

# 초지기 가압 - 헤드박스 내 지료유체의 공정 - 동특성 모델

윤성훈

## Process-dynamic Model for Stock-fluid in a Pressurized Paper Machine Headbox

Sung-Hoon Yoon

### ABSTRACT

Mathematical modeling provided a systematic analysis for the dynamic behaviour of stock fluid in a paper machine pressurized headbox. Dynamic responses of liquid level, sheet basis weight and hydraulic pressure were predicted from the simulation model which represents the system. A unit step and asinusoidal wave load were considered as the input forcing functions in the headbox. Results are summarized as follows: 1. The dependence of sheet basis weight on liquid level in the pressurized-headbox was non-linear; 2. Liquid level in the headbox showed first-order lag with a unit step forcing to fluid input rate; 3. The amplitude of wave response of liquid level was inversely proportional to the time content for the sinusoidal input changes; 4. Sheet basis weight showed second-order oscillating underdamped responses for the step input load of flow rate; 5. The damping factor in the second-order system was a function of air-pressure in the headbox; and, 6. Dead-time existed in the measuring process for the headbox slice pressure.

### 1. 서론

초지공정의 제어에 있어서 종이의 최종 품질을 결정시킬 수 있는 중요한 단위공정은 헤드박스외 지료공급체계(approach flow system) 및 보류와 관련되는 습부화학부분을 들 수 있는데, 특히 헤드박스는 초지기의 심장부에 해당하는 공정으로서 지료의 조성을 균일한 상태로 유지시킨 채 초지에서 이동하는 와이어(wire)상에 지료를 안정되게 위치시켜 주는 중요한 기능을 하고 있다. 특히 헤드박스의 슬라이스 부분에서 지료를 사출시키는 속도(jet velocity)는 와이어 이동속도에 관

련하여 주의 깊게 제어가 되어야 한다. 이를 제트/와이어-비(jet/wire-ratio) 또는 rush/drag-ratio라고도 하는데 제트/와이어-비에 대한 제어체계가 정확성이 낮은 경우 종이의 지폭방향(CD) 혹은 기계방향(MD)으로의 평량, 합수율 및 두께(caliper) 등의 분포가 불량하게 되는 것은 물론 섬유배향성과 전반적인 강도의 저하를 초래할 수가 있게 된다.<sup>1)</sup> 대개 제트/와이어-비가 1부근일 때 최적의 지합이 얻어질 수 있지만 실제 공정에서는 다른 여러 가지 목적으로 그 비율을 반드시 1에 설정해 놓지는 않는다. 만일 사출속도가 와이어 속도보다 낮으면 drag이라 하고, 반대로 사출

•충남대학교 농과대학 임산공학과(Dept. of Forest Products, Tech. College of Agriculture, Chungnam National University).

속도가 와이어 속도보다 높으면 rush되었다고 말한다. 섬유의 배향은 물론 탈수성 향상을 위해서 약간의 rush 혹은 약간의 drag으로 초지기를 운전하고 있다. 제트/와이어-비의 정확한 제어를 위해서는 지료의 사출속도와 와이어 속도가 동시에 측정되어 설정치와 비교한 뒤 발생한 오차를 지속적으로 최소화시키는 것이 바람직하겠지만 실제 헤드박스에서의 지료 사출의 유속은 측정될 수 없는 문제가 있기 때문에 헤드박스 내의 지료높이 혹은 정역학적 압력으로 간접추정하게 된다. 현재 초지(open-headbox) 또는 밀폐식 가압형 헤드박스(pressurized-headbox)로서 크게 두 종류의 디자인으로 구분할 수 있는데 가압형 헤드박스는 다시 공기-쿠션(air-cushion)형과 유압식(hydraulic design)으로 분류할 수 있다.<sup>2)</sup> 유압식 디자인은 슬라이스로부터의 지료 사출속도가 지료이송펌프에서의 압력에 대해서만 직접적으로 비례하는 특성을 갖고 있는 반면, 공기-쿠션형 헤드박스의 경우는 사출지료의 에너지가 이송펌프로부터 유래되면서, 헤드박스 내 액위(pond level)가 일정 수준으로 유지되고 상부 공간의 공기압력에 의해 평형교란에 대한 감쇄효과를 유발시킨다. 헤드박스 내 액위 혹은 수두는 결국 슬라이스에서의 사출속도(jet speed)를 결정하게 되며 이때 베르누이(Bernoulli)의 유체 내 에너지-보존법칙(energy conservation law of fluid)을 따르게 된다.<sup>2,3)</sup>

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

식(1)에서  $v$ 는 사출속도(m/s),  $h$ 는 액위(m),  $g$ 는 중력가속도( $9.81 \text{ m/s}^2$ )를 나타낸다. 헤드박스의 슬라이스로부터 사출되는 지료는 슬라이스의 기하학적 구조에 의해 그 두께가 수축되고 흐름방향이 아래쪽으로 휘어지도록 유도된다. 이론적으로 사출지료의 두께는 그때의 속도와 함께 헤드박스로부터의 사출되는 부피유속을 결정하게 되지만 그러나 슬라이스의 간격이 반드시 사출지료의 두께에 해당하는 것이 아니기 때문에 유속을 계산할 때에는 반드시 사출지료의 수축율을 고려해야 한다.<sup>4)</sup> 개방형 헤드박스는 초지기가 개발된 초기에 사용된 것으로서 박스 내 지료액위의 중력 크기가 지료의 사출속도를 결정하게 된다.<sup>1,2)</sup> 따라서, 초

지속도가 계속 빨라지게 되면 그만큼 지료의 액위도 증가해야 되므로 헤드박스의 높이는 무작정 높아질 수밖에 없게 된다. 따라서 개방형 헤드박스는 현재 저속-초지기에서만 사용되고 있고 생산성 높은 고속-초지기기술이 발전함에 따라 가압식 헤드박스가 개발되게 된 것이다.<sup>5)</sup> 본 연구에서는 가압식 헤드박스 중에서 다층백판지 초지나 백상지 혹은 신문용지 등의 초지에 널리 사용되고 있는 밀폐형 가압-헤드박스에 있어서 지료의 유체역학적 거동과 동특성에 관한 모델 분석을 통해 초지의 제어기술 개발을 도모하고자 하였다.

