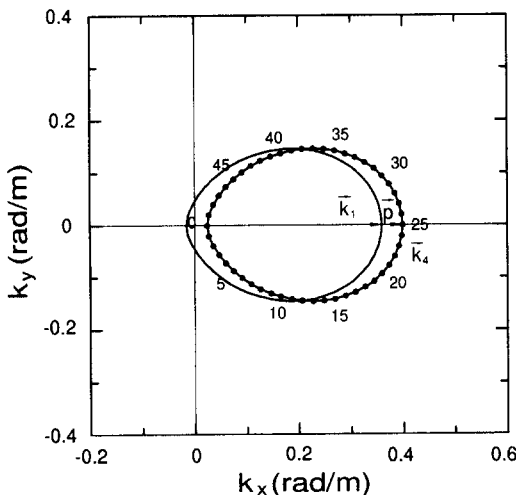


Fig. 2. Loci of the vectors \mathbf{k}_2 and \mathbf{k}_3 (filled circle) for $\mathbf{k}_1 = (0.36, 0.00)$ and $\mathbf{k}_4 = (0.40, 0.00)$.

식 (22)에 의한 비선형 에너지 전달은 무수히 많은 \mathbf{k}_1 과 \mathbf{k}_4 의 조합 다시 말해서 \mathbf{p} 와 q 로 결정되는 폐곡선에 대한 등고선적분(contour integral)을 수행하여 계산된다. 파랑의 방향스펙트럼을 900개의 성분으로 이산화한 경우 0.5×900^2 개의 폐곡선에 대하여 적분을 계산해야 하기 때문에 방대한 계산시간이 소요된다.

본 연구에서는 폐곡선의 형상이 $\mathbf{p} = \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1$ 에 의존하고 있다는 사실에 주목하여 계산의 효율을 향상시키는 방법을 제안한다. 식 (23)에 $\sqrt{\lambda}$ 를 곱하여도 등식은 성립한다. 이 경우 \mathbf{p} 와 q 는 각각 $\lambda \mathbf{p}$, $\sqrt{\lambda} q$ 로 되므로 이에 대응하는 궤적의 좌표도 λ 배로 된다. 즉, \mathbf{p}_1 에 대한 \mathbf{k}_3 의 궤적의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하고 $\mathbf{p}_2 = \lambda \mathbf{p}_1$ 에 대한 궤적의 좌표를 (x_2, y_2) 라 하면 $(x_2, y_2) = \lambda(x_1, y_1)$ 이다. 또한, 위상항 $|\nabla W|$ 에 대하여는 $|\nabla W| \sim k^{0.5}$ 이므로 $|\nabla W|^{-2} = \sqrt{\lambda} |\nabla W|^{-1}$ 이다. 그러므로, $G \sim k^6$ 과 $ds \sim k$ 임을 고려하면 식 (21)에서 작용항(action term)을 제외한 곱(산란 계수 \times 위상항 $\times ds$)은 $k^{7.5}$ 에 비례한다. 즉,

$$G_2 |\nabla W|^{-2} ds_2 = \lambda^{15/2} G_1 |\nabla W|^{-1} ds_1 \Rightarrow \lambda^{15/2} \Pi_1 \quad (24)$$

여기서 $\Pi = K_w ds = G |\nabla W|^{-1} ds$ 이며 K_w 는 핵함수이다. 식 (24)는 식 (23)의 스케일 특성을 나타내는 것이며 이를 이용하여 비선형 에너지 전달을 효율적으로 계산하는 방법을 IWM(Improved Webb's Method)으로 부르기로 한다.

식 (24)를 식 (22)의 계산에 이용하기 위해서는 파수 영역을 Fig. 3과 같이 등차간격이 아닌 등비간격(geometric scaling)으로 이산화하여야 한다. 한편, Fig. 3은 파수를 등비간격으로 나누었을 경우 근본적으로 동일한 상호작용 조합을 보여준다. 즉, 식 (23)에서 보는 바와 같이 상호작용은 \mathbf{p} 에만 의존하기 때문에 Fig. 3에서 \mathbf{p}_1 과 평행한 상호작용과 회전 변형시킨 상호작용(회전대칭)에 대해서는 식 (23)을 적용하여 Fig. 2와 같은 상호작용도를 만들 수 있다. 그러므로 상호작용 벡터 \mathbf{p} 는 파수 격자번호의 차와 파향 격자번호의 차로 구분될 수 있으며 이에 대한 궤적을 기본 궤적(basic locus)이라고 한다. 즉, Fig. 3에 그려진 벡터 \mathbf{p} 가운데 어느 한 개에 대응하는 궤적에 대하여 산란 계수 G , 위상항, $|\nabla W|$ 및 적분요소 ds 를 미리 계산하여 두면 나머지 조합에 대해서는 식 (24)의 scale 법칙과 회전대칭을 사용하여 계산할 수 있다. 이러한 성질을 이용하면 식 (22)의 적분을 Webb(1978)의 본래 방법보

