

상태궤환이득을 이용한 강건한 퍼지 제어기의 설계

Design of The Robust Fuzzy Controller Using State Feedback Gain

최승규 · 홍대승 · 유창완 · 임학영

Seung-Gyu Choi, Dae-Seung Hong, Chang-Wan Ryu and Wha-Yeong Yim

광운대학교 제어계측공학과

ABSTRACT

Fuzzy Systems which are based on membership functions and rules, can control nonlinear, uncertain, complex systems well. However, Fuzzy logic controller(FLC) has problems; It is difficult to design the stable FLC and FLC depends mainly on individual experience. Although FLC can be designed using the error back-propagation algorithm, it takes long time to converge into global, optimal parameters. Well-developed linear system theory should not be replaced by FLC, but instead, it should be suitably used with FLC. A new methodology is introduced for designing THEN-PART membership functions of FLC based on its well-tuned state feedback controller. A example of inverted pendulum is given for demonstration of the robustness of proposed methodology.

1. 서 론

퍼지 제어시스템은 소속함수와 규칙을 기반으로 비선형성이 강하고 불확실하며 복잡한 시스템을 비교적 쉽게 제어 할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그림 1은 퍼지제어시스템을 개략적으로 나타낸 블록도이다. 퍼지 제어기는 실제 변수들의 값을 0에서 1사이의 함수값으로 변환하는 Fuzzifier, 퍼지 규칙들이 존재하는 Fuzzy Rule Base, 퍼지 집합의 사상(mapping)을 관장하는 Fuzzy Inference Engine, 0에서 1사이의 함수값을 실제 값의 변수들(real valued variable)로 변환하는 Defuzzifier로 구성되어 있다[1,8].

서두에서 언급한 바와 같이 퍼지 제어시스템은 여러 가지 장점이 있는 반면, 퍼지 제어기 설계시 다음과 같은 문제점들이 있다.

첫째, 개인적인 경험에 의존하므로 성능상에 문제점의 우려가 있고[4], 둘째, 선형시스템이론의 제어기 설계기법과 같은 설계상의 명백한 이론적 배경이 없으므로 전체 시스템을 안정화시키는 다수의 파라미터를 설정하기 어려우며[4], 역전파 알고리즘(Back-propagation Algorithm)을 적용하더라도 전역적인 최적의 파라미터로의 수렴에는 장시간이 걸리는 단점을 가지고 있다. 그러므로 비교적 정확하며 손쉽게 안정한 퍼지 제어기를 설계할 수 있는 방법이 요구된다.

퍼지 제어기의 설계나 안정도 판단 기준들의 연구가 계속되어져 왔다[1,2,4-7]. 특히, 이들 연구에서 퍼지 제어기설계의 용이함을 위하여 잘 조정된 선형의 대응부(counterpart)를 기초로 퍼지 제어시스템을 설계하고, 퍼지 제어기의 파라미터를 조정하는 방법이 제시[4,6]되기도 하며, 선형 제어기의 불안정 조건으로부터 퍼지 제어기의 강건성 지표를 설정[5]하기도 한다. 이처럼 퍼지 제어기 설계시 선형의 시스템이론이 반드시 필요한 것은 아니지만 적절히 적용될 수는 있다[4]. 본 논문에서는 앞에서 제시한 퍼지제어기 설계상의 문제점들을 해소할 수 있는 새로운 방법을 제시하고자 한다. 선형의 대응부를 안정하게 하는 상태궤환 이득(state feedback gain)을 구한 후 이 상태궤환 이득을 이용하여 각각의 규칙에 합당한 결론부 파라미터를 설정하는데 이용하여 성능이 우수하고 안정한 퍼지 제어기를 설계하였다.

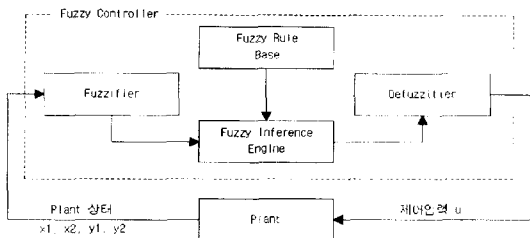


그림 1. 퍼지 제어시스템의 블록도

2. 본 론

퍼지 제어기의 규칙의 결론부 파라미터는 퍼지 제어를 구성하는 여러 개의 요소 중 가장 중요한 파라미터이다. 이러한 결론부 파라미터를 기존에는 전문가의 직관이나 경험 또는 임의로 파라미터를 정한 후 역전과 알고리즘을 이용하여 오차를 줄이는 방향으로 변화시키는 방법을 통하여 결정하였다. 그러나, 본 논문에서는 상태궤환 이득을 이용하여 규칙의 결론부 파라미터를 정하는 새로운 방법을 제시하고자 한다.

퍼지 제어기를 설계하는데 있어서 제어대상의 수학적 모델이 꼭 필요한 것은 아니지만 성능기준을 보충하기 위해서라도 개략적인 모델링은 필요하다[1][8]. 모델링 식이 도출되면, 그것의 선형 시스템의 플랜트 파라미터 A, B, C 값을 알아낼 수 있고, 이러한 파라미터로부터 시스템을 안정하게 하는 상태궤환 제어기의 이득행렬 K 를 구할 수 있다. 이러한 선형의 대응부를 안정하게 하는 상태궤환 이득 행렬로부터 퍼지 제어기의 결론부 파라미터를 결정하는 새로운 방법을 제안한다. 본 논문에서 제안하는 퍼지 제어기 설계 절차상 필요한 상태궤환이득 행렬과 상태궤환 제어기에 대하여 언급한다.