## 2. 방법

초지기 밀폐형 가압-헤드박스 내 지료 유체의 동적 특성에 대한 이론적 모델을 설계하였고, 모델의 선형화와 라플라스변환에 의한 전단함수화를 하였으며 개방회로(open-loop)에서 계단함수(step function) 및 사인함수(sinusoidal function)의 입력변화에 대한 동적 응답특성을 컴퓨터-시뮬레이션하여 분석하였다.

## 3. 결과 및 고찰

### 3.1 가압-헤드박스의 제어기술

가압-헤드박스는 재래식의 개방형 헤드박스로부터 유래된 것으로서 그 구조와 제어체계를 Fig. 1에 나타내었다. 이 디자인의 기능은 헤드박스 내에서 지속적으로 회전하는 천공롤(perforated rolls)에 의해 지료 내 난류형성(turbulence)과 속도경사의 균일성을 유지시켜 주고 내부에 물 분무장치가 설치되어 있어 지료표면과 헤드박스의 측면에 물을 분사시킨다.<sup>2)</sup> 가압식-헤드박스의 일반적인 제어체계의 구성은 다음과 같다: 1. 헤드박스 내 지료압력(수두압)은 팬펌프의 역류콘트롤 밸브(circulation control valve)에 의해 제어되며 역류콘트롤밸브가 요구되는 범위내에서 기능할 수 있도록 팬펌프 다음에 수동으로 조작(HC)되는 유량밸브(steam valve)가 위치한다; 2. 와이어 주행속도를 측정(ST)하여 제트/와이어-비를 계산하는데 사용되는데 식(1)에 의해 요구되는 사출속도가 산출되면 액위압이 계산되고 계산된 액

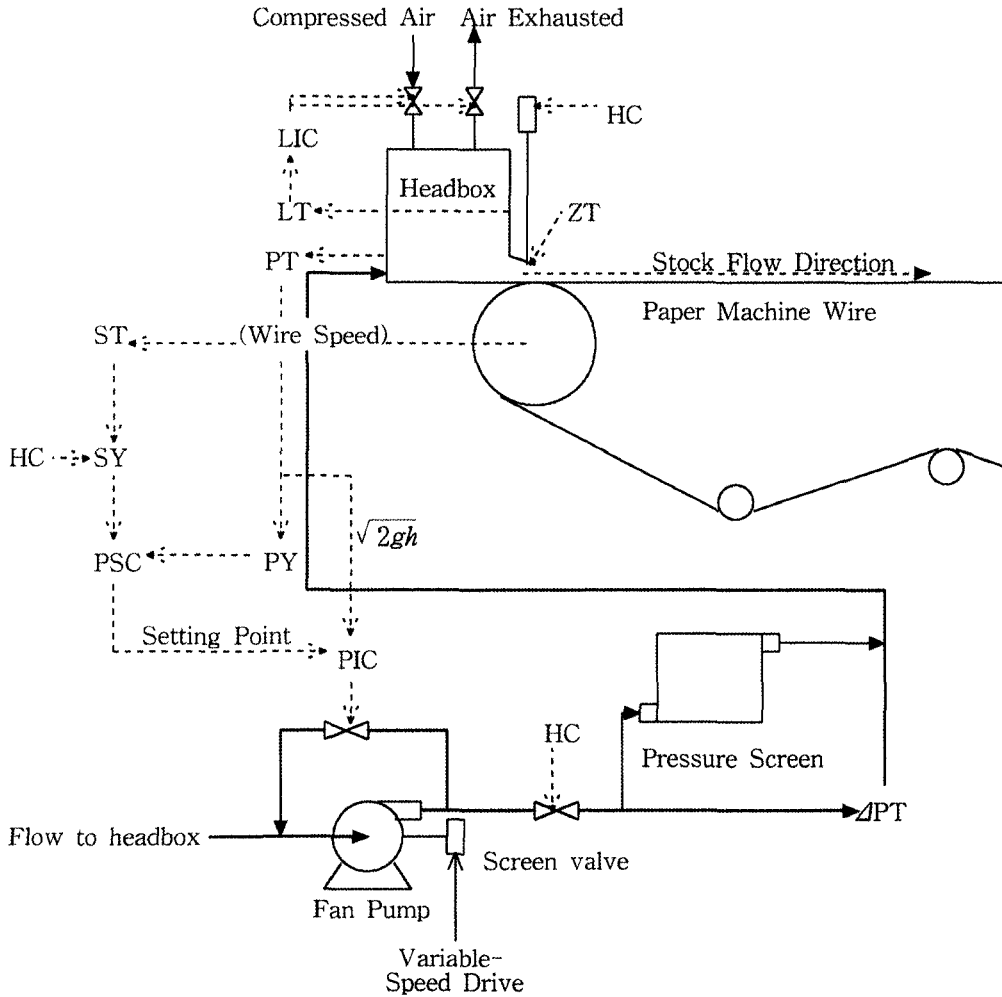


Fig. 1. Schematic diagram for pressurized headbox control system.

위압과 와이어 주행속도를 비교한다(PSC). 제트/와이어-비 컨트롤러(jet/wire-ratio controller)는 발생된 오차만큼의 신호(PIC)에 의해 팬펌프-역류밸브를 개폐함으로써 헤드박스 내 수두를 조절하게 된다. 이러한 헤드박스 액위제어 방식을 폭포식설정(cascaded set point)제어라고 하는데,<sup>6)</sup> 만일 와이어 주행속도 측정장치가 일시적인 오차를 발생했을 경우는 전체 액위 제어체계가 교란될 수밖에 없다. 따라서, 헤드박스로의 지료공급에 대한 제어는 현재까지 수두압 혹은 액위압력에 근거한 단일회로체계(single-loop basis)에 의존하고 있다; 3. 헤드박스 내 액위조절을 위한

단일회로제어방식의 경우 박스 내 공기압력조절이 압축공기밸브(pressurized air valve)와 배출공기밸브(exhausted-air control valve)에 의해 조작되며 이들 두 밸브에 의해 헤드박스에서와는 달리 가압-밀폐식 헤드박스의 경우 실제 측정되는 액위(actual level)의 값은 가상수두(total head)에 비해 중요성이 덜하다; 4. 헤드박스의 슬라이스 위치는 수동 혹은 컴퓨터에 의해 조작되는데 지료가 와이어와 접촉하는 순간에서의 탈수도를 제어하는 데 필요하고 이때의 탈수량에 근거하여 헤드박스 내 지료농도를 결정하는데 사용된다. 그러나 아직 헤드박스 내 지료농도를 연속적

으로 모니터해 낼 수 있는 자동계측장치는 개발되어 있지 않다.