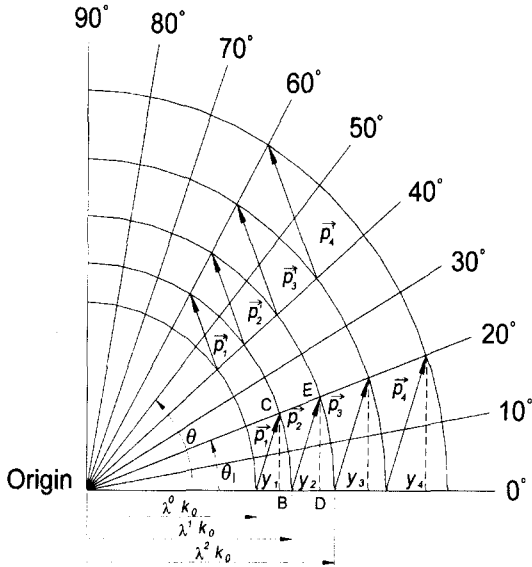


Fig. 3. The geometric construction of a set of parallel and rotation interaction vectors whose basic loci are the same.

다 훨씬 빠르게 계산할 수 있다.

6. Masuda의 방법

앞에서 언급한 Webb의 방법에서는 수면파 공명 상호작용 조건 식 (5)에서 좌변의 k_1 과 우변의 k_4 를 고정시키고 Boltzmann 적분을 계란형의 k_3 궤적을 따르는 선적분으로 변환하여 계산하였다. 그러나, Masuda의 방법에서는 공명조건 식 (5)와 식 (6)의 k_4 와 ω_4 값이 일정한 궤적을 따라서 식 (1)의 적분을 구한다. Webb의 방법과는 달리 이 경우에는 식 (1)의 주파수 delta함수의 처리과정에서 퇴화하지 않는 특이점이 도입되며 이의 영향을 무시할 수 없다. 식 (1)을 k_2 에 대해서 적분하고 산란계수의 대칭성을 적용하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{dN_4}{dt} = 2 \int_{k_1} d\mathbf{k}_3 \int_{k_1, k_2} G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] d\mathbf{k}_1 \quad (25)$$

여기서, $k_2 = k_3 + k_1 - k_1$ 이며 수식 전개에 간편성을 위하여 $\rho = g = \omega_p = 1$ (여기서 ω_p 는 침두각주파수이다)이라고 하면 $\omega_2 = \sqrt{|k_3 + k_4 - k_1|}$ 이다. 또한, Jacobian으로부터 $d\mathbf{k} = 2\omega^3 d\omega d\theta$ 이므로 위의 식을 주파수-파향 공간에서의 에너지 전달로 표시하면 다음과 같다.

$$T_4 = 2\omega_4^4 \int d\omega_3 d\theta_3 \int_{\omega_3 \leq \omega_4} d\omega_1 d\theta_1 (8\omega_1^3 \omega_3^3 G) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)] \quad (26)$$

여기서, $T_4 = T(\omega_4, \theta_4)$ 는 파수 k_4 에서의 비선형에너지 전달 $[dF(\omega, \theta)/dt]$ 을 의미하며 $F(\omega, \theta) = 2\omega^4 N(\mathbf{k})$ 의 관계가 사용되었다. 식 (5)와 식 (6)에서 미지수와 조건수가 각각 8개, 3개이므로 자유도는 5가 된다. 따라서 k_3 와 k_4 가 결정되면 k_1 과 k_2 의 결정에는 자유도 하나가 생긴다. 이 경우 공명상호작용하는 4파의 배치는 Longuet-Higgins의 상호작용 도식(Longuet-Higgins, 1962)으로 나타낼 수 있다(Fig. 4). Fig. 4에 나타난 곡선군은 다음 식으로 정의되는 γ 의 값이 일정한 궤적을 나타낸다.

$$\gamma = \frac{\sqrt{|k_a|}}{\omega_a} - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (27)$$

한편, 4파 공명상호작용배치를 결정하기 위하여 자유도 파라미터로서 $\theta_1 - \theta_4$ 를 채용하면 식 (5)와 식 (6)으로부터 다음과 같은 3차의 대수방정식을 얻는다. 여기

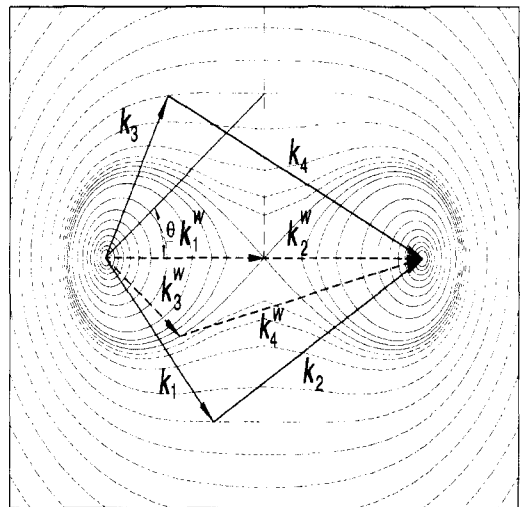


Fig. 4. Interaction chart which illustrates 4-wave resonance conditions; If k_3 and k_4 are given, a curve of constant γ is determined, on which k_1 (or k_2) must lie. For $\gamma < 0$, θ is defined by $\cos^{-1}(2k_a/\theta_a^2)$. Solid lines correspond to contour for $\gamma > 0$, and dashed for $\gamma < 0$. The figure of eight curve represents $\gamma = 0$. The values of contours are $\pm(0.0, 0.005, 0.01, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18)$. Superscript W means the interaction configuration of WAM model.