2.1 상태궤환이득과 상태궤환 제어기

다음의 식(1)은 선형시불변 시스템의 동적 식이다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, 여기서 x 는 $n \times 1$ 상태벡터, u 는 스칼라 제어입력, y 는 스칼라 출력, A 는 $n \times n$ 실 상수 열 벡터, C 는 $1 \times n$ 실 상수 행 벡터이다. 그림 2와 같이 상태궤환에서 모든 상태변수는 이득에 의해 곱해지고, 입력측으로 궤환된다. i 번째 상태변수 x_i 와 입력과의 이득을 k_i 라고 하면 K 는 다음과 같이 정의된다.

$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ \dots \ k_n] \quad (2)$$

위의 식(1)의 시스템이 제어가능하고, 고유값의 집합이 $\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \dots, \bar{\lambda}_n\}$ 이라면 행렬 $(A-BK)$ 의 고유

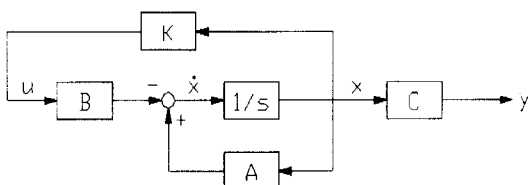


그림 2. 상태궤환 시스템

값의 집합으로서 $\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \dots, \bar{\lambda}_n\}$ 을 갖게 하는 실수 벡터 $K(1 \times n)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Step 1. } & (s - \bar{\lambda}_1)(s - \bar{\lambda}_2) \dots (s - \bar{\lambda}_n) \\ & = s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Step 2. } & \det(sI - A + BK) \\ & = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n \end{aligned}$$

Step 3. $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1, \bar{\alpha}_2 = \alpha_2, \dots, \bar{\alpha}_n = \alpha_n$ 을 만족하게 하는 K (시스템을 안정하게 하는 K)

이와 같이 시스템 전체를 안정하게 하는 상태궤환 이득 행렬 K 를 구한 후 플랜트의 제어입력 u 는 식(3)과 같다.

$$u = \sum_{i=1}^n k_i x_i \quad (3)$$

여기서, x_i 는 i 번째의 상태 입력변수, k_i 는 각각의 상태입력변수에 해당하는 상태궤환 이득이다.

2.2 상태궤환 이득을 이용한 퍼지 제어기의 설계

식 (3)의 상태궤환이득을 이용한 퍼지제어기 설계시 첫째로 입력에 대한 소속함수를 결정한다. 입력에 대한 소속함수로는 complete, normal, consistent의 조건을 만족하는 삼각함수를 다음의 식(7)과 같은 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 정의하였다. 예로서 간단한 2차계의 퍼지 시스템을 고려한다면 $i=1, 2$ 인 그림 3과 같이 퍼지 집합을 표현할 수 있고, 각각의 상태의 소속정도를 나타내는 입력의 소속함수의 값은 식(4),(5),(6)과 같이 정의할 수 있다[1].

$$\mu_{A_i^1}(x_i) = \mu_{A_i^1}(x_i; e_i^1, e_i^1, e_i^2) \quad (4)$$

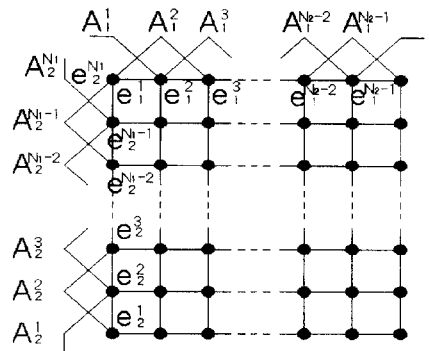


그림 3. 간단한 2차계의 입력공간

$$\mu_{A_i^j}(x_i) = \mu_{A_i^j}(x_i; e_i^{j-1}, e_i^j, e_i^{j+1}) \quad (5)$$

여기서, $j = 2, 3, \dots, N_i - 1$

$$\mu_{A_i^{N_i}}(x_i) = \mu_{A_i^{N_i}}(x_i; e_i^{N_i-1}, e_i^{N_i}, e_i^{N_i}) \quad (6)$$

위의 식(4)-(6)에서 e_i^j 는 각각의 입력에 대한 소속 함수들의 중심값이며, 다음의 조건을 만족한다.

$$\alpha_i = e_i^1 < e_i^2 < \dots < e_i^{N_i} = \beta_i \quad (7)$$

예를 들어 그림 3과 같은 간단한 2차계의 입력공간에서 정의되는 입력의 소속함수에 대한 $M(M=N_1 \times N_2)$ 개에 해당하는 퍼지규칙은 식(8)의 구조를 갖는다.

$$R_{i_1 i_2}^{i_1 i_2}: \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^{i_1} \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^{i_2} \text{ THEN } y \text{ is } B^{i_1 i_2} \quad (8)$$

여기서, $i_1 = 1, 2, \dots, N_1$,

$i_2 = 1, 2, \dots, N_2$,

퍼지집합 $B^{i_1 i_2}$ 를 $\bar{y}^{i_1 i_2}$ 로 나타내면 결론부 파라미터 $\bar{y}^{i_1 i_2}$ 와 조건부 파라미터와의 관계는 일반적으로 식(9)의 함수로 표현할 수 있고, 그림 3과 같은 입력공간을 고려한다면 식(10)과 같다.

$$\bar{y}^{i_1 i_2} = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}, \dots, e_i^{i_1}) \quad (9)$$

$$= g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}) \quad (10)$$

여기서, $e_1^{i_1}, e_2^{i_2}$ 는 각각의 상태입력에 대한 소속 함수의 중심값이고, i 는 상태변수의 종류의 갯수이다.

이와 같이 퍼지 제어기의 규칙의 출력에 대한 소속 함수는 입력에 대한 소속함수의 중심값 $e_1^{i_1}, e_2^{i_2}$ 를 변수로 갖는 g 의 함수로서 표현된다.