### 3.2 동특성 모델(Dynamic model)

Fig. 2는 밀폐형 헤드박스의 모식도를 나타낸 그림으로서 지료는 비압축성 유체(incompressible fluid)이며 헤드박스 내에서 화학반응이 없고 지료의 균일한 혼합이 이루어지고 있을 뿐 아니라 일정한 시간 동안 계 내부에서 발생되거나 소비되는 양이 동일하다고 가정한다면, 다음과 같이 질량보존의 법칙에 근거한 총괄-물질수지관계(overall material balance)가 성립될 수 있다.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{rate of mass} \\ \text{accumulation} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{rate of} \\ \text{mass inflow} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} \text{rate of} \\ \text{mass outflow} \end{array} \right] \quad (2)$$

따라서, 헤드박스 내 총괄-물질수지식은

$$\frac{d(\rho Ah)}{dt} = \rho F_i - \rho F_o \quad (3)$$

로서 나타낼 수 있다. 여기에서  $\rho$ 는 지료의 밀도,  $A$ 는 헤드박스 기저단면적,  $h$ 는 액위(stock level)이며  $F_i$  및  $F_o$ 는 각각 유입지료의 부피유속

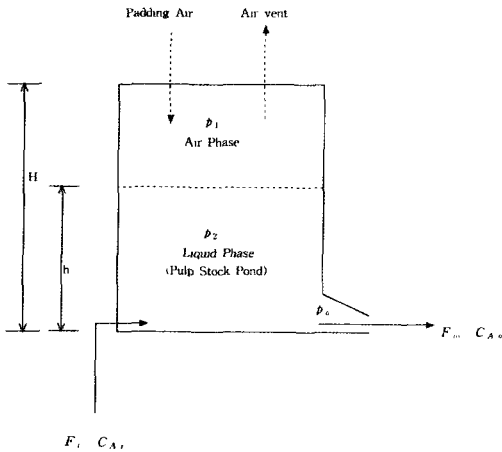


Fig. 2. Simplified model for a pressurized-headbox.

및 슬라이스 유출지료의 부피유속을 나타낸다. 슬라이스 입구부분에서의 압력을  $p_o$ 라 하면 다음 관계식이 얻어지며,

$$F_o = k p_o \quad (4)$$

또한, 유체압력  $p_o$ 는 Bernoulli의 법칙<sup>2)</sup>에 근거하여 다음과 같이 나타낼 수 있게 된다.

$$p_o = p_1 + p_2 = p_1 + \rho gh \quad (5)$$

여기에서, 압력  $p_1$  및  $p_2$ 는 각각 공기 및 지료 자체의 압력이다. 헤드박스 내 공기 부피를  $V_1$ 이라 하면 이상기체의 상태방정식 ( $P_1 V_1 = nRT$ )에 근거하여 헤드박스내 기체압력  $p_1$ 을 다음과 같이 표현할 수 있고,

$$p_1 = \frac{MRT}{mA(H-h)} \quad (6)$$

여기에서  $M$ 은 기체의 질량,  $m$ 은 공기의 분자량,  $R$ 은 기체상수,  $T$ 는 절대온도이며  $H$ 는 헤드박스의 전체 높이를 나타낸다. 식(3), (4), (5) 및 (6)은 공정상태함수(state function)인  $h$ ,  $p_o$  및  $p_1$ 에 대한 상태방정식에 해당하며, 식(4), (5), (6)을 식(3)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 총괄-물질수지 모델(over-all material balance)이 얻어지게 된다.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F_i}{A} - \frac{k}{A} \left[ \frac{MRT}{mA(H-h)} + \rho gh \right] \quad (7)$$

다음으로 헤드박스 내 펄프섬유(pulp fibers)에 대한 성분-물질수지(species material balance)에 관한 모델이 요구되는데 지료의 농도를  $C_A$ 로 하고 헤드박스 내에서의 농도변화를 무시하면 다음 식으로 주어진다.

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_i C_{A,i}}{Ah} - \frac{k C_A}{Ah} \left[ \frac{MRT}{mA(H-h)} + \rho gh \right] \quad (8)$$

여기에서  $C_{A,i}$ 는 헤드박스로 유입되는 지료의 농도이다. 또한 종이의 평량(basis weight,  $W_B$ )은 슬라이스 입구에서 와이어에 전달되는 지료의 농도( $C_A$ )에 대한 함수이므로 다음 식이 성립될 수 있다.

$$W_B = \frac{F_0 C_A}{L v_w} \quad (9)$$

여기에서  $L$ 과  $v_w$ 는 각각 지폭과 와이어 주행속도에 해당하며 초지시 일과보류도(one-pass retention)를 편의상 1로 하였다. 따라서 식(9)에 식(4), (5), (6)을 대입하면 다음과 같이 평량에 대한 관계식이 얻어지게 되고,

$$W_B = k \frac{C_A}{L v_w} \left[ \frac{MRT}{mA(H-h)} + \rho gh \right] \quad (10)$$

식(10)에서의 평량  $W_B$ 를 액위  $h$ 에 대한 1차 도함수의 형태를 취하면 다음과 같다.

$$\frac{dW_B}{dh} = k \frac{C_A}{L v_w} \left[ \frac{MRT}{mA} \frac{1}{(H-h)^2} + \rho g \right] \quad (11)$$

식(11)에 있어서 주목할 만한 점은 초지기에서 형성되는 종이의 평량은 와이어의 주행속도가 일정할 때 밀폐형-가압식 헤드박스 내 지료의 높이에 직선적으로 비례하지 않고 비선형 2차함수의 형태로 나타난다는 것이다. 반면에 개방형 헤드박스의 경우에 있어서는  $h$ 에 대한  $W_B$ 의 도함수 형태는 다음과 같이 액위  $h$ 에 의존하지 않는 형태로 나타난다.

$$\frac{dW_B}{dh} = k \frac{\rho g C_A}{L v_w} \quad (12)$$

초지된 종이의 평량이 헤드박스 지료액위에 의존하는 관계를 Fig. 3에 나타내었다. 그림에 나타난 바와 같이 개방형 헤드박스에서의 경우 식(12)에서 예측되는 바와 같이 종이의 평량은 지료의 액위와 직선적인 비례관계를 보여 주고 있으며 초