서, θ_a 는 \mathbf{k}_a 의 방향이다.

$$4\omega_a \omega_1^3 - \{2k_a \cos(\theta_1 - \theta_a) + 6\omega_a^2\} \omega_1^2 + 4\omega_a^3 \omega_1 + (k_a^2 - \omega_a^2) = 0 \quad (28)$$

Fig. 4와 조건 $k_1 \leq k_2$ 로부터 ω_1 은 일의적으로 결정되며 $\theta_1 - \theta_a$ 의 영역은 다음과 같다.

$$\underline{\theta} \leq |\theta_1 - \theta_a| \leq \pi \quad (29)$$

$$\underline{\theta} = \cos^{-1} \left(\frac{2k_a}{\omega_a^2} \right) \quad (30)$$

여기서, $G \sim k^6 \sim \omega^{12}$ 임을 고려하여 다음과 같은 변수를 도입한다.

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1 &= \theta_1 - \theta_a, & \tilde{\omega}_1 &= \omega_1 / \omega_a \\ \tilde{\theta}_2 &= \theta_2 - \theta_a, & \tilde{\omega}_2 &= \omega_2 / \omega_a \\ \tilde{\theta}_3 &= \theta_3 - \theta_a, & \tilde{\omega}_3 &= \omega_3 / \omega_a \\ \tilde{k}_a &= k_a / \omega_a^2, & \tilde{\omega}_a &= \omega_a / \omega_a \\ \tilde{G} &= G / \omega_a^{12}, & \tilde{\Omega} &= \ln \tilde{\omega}_3 \end{aligned} \quad (31)$$

그러므로, 식 (26)을 위의 변수로 나타내면 다음과 같다.

$$T(\omega_a, \theta_a) = 2\omega_a^{23} \int_0^\pi d\tilde{\theta}_3 \sum_{\pm} \int_0^\pi d\tilde{\Omega} \sum_{\pm} \int_0^\pi d\tilde{\theta}_1 \sum_{\pm} (8 \tilde{\omega}_1^{-3} \tilde{\omega}_3^{-4} \tilde{G} S^{-1} [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)]) \quad (32)$$

$$\int_0^\pi d\theta \sum_{\pm} = \int_{-\pi}^\pi d\theta \text{이며 조건 } k_1 \leq k_2 \text{로부터 3평면 } \tilde{\theta}_3$$

$= \pi, \tilde{\Omega} = 0, \tilde{\theta}_1 = 0$ 와 곡면 $\tilde{\theta}_1 = \underline{\theta}(\tilde{\theta}_3, \tilde{\Omega})$ 에 의하여 둘러싸인 영역은 적분에서 제외된다(Fig. 5). 한편, S 는 주파수 delta 함수 $\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_a)$ 의 Jacobian을 구한 후 식 (28)을 사용하여 구해지며 최종 식은 다음과 같다.

$$S = \left| 1 + \left(\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2} \right) \left\{ \left(\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2} \right)^2 - \frac{\tilde{k}_a}{\tilde{\omega}_2^2} \cos \tilde{\theta}_1 \right\} \right| \quad (33)$$

식 (32)는 $S=0$ 인 곳에서 특이점을 가지며 식 (5), (6) 및 식 (33)으로부터 특이점은 $\tilde{\theta}_1=0$ 를 따라서 존재함을 알 수 있다. 또한, 식 (27)로부터 특이점에서 $\gamma=0$ 으로 되며 이는 Fig. 4에 나타난 "8자형"의 곡선을 따라서 분포한다. 즉, 특이점은 평면 $\tilde{\theta}_1=0$ 상에서 곡선 $\gamma=0$ 으로 주어진다(Fig. 5). 식 (32)의 적분시 특이점 주변에서 발생할 수 있는 수치불안정을 제거하기 위하여 특이점 주변의 적분은 준해석적으로 구한다. 먼저

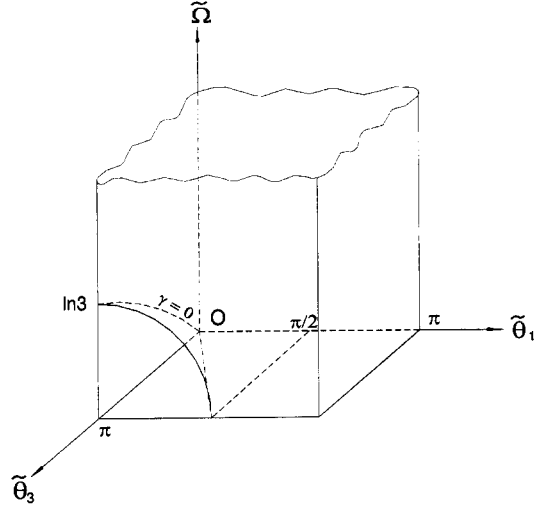


Fig. 5. A schematic rectangular prism for integration region in Masuda's method. The lower left region is ruled out from the condition $k_1 \leq k_2$. Singular points are founded along the curve $\gamma=0$ on the plane $\tilde{\theta}_1=0$.