기존의 퍼지제어 설계기법에서는 시스템 전문가적 견지에서 $\bar{y}^{i_1 i_2}$ 를 결정하였고, 학습의 과정을 통하여 입력의 소속함수의 파라미터와 $\bar{y}^{i_1 i_2}$ 값에 의한 오차를 줄이는 방향으로 변경하게 한다. 그러나, 서론에서 언급한 것과 같이 기존의 퍼지제어기 설계방법은 여러 가지 문제점을 가지고 있다.

본 논문에서는 이와 같은 문제점들을 해소할 수 있는 방법을 제시하였다. 즉, 2.1절의 시스템을 안정하게 하는 상태회환 행렬의 이득 k_i 를 구한 후 이를 이용하여 결론부에 해당하는 $M(M=N_1 \times N_2)$ 개의 파라미터 $\bar{y}^{i_1 i_2}$ 를 다음과 같은 방법으로 결정할 수 있다. 예로 그림 3의 간단한 2차계의 입력공간을 고려한다면 그림의 검은점의 개수는 규칙의 개수와 동일하고 그 검은 점에서의 높이에 해당하는 규칙의 결론부 파라

미터는 식 (11)과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{y}^{i_1 i_2} &= g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2}) \\ &= K[e_1^{i_1} \ e_2^{i_2}]^T = k_1 e_1^{i_1} + k_2 e_2^{i_2} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, k_i 는 i 번째 상태변수와 곱해지는 상태회환 이득이다.

이상에서 정한 입력에 대한 소속함수, 출력에 대한 소속함수, 규칙들을 기반으로 singleton fuzzifier, product inference engine, center average defuzzifier를 이용하여 최종적인 퍼지 제어기의 출력을 구하면 식 (12)와 같다.

$$f(x) = \frac{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \bar{y}^{i_1 i_2} (\mu_{A_1}^{i_1}(x_1) \mu_{A_2}^{i_2}(x_2))}{\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} (\mu_{A_1}^{i_1}(x_1) \mu_{A_2}^{i_2}(x_2))} \quad (12)$$

본 논문에서 제안한 퍼지 제어기의 설계방법은 다음과 같은 효과를 기대할 수 있다.

첫째, 퍼지제어기가 상태회환 제어기의 특징을 가지고 있다. 상태회환 제어기는 각각의 상태변수와 그 상태 변수에 해당하는 상태회환 이득의 곱의 합으로 제어입력이 출력($u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4$)되므로 이러한 상태회환 이득을 이용한 퍼지 제어기도 역시 각각의 상태입력이 서로 독립적으로 구성된 제어기로 분리시킬 수 있다. 예로 도립진자의 경우 각도, 각속도, 거리, 속도의 네 가지 상태가 입력되는 하나의 퍼지 제어기가 아닌 각도, 각속도의 상태가 입력되는 각도에 대한 제어기와 거리, 속도의 상태가 입력되는 거리에 대한 제어기로 분리한 후 두 개의 제어기로부터 출력되는 두 개의 제어입력의 합으로 도립진자 플랜트에 가해지는 제어입력을 정할 수 있다. 그 결과, 여러 개의 상태입력 변수가 서로 연관(coupling)되어 있는 플랜트도 상태변수를 분리하여 제어하는 것과 같은 효과가 나타난다. 도립진자의 플랜트에서 4차의 상태입력을 받는 하나의 퍼지 제어기가 아닌 2차의 상태입력을 받는 두 개의 퍼지 제어기로 구성하므로 제어기의 상태입력 차수를 줄일 수 있다. 그러므로, 저차에서 해석이 쉬운 상태공간적 접근방법(state space approach)[2]을 본 논문에서 제안한 퍼지 제어기의 설계방법에 적용함으로써 더욱 강건한 시스템을 구성할 수 있다.

둘째, 규칙의 수가 크게 감소된다. 예를 들어서 플랜트가 도립진자인 경우, 4가지 상태입력에 대한 소속 함수가 각각 N 개라고 가정할 때, 만약, 본 논문에서

제안한 퍼지 제어기 설계방법을 이용하여 각도에 관한 퍼지 제어기와 위치에 대한 퍼지 제어기로 나누어 설계하면 하나의 제어기로 구성할 때 보다 $N^2(N^2 - 2)$ 만큼의 규칙의 수가 감소되는 효과가 있다, 그러므로 다수의 규칙으로 구성된 하나의 퍼지 제어기보다 규칙의 수가 적은 성능이 좋은 제어기를 설계할 수 있다.

셋째, 전문가 또는 조작자의 직관이나 경험, 또는 역전과 알고리즘에 의존하지 않고, 명확한 이론적 배경에 의하여 퍼지 시스템에서 가장 중요한 결론부 파라미터를 결정할 수 있다.

따라서, 설계하려는 퍼지 제어기의 대응부인 선형제어기를 안정하게 하는 상태궤환 이득만 구하면 쉽게 결론부 파라미터를 구할 수 있으므로 단시간에 비교적 성능이 보증된 안정한 퍼지 제어기를 쉽게 설계할 수 있다는 장점이 있다.

2.3 도립 진자에의 적용

본 논문에서 제안하는 퍼지 제어기 설계방법을 검증하고자 제어기의 성능판단에 가장 많이 이용되는 비선형 플랜트인 도립진자를 적용하였다.

그림 4에서 x_1 은 진자의 각도, x_2 는 진자의 각속도, y_1 는 cart의 기준으로부터의 위치, y_2 는 cart의 속도를 나타내는 상태변수이다.