지속도가 높아짐에 따라 헤드박스 내 액위의 높이도 함께 증가하고 있다. 반면, 밀폐형 가압헤드박스의 경우는 직선적 비례관계로 나타나지 않고(식(11)), 2차함수 형태로 증가되고 있으며 또한 초지속도가 증가함에 따라 평량의 액위에 대한 의존도 역시 증가되고 있음을 알 수 있다. 밀폐식 헤드박스 내 총괄-물질수지식(7)은 시간에 대한 액위의 비선형 1차미분방정식(nonlinear first-order ordinary differential equation)의 형태이다. 성분-물질수지식(8)은 지료농도( $C_A$ )에 대해서는 선형인 반면 액위( $h$ )에도 의존하는 함수이므로 식(7)과 밀접한 관련이 있는 비선형 함수<sup>7,10)</sup>라고 할 수 있으며 또한 식(8)의  $C_A$ 는 식(7)과의 동시해법(simultaneous solution)에 의해서만 풀이가 가능한 형태이다. 따라서 식(7)과 식(8)에 대한 선형화 작업을 하기 위해 기준 액위  $h_0$ 를 중심으로 하여 테일러 급수(Taylor series)<sup>8,10)</sup>를 전개시키면  $h$ 의 함수인  $f(h)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(h) = f(h_0) + \left( \frac{df}{dh} \right)_{h_0} \frac{h-h_0}{1!} + \left( \frac{d^2f}{dh^2} \right)_{h_0} \frac{(h-h_0)^2}{2!} + \dots + \dots \left( \frac{d^n f}{dh^n} \right)_{h_0} \frac{(h-h_0)^n}{n!} + \dots \quad (13)$$

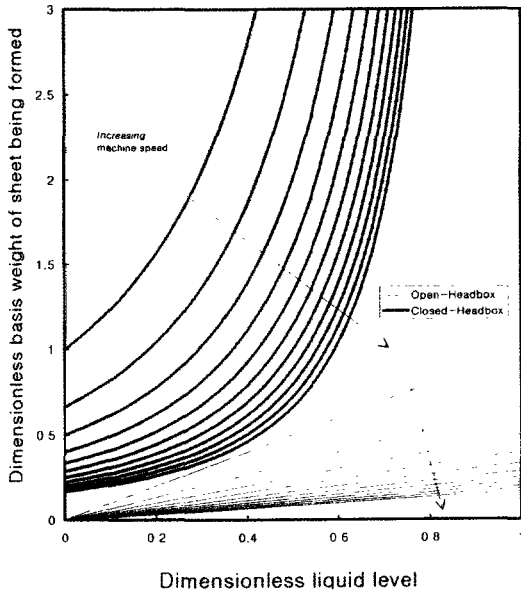
식(13)에서 2차항 이상을 모두 무시하면,  $f(h)$ 에 대한 근사치를 다음과 같이 얻어낼 수 있다.

$$f(h) \approx f(h_0) + \left( \frac{df}{dh} \right)_{h_0} (h-h_0) \quad (14)$$

식(14)의 근사해법에 의해 오차가 발생된다면 그 크기는 식(13)에서의 2차항의 크기(I)와 같게 된다. 즉,

$$I = \left( \frac{d^2f}{dh^2} \right)_{h_0} \frac{(h-h_0)^2}{2!} \quad (15)$$

그러므로, 임의의 값인  $h$ 가 기준액위인  $h_0$ 에 매우 가까울 때 I는 무시할 수 있을 만큼의 작은 값을 갖게 되며 이때 선형근사해법에 관한 식(14)는 만



**Fig. 3. Dependence of sheet basis weight on the headbox liquid level.**

족스러운 결과를 갖게 된다. 비선형 모델인 식(7)을 식(14)와 같은 방법으로 선형화시키기 위해 정류상태에서의 액위를  $h_s$ 라 하고,  $h_s$ 부터 벗어난 량인  $h-h_s$ 를  $h$ 의 편차변수(deviation variable,  $h'$ ),  $F_i-F'_{i,s}$ 를  $F'_i$ 라 정의하면 식(7)은 다음과 같이 편차변수로 구성된 선형모델로서 표현될 수 있다. 즉,

$$\frac{dh'}{dt} = f(h_s, f_{i,s}) + \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_s h' + \left(\frac{\partial f}{\partial F_i}\right)_s F'_i \quad (16)$$

식(16)에서 우변 첫째항은 정류상에서 0이므로, 식(15)를 다시 정리하면 다음과 같이 편차변수의 근사-선형모델(approximated linear model)이 얻어지게 된다.

$$\frac{dh'}{dt} = \left(-\frac{kMRT}{mA^2} \frac{1}{(H-h_s)^2} - \frac{k\rho g}{A}\right)h' + \left(\frac{1}{A}\right)F'_i \quad (17)$$

동일한 방법으로 식(8)에 있어서  $C_A-C_{A,s}$ 를  $C'_A$ ,  $C_{A,i}-C_{A,i,s}$ 를  $C'_{A,i}$ 로 한  $C_A$ 와  $C_{A,i}$  각각의 편차 함수에 대해 선형화시키면 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{dC'_A}{dt} = & \left[ \frac{F_{i,s} C_{A,i,s}}{Ah_s} + \frac{kC_{A,s}}{Ah_s^2} \left\{ \frac{MRT}{mA(H-h_s)^2} \right\} \right] h' \\ & + \left[ -\frac{k}{Ah_s} \left\{ \frac{MRT}{mA(H-h_s)} + \rho gh_s \right\} \right] C'_A \\ & + \left[ -\frac{C_{A,i,s}}{Ah_s} - \frac{kC_{A,s}}{Ah_s} \left\{ \frac{MRT}{mA(H-h_s)} + \rho gh_s \right\} \right] F'_{i'} \\ & + \left[ -\frac{F_{i,s}}{Ah_s} - \frac{kC_{A,s}}{Ah_s} \left\{ \frac{MRT}{mA(H-h_s)} + \rho gh_s \right\} \right] C'_{A,i'} \end{aligned} \quad (18)$$