Fig. 6에서 보는 바와 같이 $\tilde{\theta}_3$ 가 일정한 평면상에서 특이점 주변의 작은 영역 A 를 생각한다. 점 P 는 특이점에서의 값을 의미하며 피적분함수를 $R=8 \tilde{\omega}_1^{-3} \tilde{\omega}_3^{-4} \tilde{G} [N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)]$ 로 쓰면 영역 A 에서의 적분은 다음과 같이 근사할 수 있다.

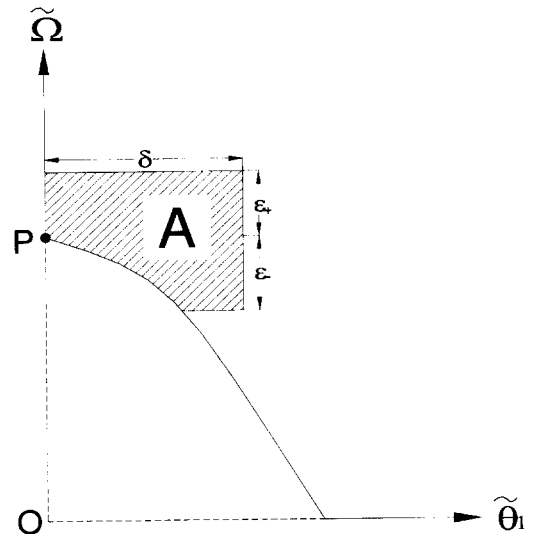


Fig. 6. A schematic diagram of a cross-section ($\tilde{\theta}_3 = \text{const.}$). P means a singular point and the integration over the region A is quasi-analytically computed.

$$\iint_A \frac{R}{S} d\tilde{\Omega} d\tilde{\theta}_1 \approx P_p \iint_A \frac{1}{S} d\tilde{\Omega} d\tilde{\theta}_1 \quad (34)$$

그리고, 특이점 주변에서 S 는 다음 식으로 근사할 수 있다.

$$S = \sqrt{2\tilde{\theta}_1^2 + 8\sqrt{2}\mu(\tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}_p)} \quad (35)$$

여기서, $\mu = (\partial\gamma/\partial\tilde{\Omega})_p = \tilde{\omega}_3 / [\sqrt{2}\tilde{\omega}_0^4] [4\tilde{\omega}_3(\tilde{\omega}_3^2 + \cos\tilde{\theta}_3) - \tilde{\omega}_0^3]$ 이다. 그러므로 식 (35)를 식 (34)에 대입하고 적분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{1}{S} d\tilde{\Omega} d\tilde{\theta}_1 = & \frac{\epsilon_+}{\sqrt{2}} \ln \left[\frac{\sqrt{2\delta^2 + 8\sqrt{2}\mu\epsilon_+ + \sqrt{2\delta}}}{\sqrt{8\sqrt{2}\mu\epsilon_+}} \right] \\ & + \frac{\delta\epsilon_+}{\sqrt{2\delta^2 + 8\sqrt{2}\mu\epsilon_+ + \sqrt{2\delta}}} \\ & + \frac{\epsilon_-}{\sqrt{2}} \ln \left[\frac{\sqrt{2\delta^2 - 8\sqrt{2}\mu\epsilon_- + \sqrt{2\delta}}}{\sqrt{8\sqrt{2}\mu\epsilon_-}} \right] + \frac{\delta\epsilon_-}{\sqrt{2\delta^2 - 8\sqrt{2}\mu\epsilon_- + \sqrt{2\delta}}} \end{aligned} \quad (36)$$

여기서 $2\delta^2 \leq 8\sqrt{2}\mu\epsilon_-$ 인 경우에는 $2\delta^2 - 8\sqrt{2}\mu\epsilon_- = 0$ 으로 한다. 위의 식은 $\mu=0$ 즉, 원점 부근에서는 적용될 수 없다. 그러나, 수치 적분에서는 원점 부근에서 일어나는 공명상호작용 4파는 모두 동일한 주파수 영역에 해당하게 되므로 식 (1)에 대한 기여는 영이 된다. 주파수와 파향을 이산화 한 후 특이점을 포함하는 격자 영역에 대하여는 식 (36)을 적용한다.