그림 4와 같은 도립진자 시스템의 모델링 수식은 다음과 같은 상태 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \frac{m l x_2^2 \sin x_1 \cos x_1}{m_c + m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} - \frac{\frac{\cos x_1}{m_c + m}}{l \left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} \cdot u \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{y}_1 = y_2$$

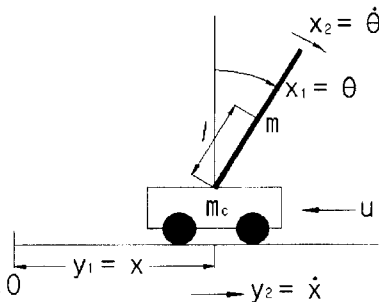


그림 4. 도립진자 시스템

$$\dot{y}_2 = \frac{m l x_2^2 \sin x_1 - m \dot{x}_2 \cos x_1}{m_c + m} + \frac{1}{m_c + m} \cdot u$$

본 논문에서 제안하는 상태궤환 이득을 이용한 퍼지 제어기 설계 방법은 선형의 시스템을 안정하게 하는 상태궤환 이득을 구해야 하므로 먼저 시스템이 임의의 안정한 극점을 갖게 하는 상태궤환 이득을 구한다.

위의 상태방정식을 리아프노프 선형화[3]를 거친 후 상태 방정식을 행렬로 표현하면 식(14)와 같다[12].

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{l} - \frac{am}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{amg}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} - \frac{am}{m_c + m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{l} \\ 0 \\ -\frac{a^2 m}{l} \\ \frac{4}{3} - \frac{am}{m_c + m} \end{bmatrix} u \quad (14)$$

여기서, $a = 1/(m_c + m)$ 이다.

X 및 \dot{X} 은 $X = [x_1 \ x_2 \ y_1 \ y_2]^T$, $\dot{X} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{y}_1 \ \dot{y}_2]^T$ 의 상태벡터이고 u 는 스칼라 제어입력이다. 본 논문의 시뮬레이션과 실험에 사용된 도립진자의 플랜트 파라미터는 표 1과 같다.

식(14)에 표 1의 플랜트 파라미터를 대입 한 후 임의의 안정한 극점인 $-30, -5, -2+2j, -2-2j$ 에 위치시키는데 필요한 상태궤환 이득인 K 를 2.1절에서 제시한 step 1~step 3을 이용하여 구하면 식 (15)와 같다.

$$\begin{aligned} K &= [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4] \\ &\cong [21.75 \ 3.68 \ 6.83 \ 5.01] \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)에서 구한 각각의 상태입력 변수인 각도, 각속도, 거리, 속도에 대한 상태궤환 이득(k_1, k_2, k_3, k_4)을 이용하여 퍼지 제어기의 결론부 파라미터를 설정한다.

상태궤환 이득 행렬을 이용한 퍼지 제어기를 설계하기 위하여 먼저 네 가지 상태입력에 대한 소속함수를 그림 5와 같이 정의하였다. 진자의 각도, 각속

표 1. 도립진자 플랜트 파라미터

기호	설명	파라미터
γ	중력가속도	9.8 m/s ²
l	Cart와 진자의 Joint로부터 진자의 무게중심간 거리	0.3 m
m_c	Cart의 질량	0.186 kg
m	진자의 질량	0.127 kg

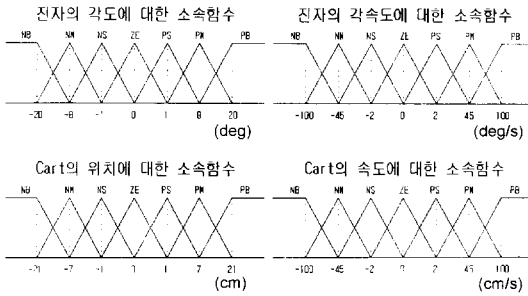


그림 5. 네가지 상태입력에 대한 소속함수

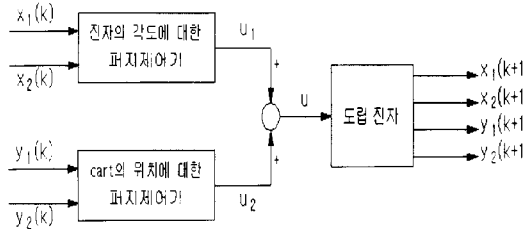


그림 6. 퍼지 제어기의 블럭도

도, cart의 거리, 속도에 대한 소속함수는 모두 complete, normal, consistent한 삼각함수를 각각 7개씩 정하였다.

퍼지 제어기는 네 가지 상태를 입력으로 하는 하나의 제어기가 아닌, 두 가지 상태가 입력인 두 개의 퍼지 제어기로 그림 6과 같이 구성하였다. 상태궤환 제어기 특징의 저차화 효과를 이용하여 네 가지 상태변수(진자의 각도, 각속도, Cart의 거리, 속도)를 입력으로 하는 하나의 퍼지제어기가 아닌, 진자의 각도와 각속도의 상태변수가 입력인 진자의 각도에 대한 퍼지 제어기(이하 각도 퍼지 제어기)와 cart의 위치와 속도의 상태변수가 입력인 cart의 위치에 대한 퍼지 제어기(이하 위치 퍼지 제어기)로 구성되고, 각각의 퍼지 제어기는 49개(7개의 소속함수×7개의 소속함수)의 규칙을 갖도록 설계를 하였다.

본 논문에서 제안한 퍼지 제어기의 결론부 파라미터 설정하는데 필요한 절차로 E_1 을 각도에 대한 소속함수의, E_2 를 각속도에 대한 소속함수의, E_3 를 위치에 대한 소속함수의, E_4 를 속도에 대한 소속함수의 각각의 중심값의 행렬이라 하면 다음의 식(16), (17), (18), (19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$E_1 = [-20 \quad -8 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 8 \quad 20] \times (\pi/180) \quad (16)$$

$$E_2 = [-100 \quad -45 \quad -10 \quad 0 \quad 10 \quad 45 \quad 100] \times (\pi/180) \quad (17)$$

$$E_3 = [-21 \quad -7 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 7 \quad 21] \times (1/100) \quad (18)$$

$$E_4 = [-100 \quad -45 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad 45 \quad 100] \times (1/100) \quad (19)$$