식(17)은 상태변수(state variable)인 액위 ( $h'$ )가 입력변수(disturbance)  $F'_i$ 만의 함수로 표현될 수 있기 때문에 비교적 간단한 형태이나, 식(18)의 경우는 지료의 농도( $C'_A$ )가 상태변수인  $h'$  및 두 개의 입력변수( $F'_{i'}$ ,  $C'_{A,i'}$ )에 의존하게 되므로 복잡하게 구성되어 있다. 이제 선형화된 식(17)과 식(18)은 각각 라플라스함수로 변환(Laplace transform)될 수 있으며 식(17)의 경우는 다음과 같이 1차계(first-order system)의 형태로서 나타난다.

$$h^*(s) = \left(\frac{K_h}{\tau_h s + 1}\right) F_i^* \quad (19)$$

여기에서  $h^*(s)$ 와  $F_i^*(s)$ 는 각각 편차변수  $h'$  및  $F'_i$ 를 라플라스함수(s)로 변환시킨 형태이며, 시간상수(time constant,  $\tau_h$ )와 정류상 이득(static gain,  $K_h$ )은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\tau_h = \left(\frac{kMRT}{mA^2} \frac{1}{(H-h_s)^2} + \frac{k\rho g}{A}\right)^{-1} \quad (20)$$

$$K_h = \left(\frac{kMRT}{mA(H-h_s)^2} + k\rho g\right)^{-1} \quad (21)$$

시간(t)로 표현된 함수의 라플라스변환( $\mathcal{L}$ )이란 다음 식(22)와 같이 정의되는 함수변환으로서(Kreyszig) 선형화된 수학모델을 라플라스함수인 s로 표현하여 공정동특성 분석을 위한 전달함수(transfer function)의 형태로 바꾸어 주게 된다.<sup>8,9)</sup>

$$\mathcal{L}[f(t)] = f^*(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (22)$$

또한 라플라스함수는 다음 식(23)으로 정의되는 역변환(inverse Laplace transform,  $\mathcal{L}^{-1}$ )<sup>9)</sup>에 의한 원시함수(t)로 바꾸어 줄 수 있다.

$$\mathcal{L}^{-1}[f^*(s)] = f(t) \quad (23)$$

식(18)에 있어서 각 변수에 대해 라플라스 변환을 취하면 다음과 같은 식들이 얻어진다.

$$C_{A,1}^*(s) = \left( \frac{K_{c,1}}{\tau_{c,1}s+1} \right) h_i^*(s) \quad (24)$$

$$C_{A,2}^*(s) = \left( \frac{K_{c,2}}{\tau_{c,2}s+1} \right) F_i^*(s) \quad (25)$$

$$C_{A,3}^*(s) = \left( \frac{K_{c,3}}{\tau_{c,3}s+1} \right) C_{A,i}^*(s) \quad (26)$$

여기에서  $K_{c,1}$ ,  $K_{c,2}$ ,  $K_{c,3}$ 와  $\tau_{c,1}$ ,  $\tau_{c,2}$  및  $\tau_{c,3}$ 는 각각 식 (18)에서의 각 변수에 해당하는 이득과 시간상수를 나타낸다.

### 3.3 동적 응답(Dynamic response)

#### 3.3.1 헤드박스 액위에 대한 응답

식(17)에서 상태변수(state variable)인 액위가 입력변수(input variable)인 지료유입량에 의존하는 동특성적 관계를 라플라스함수 영역에서 나타내면 다음 식(27)과 같이 전달함수(transfer function)형태로 표현될 수 있다.<sup>9)</sup>

$$G_h(s) = \frac{h^*(s)}{F_i^*(s)} = \frac{K_h}{\tau_h s+1} \quad (27)$$

초지공정의 평량교체는 헤드박스 입력변수인 지료 유입량인  $F_i(t)$ 를 단위계단함수(unit step function)로서 변화시키는 것에 해당하며 이러한 경우 식(27)에  $F_i^*(s)=1/s$ 를 대입한 형태이고 이어서 부분분수(Heaviside expansion)<sup>8)</sup>으로 취하면 다음식과 같이 나타낼 수 있게 된다.

$$h^*(s) = \frac{K_h}{s} - \frac{K_h \tau_h}{\tau_h s+1} \quad (28)$$

식(28)에 대해 라플라스 역변환을 취하고 단위계 단변화량을 헤드박스의 기저단면적 크기인 A라고 한다면 다음 형태의 동적응답이 얻어지게 된다.

$$h(t) = AK_h(1 - e^{-t/\tau_h}) \quad (29)$$

식(29)에서의 변수를 다음과 같이 무차원화시켜 무차원 액위( $h^*$ )와 무차원 시간상수( $t^*$ )를 정의하면 다음과 같다.

$$h^* = \frac{h(t)}{AK_h} \quad (30)$$

$$t^* = \frac{t}{\tau_h} \quad (31)$$

$t^*$ 에 대해  $h^*$ 의 변화를 무차원 좌표를 사용하여 Fig. 4에 나타내었는데 계단변화에 대한 1차계의 응답으로서 밀폐형 가압헤드박스의 액위는 새로운 정류상태를 향해 변화하고 있으며 이때 정류상 이득( $K_h$ )의 크기가 새로운 정류상태의 위치를 결정해 주는 역할을 하게 된다. 정류상 이득이 큰 값일수록 유입유량의 작은 변화에도 민감하게 반응하게 되는 것이며<sup>8)</sup> 식(21)에서 추론할 수 있는 바와 같이 헤드박스 내 지료액위가 낮을수록 공정의 정류상 이득은 큰 값을 갖게 된다. 또한, Fig. 4에서 보여주는 것으로 시간(t)에 대한 액위의 계단변화 응답은 시간상수( $\tau_h$ )가 낮은 값을 갖을수록 응답속도가 빨라짐을 알 수 있다. 따라서 시간상수는 입력변화에 대해 공정이 새로운 정류상태로