Fig. 4의 상호작용도식에 대해서도 스케일 특성이 적용될 수 있다. 또한, Masuda의 방법에서는 등고선 적분이 나타나지 않으므로 상세균형의 원리도 적용될 수 있다. 따라서 Webb의 방법보다 효율적으로 식 (1)을 적분할 수 있다. Masuda의 방법에 스케일 특성, 회전 특성 및 상세균형의 원리를 적용한 것을 IMM (Improved Masuda Method)로 부르기로 한다. 식 (10)으로부터 공명상호작용 관계에 있는 4파에 대한 상세균형의 원리를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$-\frac{\partial N_1}{\partial t} d\mathbf{k}_1 = -\frac{\partial N_2}{\partial t} d\mathbf{k}_2 = \frac{\partial N_3}{\partial t} d\mathbf{k}_3 = \frac{\partial N_4}{\partial t} d\mathbf{k}_4 \quad (37)$$

식 (37)로부터 하나의 공명배치에 대하여는 한 번만의 계산으로 4개 파랑 성분이 단위 시간당 얻는 작용을 계산할 수 있다.

7. 결과 및 토의

앞에서 논의한 WAM법, IWM법 및 IMM법으로 비선형 에너지 전달을 계산하기 위해서는 스펙트럼을 이산화하여야 한다. 주파수와 방향의 분할수를 각각 $K=25$ 와 $M=36$ 으로 한다. 또한 상호작용의 스케일 특성을 이용하기 위해서는 인접주파수비를 일정하게 하여야 한다. 본 연구에서는 $R=f_{i+1}/f_i=1.1$ 을 사용하며 최소주파수는 $f_{min}=0.042\text{Hz}$ 로 한다. 그러므로 i 번째 주파수는 $f_i=f_{min} 1.1^{i-1}$ 로 되며 방향분해능은 $\Delta\theta=10^\circ$ 이다. 작용은 다음과 같은 JONSWAP 형의 주파수 스펙트럼을 \cos^{2s} 형 방향분포를 사용하여 계산한다.

$$F(\omega, \theta) = F_J(\omega, \theta, \gamma) \equiv \alpha g^2 \omega^{-5} e^{-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^4} \gamma e^{-\frac{(\omega-\omega_p)^2}{2\sigma\omega_p^2}} \times D(s) \cos^{2s}(\theta - \theta_p) \quad (38)$$

여기서 ω 는 각주파수, θ 는 파향, α 는 Phillips의 상수로서 0.0081을 사용하였다. ω_p 는 첨두주파수, γ 와 s 는 각각 주파수 및 방향에 대한 에너지의 집중도를 표현한다. 스펙트럼의 폭을 나타내는 σ 는 평균값을 사용하였으며($\omega \leq \omega_p$ 이면 0.07, $\omega > \omega_p$ 이면 0.09) $D(s)$ 는 방향분포함수의 적분을 1로 하는 정규화인자로서 $D(1)=2/\pi$ 이고, g 는 중력가속도, θ_p 는 주방향이다.

많은 시험 계산을 통하여 상호작용의 강도는 상호작용에 참여하는 파랑의 주파수비가 클수록 약해짐을 알 수 있었다. Fig. 7은 식 (22)의 피적분함수를 Fig. 2의 곡선을 따라서 나타낸 것이다. 이 그림으로부터 $C_r = \omega_{max}/\omega_{min} > 3$ 인 공명배치는 적분에 거의 기여하지 않고 있음을 알 수 있다. 그러므로 공명상호작용 관계에 있는 4파의 최대/최소 주파수비가 3보다 크면 계산에서

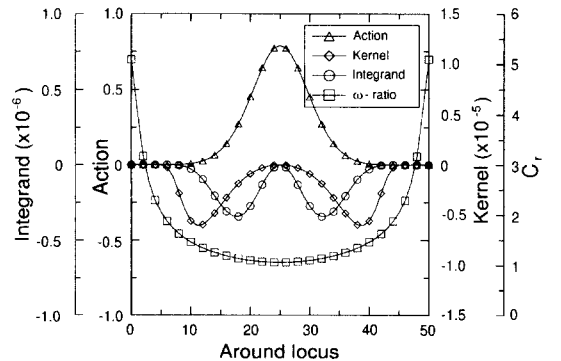


Fig. 7. Variations of the integrand of contour integral along locus for $\mathbf{k}_1=(0.36, 0.00)$ and $\mathbf{k}_2=(0.40, 0.00)$.

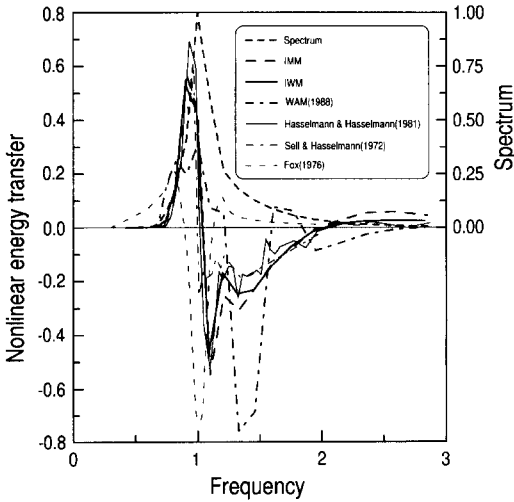


Fig. 8. Comparison of the 1-D nonlinear transfer by various methods for JONSWAP spectrum. The transfer function and frequency are nondimensionalized by peak frequency and spectral peak density.

제외한다.