각도 퍼지 제어기의 규칙의 결론부 파라미터의 행렬을 \bar{Y}_X , 위치 퍼지 제어기의 규칙의 결론부 파라미터를 \bar{Y}_Y 라고 하면 \bar{Y}_X, \bar{Y}_Y 는 식(20), (21)과 같이 표현 가능하고,

$$\bar{Y}_X = [y_x^{-11} \quad y_x^{-12} \quad \dots \quad y_x^{-17} \quad y_x^{-21} \quad \dots \quad y_x^{-77}] \quad (20)$$

$$\bar{Y}_Y = [y_y^{-11} \quad y_y^{-12} \quad \dots \quad y_y^{-17} \quad y_y^{-21} \quad \dots \quad y_y^{-77}] \quad (21)$$

각각의 원소들은 다음의 식(22)와 같이 구할 수 있다.

$$y_x^{-ij} = k_1 e_1^i + k_2 e_2^j, \quad y_y^{-ij} = k_3 e_3^i + k_4 e_4^j \quad (22)$$

$(i = 1, 2, \dots, 7, j = 1, 2, \dots, 7)$

여기서, $e_1^i \in E_1, e_2^j \in E_2, e_3^i \in E_3, e_4^j \in E_4$ 이고, k_1, k_2, k_3, k_4 는 식(15)에서 구한 상태궤환이득으로서 다음과 같다.

$$k_1 = 21.75, k_2 = 3.68, k_3 = 6.83, k_4 = 5.01 \quad (23)$$

식(16), (17), (18), (19), (22)로부터 각각의 규칙에해당하는 결론부 파라미터를 구할 수 있다. 그러므로, 각도 퍼지 제어기와 거리 퍼지 제어기의 각각의 규칙을 표 2과 표 3에 표현하였다.

입력에 대한 소속함수, 출력에 대한 소속함수, 규칙

표 2. 각도에 대한 퍼지제어기의 규칙 table

		x_2						
		NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
x_1	NB	-14.0150	-10.4824	-7.7206	-7.5922	-7.4637	-4.7019	-1.1694
	NM	-9.4597	-5.9271	-3.1653	-3.0369	-2.9084	-0.1466	3.3859
	NS	-6.8024	-3.2699	-0.5081	-0.3796	-0.2512	2.5107	6.0432
	ZE	-6.4228	-2.8903	-0.1285	0	0.1285	2.8903	6.4228
	PS	-6.0432	-2.5107	0.2512	0.3796	0.5081	3.2699	6.8024
	PM	-3.3859	0.1466	2.9084	3.0369	3.1653	5.9271	9.4597
	PB	1.1694	4.7019	7.4637	7.5922	7.7206	10.4824	14.0150

표 3. 거리에 대한 퍼지제어기의 규칙 table

$y_1 \backslash y_2$	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
NB	-6.4443	-3.6888	-1.5345	1.4343	-1.3341	0.8202	3.5757
NM	-5.4881	-2.7326	-0.5783	-0.4781	-0.3779	1.7764	4.5319
NS	-5.0783	-2.3228	-0.1685	-0.0683	0.0319	2.1862	4.9417
ZE	-5.0100	-2.2545	-0.1002	0	0.1002	2.2545	5.0100
PS	-4.9417	-2.1862	-0.0319	0.0683	0.1685	2.3228	5.0783
PM	-4.5319	-1.7764	0.3779	0.4781	0.5783	2.7326	5.4881
PB	-3.5757	-0.8202	1.3341	1.4343	1.5345	3.6888	6.4443

을 기반으로 singleton fuzzifier, product inference engine, center average defuzzifier를 이용하여 식(12)와 같이 최종적인 퍼지 제어기의 출력을 정함으로써 퍼지 제어기를 설계할 수 있다.

2.4 퍼지 제어기의 안정성과 강건성

퍼지 제어기는 명백히 비선형 제어기이며 많은 규칙들로 서로 얽혀있는 관계로 인해 선형 제어 이론과는 달리 안정성을 판단하는 명백한 이론이 없으나, Javier Aracil[5]의 연구를 인용하여 본 논문의 2.3절에서 설계한 퍼지 시스템의 안정성 및 강건성을 확인한다.

식 (24)과 같이 표현되는 2차계시스템에서 $\Phi(x)$ 가 퍼지 제어기의 출력이라 할 때

$$\dot{x} = f(x) + b\Phi(x) \tag{24}$$

x_0 에서 선형화 된 시스템의 Jacobian Matrix는

$$J = \frac{\partial(f(x) + b\Phi(x))}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \tag{25}$$

이고, 식 (25)를 이용하여 극점을 구하면 식 (26)의 해와 같다.

$$|sI - J| = s^2 - (j_{11} + j_{22})s + (j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}) = 0 \tag{26}$$

식 (26)으로부터 $|a_{11} + a_{22}|$ 와 $|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$ 의 값이 크면 클수록 안정하고, 강건하다고 말할 수 있다[5].

그러므로, 위의 두 조건으로부터 두 가지의 안정성 및 강건성 지표를 세우면

$$I_1 = |j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}| = |\det(J)| \tag{27}$$

$$I_1' = |j_{11} + j_{22}| = |\text{tr}(J)| \tag{28}$$

과 같다. I_1 과 I_1' 값이 크면 클수록 퍼지 시스템의 안정성의 강건함은 더 크게 된다. 2.3절에서 설계한 독립진자시스템의 각도 퍼지 제어기의 $x_0 = \mathbf{0}(x_1 = 0, x_2 = 0)$ 에서의 Jacobian Matrix를

$$J_{fuzzy} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \text{ 라면,}$$

$$j_{11} = 0, j_{12} = 1$$

$$j_{21} = \frac{-a}{l\left(\frac{4}{3} - am\right)} + \frac{-a}{l\left(\frac{4}{3} - am\right)} \times \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0, x_2=0} \tag{29}$$

$$j_{22} = \frac{-a}{l\left(\frac{4}{3} - am\right)} \times \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0, x_2=0} \tag{30}$$

마찬가지로, 상태궤환 제어기가 포함된 독립진자 시스템의 $x_0 = \mathbf{0}$ 에서의 Jacobian Matrix를 구하면,

$$J_{state} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a(1+k_1) & -ak_2 \\ l\left(\frac{4}{3} - am\right) & l\left(\frac{4}{3} - am\right) \end{bmatrix} \tag{31}$$

이다. 여기서, 상태궤환 제어기는 선형이므로 전 입력 공간에 대하여 $k_1 = 21.75$ 이고, $k_2 = 3.68$ 이다. 따라서, 안정하려면 식 (27)과 (28)에 의해

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0, x_2=0} > 0 \tag{32}$$

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0, x_2=0} > 0 \tag{33}$$

$$k_1 > 0, k_2 > 0 \tag{34}$$

의 조건을 만족하면 더 큰 I_1 및 I_1' 를 갖는다.