변화하는 데 소요되는 시간을 의미하며 식(20)에서 암시하는 바와 같이 헤드박스의 기저면적(A)이 큰 값을 갖을수록 시간상수도 증가하며 입력변화에 대해 액위의 응답이 지연됨을 알 수 있다. 헤드박스 액위의 변화는 계단변화에만 기인될 수 있는 것이 아니고 지료펌프를 포함한 지료공급업체(approach flow system)의 설계형태나 와이어 주행속도의 편차에 의해서도 발생될 수 있게 된다. 지료펌프로부터 헤드박스로 유입되는 지료에 펌프의 진동에너지가 아직 잔존하여 헤드박스 내 액위를 주기적으로 진동시킬 수 있는 경우 사출되는 지료유속은 규칙적인 편차를 보일 수 있으며 따라서 균일성이 낮은 평량의 중이가 얻어질 수 있게 된다. 지료가  $f = \omega/2\pi$ 의 진동수를 갖고 사인함수의 진동특성을 나타내면서 헤드박스로 유입된다면 지료입력변수( $F_i$ )는 다음과 같이 표현될 수 있으며,

$$F_i = A_f \sin(\omega t) \quad (32)$$

여기에서  $A_f$ 는 진폭(oscillation amplitude),  $\omega$ 는 회전진동수(circular frequency)를 각각 나타낸다. 식(32)를 라플라스 변환시킨 뒤 식(27)에 대입하고 부분분수를 취한 뒤 오일러 법칙(Euler's identity)<sup>10)</sup>을 응용하여 해를 구하면 다음 식이 얻어진다.

$$h(t) = A_f K_h \left[ \left( \frac{\tau_h}{\tau_h - 1} \right) \cos \omega t + \sin \omega t + \left( \frac{\omega}{1 + \omega^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau_h}} \right] \quad (33)$$

식(33)을 사용하여 무차원 액위( $h(t)/A_f K_h$ )를 시간에 대해 도시한 그래프를 Fig. 5에 나타내었다. 헤드박스의 사인입력(sinusoidal input)에 대한 동적응답은 증가되거나 감소됨이 없이 지속적인 파동형태로 나타나며 이때 파동의 진폭은 헤드박스의 시간상수가 큰 값일수록 낮아지고 있다. 이는 헤드박스의 기저단면적이 클수록 지료의 파동효과를 완충시킬 수 있다는 것을 의미하고 있다.

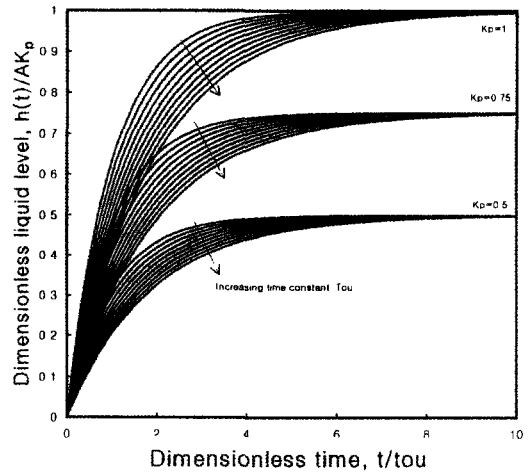


Fig. 4. Dimensionless response of liquid level to step change of input flow rate in a pressurized headbox.

### 3.3.2 사출지료농도에 대한 동적 응답

식(24), (25), (26)에 있어서 사출지료농도( $C_A$ )는 공정변수인  $h$ ,  $F_i$  및  $C_{A,i}$ 에 대한 함수로서 세 개의 변수 중 두 개가 상수인 경우 나머지 변수의 계단변화에 대한 응답은 식(29)와 동일한 1차계 응답으로 나타나며 따라서 Fig. 4에서와 유사한 형태로서 거동하게 될 것으로 예상될 수 있다. 그러나 식(25)에서 주목해야 될 점은 사출지료농도가 유입지료유량( $F_i$ )에 대해 1차계의 거동으로 나타나는 경우는 유입지료농도( $C_{A,i}$ )와 액위( $h$ )가 반드시 상수일 때인데 식(27)에서 나타난 바와 같이 액위는  $F_i$ 의 변화에 대해 항상 상수로 존재할 수가 없는 것이다. 또한, 식(8)이 의미하고 있는 바와 같이 사출지료농도( $C_A$ )는 유입지료농도( $C_{A,i}$ )에 대하여 선형의 관계가 존재하지만 액위( $h$ )에 대해서는 비선형의 관계이며 특히 식(7)의 응답에 의존하고 있으므로 두 식(7)과 (8)은 연계(coupled equation)된 것이다. 그러므로 식(25)에서 표현된 그대로 사출지료의 농도 혹은 초지 평량이 반드시 1차계의 동특성을 보일 것이라고는 할 수 없게 된다. 이제 식(24)를 전달함수의 형태로 표현하면 다음과 같고, 전달함수로 표

$$G_c(s) = \frac{C_A^*(s)}{h^*(s)} = \frac{K_{c,1}}{\tau_{c,1}s + 1} \quad (34)$$



현된 식(27)과 식(34)의 곱의 형태를 취하여 공정전달함수( $G_p(s)$ )를 나타내면 유입지료유량에 대한 사출지료농도의 의존성이 구체적으로 표현된다.

$$G_p(s) = G_c(s)G_h(s) = \left( \frac{C_A^*(s)}{h^*(s)} \right) \left( \frac{h^*(s)}{F_i^*(s)} \right) \quad (35)$$

$$G_p(s) = \frac{C_A^*(s)}{F_i^*(s)} = \frac{K_p}{\tau_p^2 s^2 + 2 \zeta \tau_p s + 1} \quad (36)$$

여기에서  $K_p$ 는 공정이득(process gain),  $\tau_p$ 는 공정시간상수(process time constant)이며  $\zeta$ 는 2차계에서의 완충인자(damping factor)로 불리는 값이다.<sup>8)</sup> 이제 식(36)에 있어서  $\zeta > 1$ 인 경우 과잉응답이며 라플라스 역변환에 의하여 얻어지는 해석학적 해는 다음과 같다.

$$W_B(t) = K_p \left[ 1 - e^{-\zeta t / \tau_p} \left( \cosh \sqrt{\zeta^2 - 1} \frac{t}{\tau} + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh \sqrt{\zeta^2 - 1} \frac{t}{\tau} \right) \right] \quad (37)$$

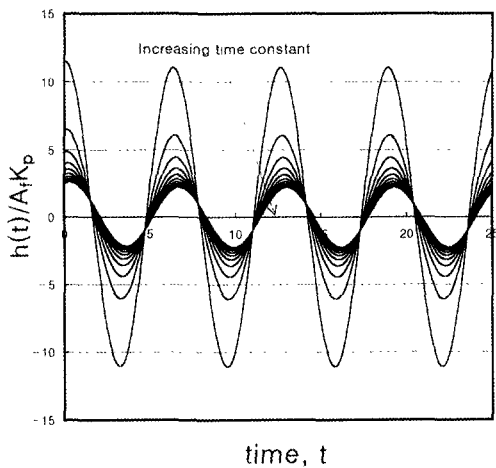


Fig. 5. Dimensionless response of liquid level to sinusoidal input change of flow rate in a pressurized air-cushion headbox.