Fig. 8과 Fig. 9는 각각 표준 JONSWAP 스펙트럼($\gamma=3.3$)과 PM 스펙트럼($\gamma=1$)에 대하여 여러 가지 방법으로 구한 1차원 비선형 에너지 전달의 비교를 보여준다. 방향분포함수로는 $\cos^2\theta$ 형을 사용하였다. 이 그림에서 종축의 주파수는 첨두주파수로, 횡축의 비선형

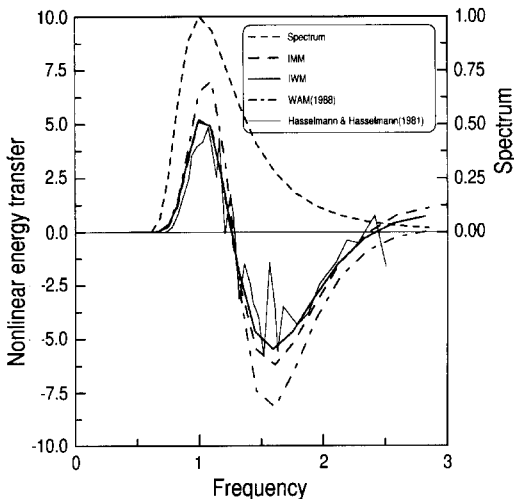


Fig. 9. Comparison of the 1-D nonlinear transfer by various methods for PM spectrum. The transfer function and frequency are nondimensionalized by peak frequency and spectral peak density.

에너지 전달과 에너지 스펙트럼은 각각 $F_{max}^3 \omega_p^{11} g^{-4}$ (F_{max} 는 주파수스펙트럼의 첨두값이다)과 F_{max} 로 무차원화하였다. 이 그림에서 보는 바와 같이 모든 방법이 비선형 에너지 전달의 특성을 정성적으로 잘 설명하고 있으나 정량적인 결과는 상당한 차이를 보고 있다. Fig. 8의 표준 JONSWAP 스펙트럼에 대한 계산에서 IMM과 IWM은 전반적으로 같은 결과를 주고 있으나 중간 주파수대의 두 번째 첨두 부근에서 차이를 보이고 있는데 이는 특이점 처리의 방법이 다르기 때문인 것으로 생각된다. Hasselmann and Hasselmann(1981)의 방법은 고주파 영역에서 불안정한 계산 결과를 보여주고 있는데 이는 Boltzmann 적분에 묵시적으로 포함된 특이점의 처리가 불안정하기 때문이며 특히 PM 스펙트럼에 대한 계산에서는(Fig. 9) 첨두주파수 부근에서도 수치적인 불안정이 나타나고 있다. 한편, Longuet-Higgins(1976)의 협대역 스펙트럼 근사를 사용한 Fox(1976)의 방법과 WAM 모형(The WAMDI Group, 1988)의 방법은 엄밀해와 큰 차이를 보이고 있다. WAM 모형의 결과는 식 (14)로 계산한 것이다.

비선형 에너지 전달의 첨두값은 JONSWAP 스펙트럼의 경우 첨두주파수 보다 저주파에서 발생하며 PM 스펙트럼의 경우에는 첨두주파수 근처에서 나타난다. 이는 발달중인 풍파의 첨두주파수가 저주파 방향으로 천이하는 사실을 잘 설명하고 있다.

Fig. 10은 표준 JONSWAP 스펙트럼에 대하여 IWM, IMM 및 WAM법으로 계산한 2차원 비선형 에너지 전달을 나타낸다. IMM과 IWM은 비슷한 결과를 주고 있으나 WAM법의 결과는 다소 차이가 있다. 특히, WAM의 방법에서는 저주파측의 $\pm 35^\circ$ 근처에서 봉우리가 생기고 있는데 이는 WAM 모형에서 사용되는 이상상호근사의 대표 공명배치를 나타내는 식 (12)와 식 (13)에 의하여 저주파측에서 주방향과 35° 정도 떨어진 방향으로 에너지의 유입이 크기 때문인 것으로 해석된다. 이상의 결과에서 보는 바와 같이 WAM 모형에서 사용하고 있는 이산 상호작용근사에 의한 비선형 전달은 엄밀 결과와 큰 차이를 보이고 있기 때문에 실용적인 해양파랑 모형에 사용할 수 있는 범용성이 있으면서 동시에 효율적인 비선형 에너지 전달 계산법이 필요하다.

오(1998)는 여러 가지 격자 파라미터에 대한 민감도 분석을 수행한 후 $R=1.1$, $\Delta\theta=10^\circ$, $C_r=3$, $f_{min}=0.042\text{Hz}$, 주파수 격자수 25, 파향 격자수 36을 사용하면 충분히