또한, $\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0, x_2=0}$ 와 $\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0, x_2=0}$ 가 각각 k_1, k_2 보다 크면 퍼지 제어기는 상태궤환 제어기

보다 static bifurcation 및 Hopf bifurcation[5]의 발생 가능성을 줄여 더 강건한 시스템이라는 것이 입증된다고 할 수 있다. 또한, x_1, x_2 가 0(평형점이 아닌 다른 경우에도 검토해서 식 (35), (36)을 만족하면 상태궤환 제어기보다 퍼지 제어기가 포함된 도립진자 시스템이 더 안정하고, 강건하다. 2.5.1절에서 이것을 검증한다.

$$\left. \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_{10}, x_2=x_{20}} > k_1 \quad (35)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_2} \right|_{x_1=x_{10}, x_2=x_{20}} > k_2 \quad (36)$$

여기서, x_{10}, x_{20} 은 선형화 상태 값이다.

거리에 대한 퍼지 제어기도 위와 같은 방법으로 검증할 수 있다.

2.5 시뮬레이션

2.5.1. 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기의 입출력 공간 비교

2.1~2.3절에서 설계한 퍼지 제어기의 결론부 파라미터는 상태궤환 제어기의 출력을 이용하여 설계한 제어기이다. 식(15), (23)과 같은 상태궤환 이득을 기초로 설계된 상태궤환 제어기와 이를 바탕으로 모사된 퍼지 제어기의 입출력 공간을 비교하여 나타낸 그림이 그림 7, 8이다. 그림 7은 각도와 각속도의 상태입력 공간에 대한 선형의 각도 상태궤환 제어기의 출력 ($u_1 = k_1 x_1 + k_2 x_2$)과 각도 퍼지 제어기의 출력을, 그림 8은 거리와 속도의 상태입력 공간에 대한 선형의 거리 상태궤환 제어기의 출력 ($u_2 = k_3 v_1 + k_4 v_2$)과 퍼지 제어기에 대한 출력을 입체적으로 나타냈다.

그림 7과 그림 8의 각도, 거리에 대한 선형의 상태궤환 제어기는 완벽한 평면을 이루고 있는 반면 각도, 거리에 대한 퍼지 제어기는 모두 곡면을 이루고 있음을 알 수 있다. 그러므로 두 퍼지 제어기 모두 선

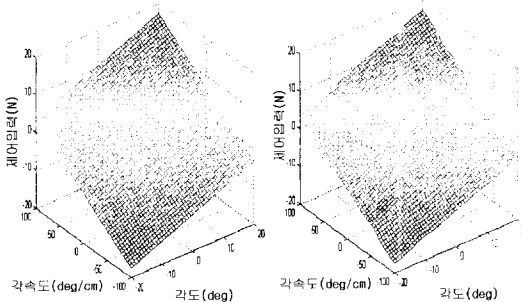


그림 7. 각도, 각속도의 입력공간에 대한 각도 상태궤환 제어기와 각도 퍼지 제어기의 출력

형의 상태궤환 제어기를 기초로 설계되었지만 퍼지 고유의 비선형적인 특성을 유지하고 있음을 알 수 있다.

식(35)와 (36)을 통해 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기의 강건성을 비교하고자 그림 9, 10과 같이 상태입력변수에 대한 두 제어기 출력을 함께 그렸다. 그림 9는 그림 7의 좌, 우 그림을 각속도(x_2)=0 평면의 단

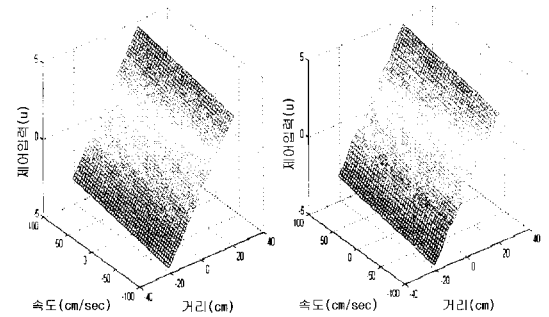


그림 8. 거리, 속도의 입력공간에 대한 거리 상태궤환 제어기와 거리 퍼지 제어기의 출력

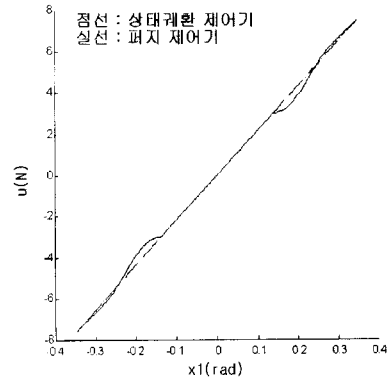


그림 9. 각속도가 0일 때 각도에 따른 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기의 출력 비교