여기에서  $W_B(t)$ 는 식(9)에 근거하여 지료사출농도( $C_A$ )를 초지되는 종이평량( $W_B$ )으로 표현한 것이다. 또한  $\zeta = 1$ 인 경우 임계응답으로서 다음 형태의 해가 얻어질 수 있고,

$$W_B(t) = K_p \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau_p} \right) e^{-t/\tau_p} \right] \quad (38)$$

$\zeta < 1$ 인 경우 부족응답이며 얻어지는 해는 다음과 같다.

$$W_B(t) = K_p \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta t / \tau_p} \sin \left\{ \frac{\sqrt{1 - \zeta^2} t}{\tau_p} + \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \right\} \right] \quad (39)$$

Fig. 6은 식(37), (38) 및 (39)에 의해 유입지료 유량변화에 대한 초지평량의 동특성적 응답형태를 나타낸 그래프이다. 초지평량은 밀폐형 헤드박스의 유입유량변화에 의해서 뿐 아니라 액위에 의한 간섭효과도 존재하기 때문에 2차계의 동특성적 응답을 보이고 있다. 이러한 2차계에서의 동적응답특성은 식(36)에서 사용된 완충인자( $\zeta$ )에 의해 결정된다고 볼 수 있는데  $\zeta$ 가 1보다 작은 값일

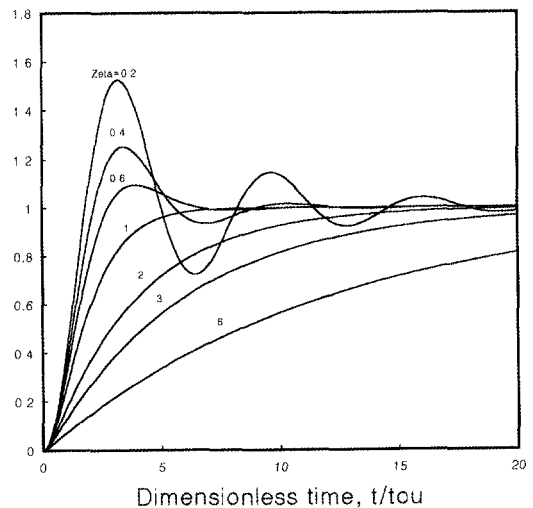


Fig. 6. Dimensionless response of sheet basis weight to step change of input flow rate in an pressurized headbox.

수축 변화에 대한 초기응답속도가 빨라지는 진동의 특성을 보여 주고 있다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 2차계 진동은 그 진폭이 완충인자가 작을수록 크게 나타나며 시간에 따라 점차 감쇄되고 있다. 또한,  $\zeta$ 가 1보다 큰 값인 경우(과잉응답) 동적응답이 부족응답에 비해 매우 느리지만 이때는 진동의 특성이 나타나지 않는다. 반면,  $\zeta$ 가 1인 경우(임계응답)는 1차계의 동특성과 유사한 형태로 응답하고 있음을 알 수 있다. 식(17)과 식(18)의 라플라스 변환식에 대한 곱의 형태로부터  $\tau_p^*$  값과  $2\zeta \tau_p$ 를 얻어낼 수 있으며 이들의 관계로부터 밀폐식 헤드박스에 대한 공정완충인자( $\zeta$ )의 수학적 구조를 다음과 같이 나타낼 수 있게 된다.

$$\zeta = \frac{(H/A^2)p_1}{2(H-h_s) \left[ \left( \frac{h_s}{H-h_s} p_1 + p_2 \right) (p_1 + p_2) \right]^{1/2}} \quad (40)$$

여기에서 헤드박스 내 지료의 평균높이가 전체 헤드박스 높이의 절반으로 유지된다고 가정하면 식(40)은 다음과 같이 단순화될 수 있다.

$$\zeta = \frac{p_1}{p_1 + p_2} \frac{H}{A^2} = (\text{Pressure Factor})(\text{Shape Factor}) \quad (41)$$

따라서, 완충인자( $\zeta$ )는 헤드박스 전체 압력(슬라이스 사출압력)에 대한 압축공기의 압력의 비율인 압력인자(pressure factor)이기도 하며 헤드박스 구조인자(shape factor)로 할 수 있는 높이 대 기저면적의 비율로서 해석할 수가 있다. 초지가 진행되고 있는 동안 압축공기의 압력( $p_1$ )이 슬라이스 사출압력( $p_1 + p_2$ )과 같거나 큰 값을 갖는다는 것은 물리적으로 불가능하다. 그러므로 압력인자는 항상 1보다 작은 값이며 구조인자가 10 이상일 수 있도록 헤드박스가 설계되지는 않기 때문에 밀폐식 헤드박스의 동적 거동은 유입지료의 변화에 대해 언제나 감쇄-진동의 동특성을 나타낸다고 할 수가 있겠다.

3.3.3. 압력계측에서의 동특성

초지에서 요구되는 체트/와이어-비를 유지시키기 위해 밀폐식 헤드박스의 경우 슬라이스 기저부분의 유체압력을 측정하여 그때의 전기적 신호로서 사출속도를 추정하고 그에 따라 헤드박스 내로 공기를 공급하거나 외부로 배출시킴으로써 슬라이스의 사출량을 조절하게 된다.<sup>5)</sup> 결국 헤드박스 기저의 유체압력은 수두(head) 또는 계측장치(pressure transducer) 내 다이어프램(sensing diaphragm)의 평형위치에 따라 결정되게 된다. 압력계측기에서 나타나게 되는 압력( $p_m$ )은 실제 유체압력( $p_0$ )에 대한 1차응답으로 간주할 수 있으므로 이를 라플라스함수의 형태로 나타내면 다음 식(42)로 표현할 수 있고,

$$\frac{p_m^*(s)}{p_0^*(s)} = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} \quad (42)$$

여기에서,  $K_m$ 과  $\tau_m$ 은 각각 압력계측기의 정류상이득과 시간상수를 나타낸다. 또한 식(6)을 식(5)에 대입하고 라플라스변환을 시키면 다음과 같이 전달함수가 얻어진다.