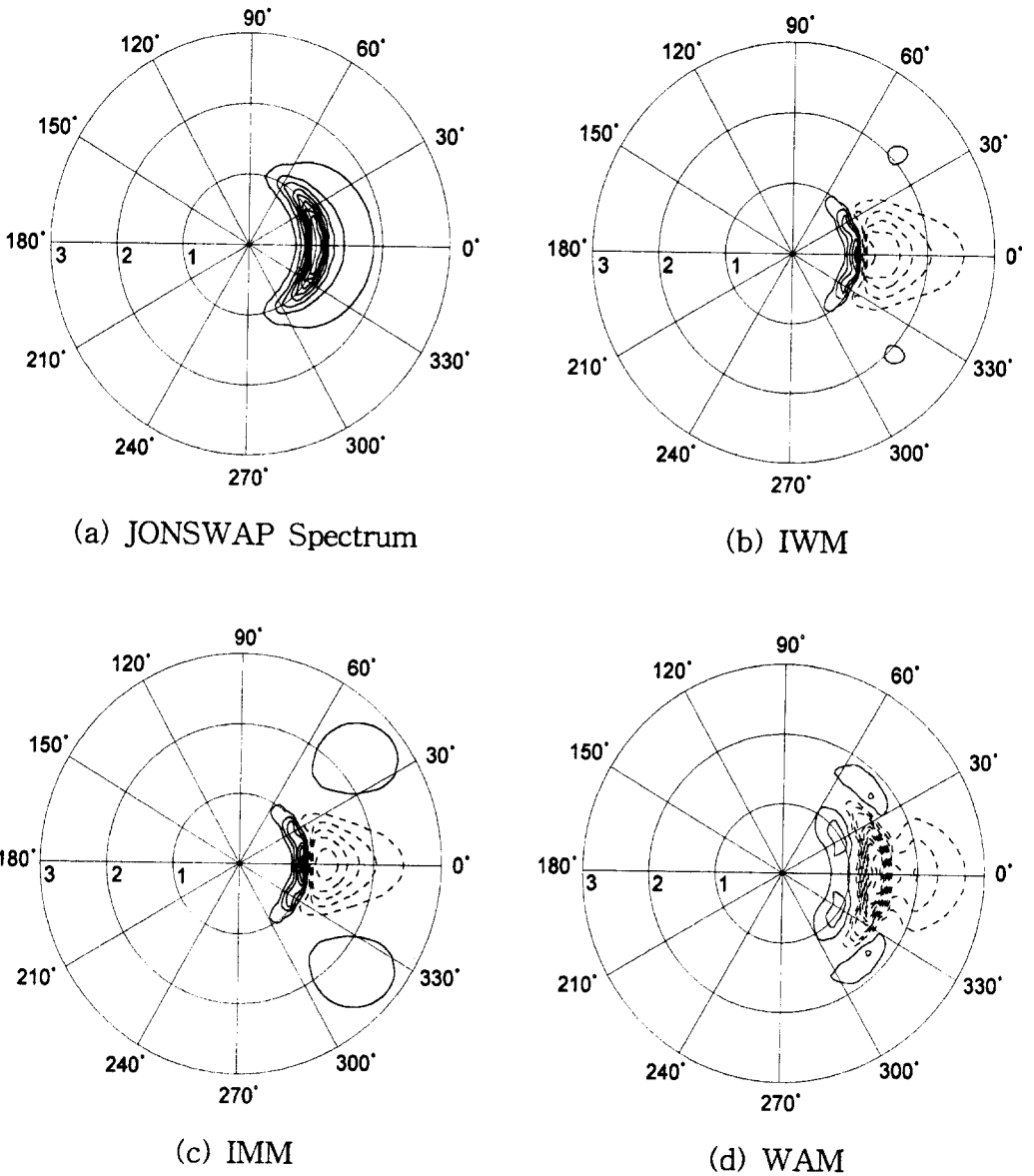


Fig. 10. Comparison of the 2-D nondimensionalized nonlinear energy transfer by various methods. Solid lines represent positive values and dashed negative.

실용적인 결과를 얻을 수 있음을 밝혔다. 이 경우 계산에 사용되는 배치의 총수는 2,496개이다. 이 중 18개는 특이점 배치에 해당하며 식 (36)이 적용된다. 스펙트럼 성분의 수가 900개인 경우 4파 배치의 총 개수는 약 $900^3 = 7.29 \times 10^8$ 가지임을 고려하면 상세 균형의 원리와 산란계수의 대칭성을 이용하여 상당한 계산시간의 절감이 이루어짐을 알 수 있다.

Table 1은 하나의 스펙트럼에 대해서 비선형 에너지

전달의 엄밀 계산시간을 비교한 것이다. 이 표에서 보는 바와 같이 상세균형의 원리를 사용하는 IMM이 가장 효율적임을 알 수 있으며 WAM 모형은 한 개의 공명배치만 사용하므로 계산시간은 IMM법의 약 1/2,500이다. 한편, IWM은 등고선 적분으로 변환하는 과정에서 특이점이 퇴화하므로 매우 안정적인 계산을 수행할 수 있으나 상세균형의 원리를 적용할 수 없기 때문에 IMM보다 많은 계산 시간이 소요된다. IWM과 IMM에

Table 1. Computational time of nonlinear transfer per spectrum

Method	CPU time	Processor
Hasselmann <i>et al.</i> (1978)	30 min	CDC 6000
Hasselmann and Hasselmann (1981)	18 min	CDC CYBER 175
Webb's original method (1978)	30 min	Pentium 300MHz
IWM (the present study)	120 s	Pentium 300MHz
IMM (the present study)	1.3 s	Pentium 300MHz