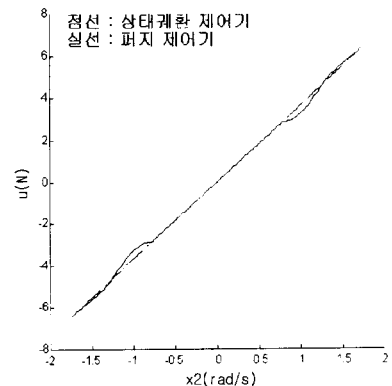


그림 10. 각도가 0일 때 각속도에 따른 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기의 출력 비교

표 4. 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기의 기울기 비교(각도기준)

구간(rad)제어기	-0.28 ~ -0.18	-0.18 ~ -0.14	-0.14 ~ 0.14	0.18 ~ 0.28	0.18 ~ 0.28
상태궤환 제어기	21.75	21.75	21.75	21.75	21.75
퍼지 제어기	28.20	9.54	21.75	9.54	28.20

면을 함께 나타낸 그림이며 그림 10은 각도(x_1)=0 평면에서의 단면이다. 그림 9와 그림 10에서 곡선은 퍼지 제어기의 출력이며, 직선은 상태궤환 제어기의 출력이다. 그림 9의 각도의 구간에 대한 기울기를 표 4와 같이 개략적으로 나타냈다.

표 4에서 보는 바와 같이 -0.28 ~ -0.18(rad)구간과 0.18 ~ 0.28(rad)구간에서 퍼지 제어기의 기울기가 약 6.45정도 더 크게 나타나므로 식 (35), (36)을 만족한다. 따라서, 이 구간에서는 퍼지 제어기가 상태궤환 제어기보다 더 강건하게 나타난다. 다음절에서 전자의 질량과 길이를 1/3로 줄여도 상태궤환 제어기와는 달리 퍼지 제어기가 발산하지 않는 것이 바로 이 구간에서 큰 기울기에 의한 강건성의 증가 때문이다. 본 논문에서 나타내지는 않았지만 cart의 질량을 3.4배 증가시키면, 상태궤환 제어기는 발산하나 퍼지 제어기

에 의한 도립진자의 각도, 각속도 상태공간에서의 궤적은 Limit Cycle[3]이 나타난다. 이러한 현상도 기울기가 큰 구간에서 상태의 발산을 막는 역할에 기인한다고 할 수 있다.

2.5.2. 임의의 초기상태에 대한 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기의 상태궤적의 비교

본 논문에서 제시한 퍼지 제어기를 이용하여 표 5의 두 가지 초기상태에 대하여 시뮬레이션을 시행하였다. 그림 11은 식(15)에서 설계한 상태궤환 제어기와 본 논문에서 제안한 퍼지 제어기를 이용하여 그림

표 5 시뮬레이션의 초기상태

초기상태	각도	각속도	위치	속도
1 (____)	-10(deg)	0(deg/s)	5(cm)	0(cm/s)
2 (.....)	15(deg)	0(deg/s)	-10(cm)	0(cm/s)

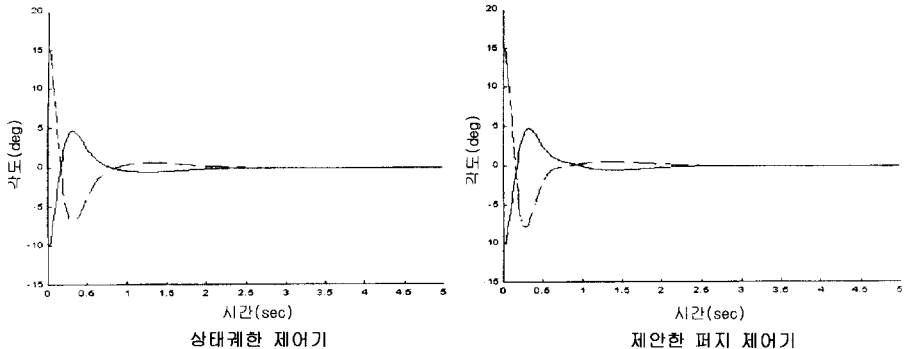


그림 11. 상태궤환 제어기와 제안한 퍼지제어기를 이용한 도립진자 각도 궤적

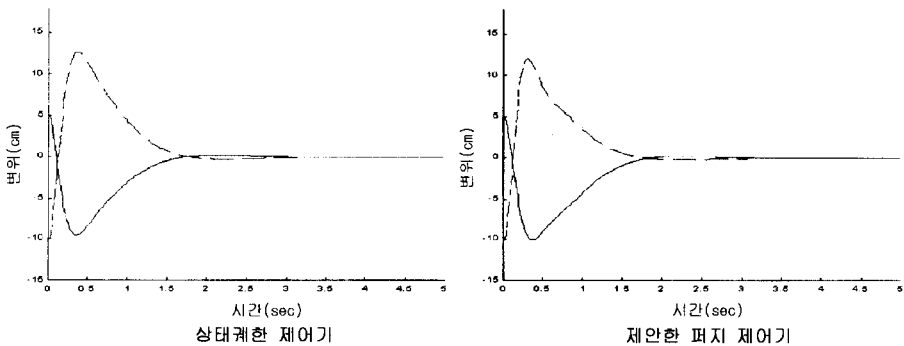


그림 12. 상태궤환 제어기와 제안한 퍼지 제어기를 이용한 cart의 거리 궤적

4의 도립진자를 제어시의 진자의 각도 궤적이다. 좌측의 상태궤환 제어기나 우측의 퍼지 제어기나 0.5초 부근에서 약간의 차이가 있을 뿐 비슷함을 알 수 있다.

그림 12는 cart 거리의 궤적이다. 그림 13은 두 가지 초기상태에 대한 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기의 각도, 각속도 상태공간에서의 궤적이다. 본 논문에서 제안한 퍼지 제어기 설계방법이 선형의 상태궤환 제어기의 궤환 이득을 이용하여 퍼지 제어기의 결론부 파라미터를 결정하였으므로 그림 11과 그림 12는

비슷한 결과를 보이고 있다.