$$\frac{p_0^*(s)}{h^*(s)} = \frac{kMRT}{mA} \frac{1}{(H-h_s)^2} \frac{k\rho g}{A} = K_0 \quad (43)$$

따라서, 식(27)과 (42)의 곱의 형태(식(44))는 헤드박스 유입입력에 대해 나타나는 슬라이스 유체압력이며,

$$\left( \frac{h^*(s)}{F_i^*(s)} \right) \left( \frac{p_0^*(s)}{h^*(s)} \right) = \frac{p_0^*(s)}{F_i^*(s)} = \frac{K_0}{(\tau_0 s + 1)} \quad (44)$$

식(44)의 입력  $F_i^*(s)$ 에 대해 헤드박스 기저면적 A만큼의 계단변화가 가해졌을 때 얻어지는 해석학적 응답은 다음과 같다.

$$P_0(t) = AK_0(1 - e^{-t/\tau_0}) \quad (45)$$

또한, 식(27), (42) 및 (43)의 곱의 형태는 헤드박스 입력변수에 대해 압력계측기에서 감지되어

신호화되는 전달함수가 된다. 즉,

$$\left(\frac{h^*(s)}{F_i^*(s)}\right)\left(\frac{p_0^*(s)}{h^*(s)}\right)\left(\frac{p_m^*(s)}{p_0^*(s)}\right) = \frac{p_m^*(s)}{F_i^*(s)}$$

$$= \frac{K}{(\tau_h s + 1)(\tau_m s + 1)} \quad (46)$$

여기에서  $K = K_p K_m K_0$  이다. 식(46)의 입력항,  $F_i^*$  에 A만큼의 계단함수변화를 주고 앞에서 언급된 부분분수와 라플라스 역변환 처리를 하면 다음과 같은 해석학적 응답이 얻어진다.

$$p_m(t) = AK \left[ 1 + \frac{1}{\tau_m - \tau_p} \left( \tau_p e^{-\frac{t}{\tau_p}} - \tau_m e^{-\frac{t}{\tau_m}} \right) \right] \quad (47)$$

Fig. 7은 식(45)와 식(47)을 사용하여 무차원 압력( $p/AK$ )을 무차원 시간 ( $t/\tau$ )에 대해 도시한 그래프로서 실제 유체 압력변화에 비해 계측신호는 느리게 응답하고 있으며 응답곡선의 형태에 있어서도 커다란 차이가 있음을 알 수 있다. 특히 초기 응답이 매우 느리게 나타나며 지연시간 (dead time)이 유발될 수 있고 이로 인해 전체 제어회로체계 내에서는 물론 제트/와이어-비의 제어에 대해 적지 않은 오차를 발생시킬 수 있게 되

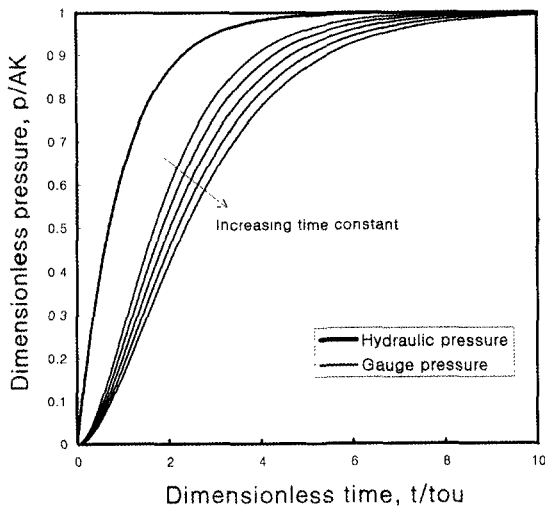


Fig. 7. Dynamic responses of slice jet true pressure and gauge output for a step input forcing of flow rate in a pressurized air-cushion headbox.

는 것이다.

## 4. 결론

초지기 가압식 헤드박스 내 유체거동에 대한 이론적 모델을 설계하여 지료액위, 평량 및 압력에 대한 동적특성을 분석하였고 그 결과를 요약하면 다음과 같다

1. 종이 평량의 가압-헤드박스 액위 의존성은 비선형이다.
2. 지료유입량의 계단변화에 대해 액위는 1차계의 거동을 보였으며 진동함수변화에 대해서는 시간상수의 크기에 의존하여 완충효과가 변한다.
3. 사출지료의 농도(평량)에 있어서는 액위의 간섭효과가 존재하며 따라서 2차계의 거동을 보여 주었다.
4. 헤드박스 지료유입량의 변화에 의해 초지평량은 감쇄진동응답의 동특성을 나타내고 이때의 완충인자는 공기압력과 슬라이스 압력에 대한 함수관계를 갖는다.
5. 헤드박스 지료유입량의 순간변화시 기저부에서 계측되는 압력은 슬라이스의 이론적 사출압력 변화에 비해 느린 동적 응답을 보이며 이때의 편차는 정류상에 도달할 때까지 지연시간을 초래한다.

## 인용 문헌

1. Macdonald, R. G., and Frankin, J. N., Pulp and Paper Manufacture, 2nd Ed., pp. 245-277 (1970).
2. Smook, G. A., Handbook for Pulp & Paper Technologists, 2nd Ed., pp. 228-238, Angus Wilde Publications (1992).
3. Sabersky, R. H., Acosta, A. J., and Hauptmann, E. G., Fluid Flow, 3rd Ed., pp. 85-87, Macmillan Publishing Company (1989).
4. Kerekes, R. J., and Koller, E. B., Tappi 64(1): 95 (1981).
5. Thorp, B. A., and Kocurek, M. J., Pulp and Paper Manufacture, Paper Machine Operations, 3rd Ed., Vol. 7, pp. 117-139,

- TAPPI Press (1991).
6. Johnson, R. K., 1989 Wet End Operations Seminar, pp. 331-342, TAPPI Press.
  7. Stephanopoulos, G., Chemical Process Control; An Introduction to Theory and Practice, pp. 111-158, Prentice-Hall (1984).
  8. Mizrahi, A., and, Sullivan, M., Calculus and Analytic Geometry, 2nd Ed., pp. 628-631 Wadsworth Publishing Company (1986).
  9. Kuo, B. C., Automatic Control Systems, 6th Ed., pp. 22-35, Prentice Hall (1991).
  10. Zill, D. G., Differential Equations with Boundary-Value Problems, 2nd Ed., pp. 158-165, PW-KENT Publishing Company (1989).