서는 산란계수의 스케일 특성을 활용하기 위하여 Fig. 3과 같이 주파수를 등비수열의 형태로 이산화하여야 하는데 Fig. 2의 폐곡선에 대한 등고선 적분에서는 폐곡선을 등간격으로 분할하기 때문에 상세균형의 원리를 적용할 수 없게 되는 것이다. 1.3초의 계산시간이 소요되는 IMM법은 취송시간 또는 취송거리에 지배되는 (fetch-limited or duration-limited wave field) 1차원 파랑 모형에 사용할 수 있으므로 풍파 스펙트럼 발달의 이론적 연구에 많은 도움을 줄 수 있다고 사료된다. 그러나 IMM을 2차원 모형에 사용하기에는 무리이므로 실용적이면서 기존의 WAM보다 정도가 우수한 계산방법의 개발이 요구된다.

참고문헌

- 오병철, 1998. 비선형 상호작용을 고려한 해양파랑 수치 모형, 서울대학교 박사학위논문, 301p.
- Duney, J.C. and Hui, W.H., 1979. Nonlinear energy transfer in a narrow gravity-wave spectrum, *Proc. Roy. Soc. London*, **A368**, pp. 239-265.
- Fox, M.J., 1976. On the nonlinear transfer of energy in the peak of a gravity-wave spectrum II, *Proc. Roy. Soc. London*, **A348**, pp. 467-483.
- Gasiorowicz, S., 1974. *Quantum Physics*, John Wiley & Sons, 514p.
- Hasselmann, K., 1962. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory, *J. Fluid Mech.*, **12**, pp. 481-500.
- Hasselmann, K., 1963a. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 2. Conservation theorems; wave-particle analogy; irreversibility, *J. Fluid Mech.*, **15**, pp. 273-281.
- Hasselmann, K., 1963b. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 3. Evaluation of the energy flux and swell-sea interaction for a Neumann spectrum, *J. Fluid Mech.*, **15**, pp. 385-398.
- Hasselmann, K., 1966. Feynman diagrams and interaction rules of wave-wave scattering process, *Rev. Geophys.*, **4**, pp. 1-32.
- Hasselmann, K., Barnett, T.P., Bouws, H., Carlson, H., Cartright, D.E., Enke, K., Ewing, J.A., Gineapp, H., Hasselmann, D.E., Kruseman, P., Meerburg, A., Muller, P., Olbers, D.J., Richter, K., Sell, W. and Walden, H., 1973. Measurements of wind wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP), *Dtsch. Hydrogr. Z., Suppl.*, **A8(12)**, 95p.
- Hasselmann, S. and Hasselmann, K., 1981. A symmetrical method of computing the nonlinear transfer in a gravity wave spectrum, *Hamb. Geophys. Einzelschriften, Reihe A: Wiss. Abhand.*, **52**, 138p.
- Hasselmann, S. and Hasselmann, K., 1985. Computations and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part I: A new method for efficient computations of the exact nonlinear transfer integral, *J. Phys. Oceanogr.*, **15**, pp. 1369-1377.
- Herterich, K. and Hasselmann, K., 1980. A similarity relation for the nonlinear energy transfer in a finite depth gravity-wave spectrum, *J. Fluid Mech.*, **97**, pp. 215-224.
- Komen, G.J., Cavaleri, L., Donelan, M., Hasselmann, K., Hasselmann, S. and Janssen, P.A.E.M., 1994. *Dynamics and Modelling of Ocean Waves*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 532p.
- Longuet-Higgins, M.S., 1976. On the nonlinear transfer of energy in the peak of a gravity-wave spectrum: A simplified model, *Proc. Roy. Soc. London*, **A347**, pp. 311-328.
- Masuda, A., 1980. Nonlinear energy transfer between wind waves, *J. Phys. Oceanogr.*, **10**, pp. 2082-2092.
- Phillips, O.M., 1977. *The Dynamics of the Upper Ocean*. 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 336p.
- Sell, W. and Hasselmann K., 1972. Computations of

- nonlinear energy transfer for JONSWAP and empirical wind-wave spectra, *Rep. Inst. Geophys. Univ. Hamburg*, pp. 1-6.
- Snyder, R.L., Thacker, W.C., Hasselmann, K., Hasselmann, S. and Barzel, G., 1993. Implementation of an efficient scheme for calculating nonlinear transfer from wave-wave interactions, *J. Geophys. Res.*, **C98**, pp. 14507-14525.
- The SWAMP Group (24 authors), 1985. *Ocean Wave Modelling*. Plenum Press, New York, 256p.
- The WAMDI Group (13 authors), 1988. The WAM model- A third generation ocean wave prediction model, *J. Phys. Oceanogr.*, **18**, pp. 1378-1391.
- Webb, D.J., 1978. Non-linear transfer between sea waves, *Deep Sea Res.*, **25**, pp. 279-298.
- 日本気象協會, 1995. 數値計算に基づく太平洋全域の波浪特性の研究, 129p.

Received October 16, 1998

Accepted January 14, 1999