두 제어기의 강건성을 비교, 검증해 보고자 도립진자의 질량(m)과 무게중심간의 거리(l)을 모두 1/3로 줄였을 때 시뮬레이션의 결과가 그림 14, 15이다. 그림 14에서 선형의 상태궤환 제어기에 의한 도립진자의 각도는 발산하지만 본 논문에서 제안한 퍼지 제어기인 경우는 각도는 진동하지만 $\pm 1.3(\text{deg})$ 내로 제어됨을 알 수 있다. 그림 15에서 상태궤환 제어기와는 달리 퍼지 제어기에 의한 cart의 위치는 $\pm 0.5(\text{cm})$ 내

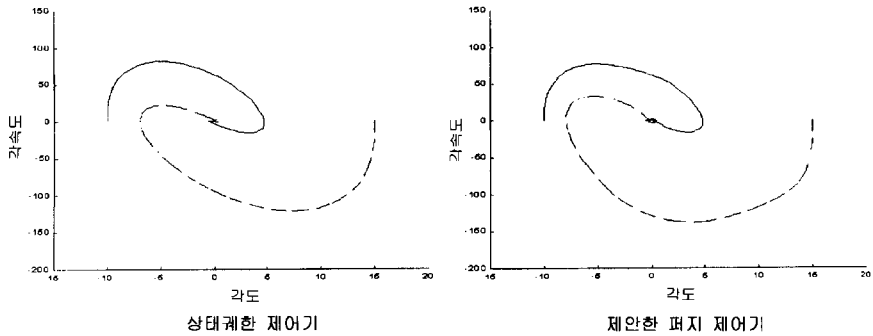


그림 13. 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기의 진자의 각도, 각속도의 상태공간에서의 궤적

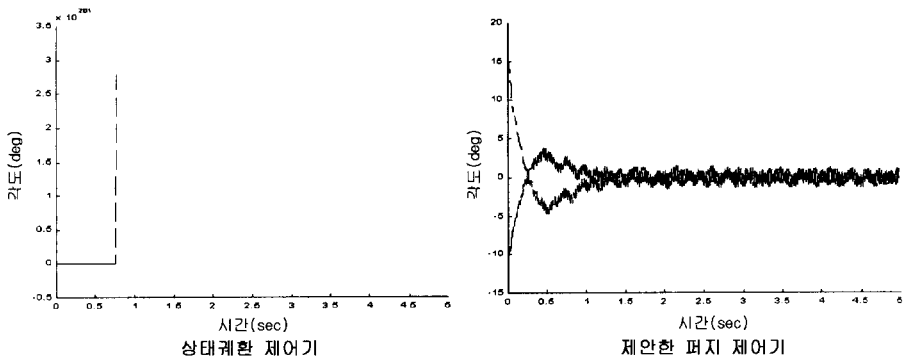


그림 14. 진자의 길이와 질량을 모두 1/3로 줄였을 때 퍼지 제어기와 상태궤환 제어기에 의한 진자의 각도

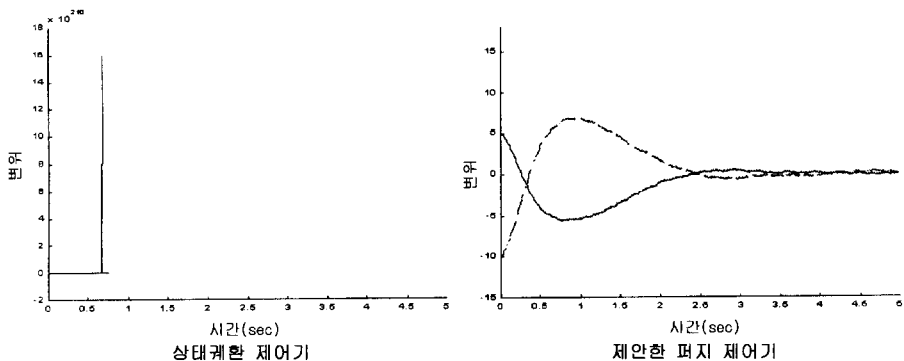


그림 15. 진자의 길이와 질량을 모두 1/3로 줄였을 때 퍼지 제어기와 상태궤환 제어기의 cart의 거리

로 제어됨을 알 수 있다. 그림 14, 15의 시뮬레이션 결과로부터 본 논문에서 제안한 상태궤환 이득을 이용한 퍼지 제어가 선형의 대응부인 상태궤환 제어기의 궤환 이득을 이용하여 설계되었지만, 더욱 강건함을 확인할 수 있다.

2.6 실험결과

실제 제작한 도립진자 플랜트를 가지고 본 논문에서 제안한 제어기를 설계하여 실험하였다. 표 6, 표 8과 같은 초기상태 1, 3에 대해서 선형의 상태궤환 제어기를 적용해 보았고, 표 7, 표 9과 같은 초기상태 2, 4에 대하여 제안한 퍼지 제어기를 적용하였다. 초기상태 1, 2는 음의 각도, 음의 위치에 대한 초기상태이고, 초기상태 2, 4는 음의 각도, 양의 위치의 초기상태이다.

그림 16는 초기상태 1, 2에 대한 상태궤환 제어기 및 퍼지 제어기를 도립진자에 적용하여 시간에 따른

표 6. 초기상태 1 (상태궤환 제어기)

각도	각속도	위치	속도
-2.61(deg)	0(deg/sec)	-9.60(cm)	0(cm/s)

표 7. 초기상태 2 (퍼지 제어기)

각도	각속도	위치	속도
-4.50(deg)	0(deg/sec)	-9.56(cm)	0(cm/s)

표 8. 초기상태 3 (상태궤환 제어기)

각도	각속도	위치	속도
-3.87(deg)	0(deg/sec)	9.93(cm)	0(cm/s)

표 9. 초기상태 4 (퍼지 제어기)

각도	각속도	위치	속도
-4.68(deg)	0(deg/sec)	9.44(cm)	0(cm/s)

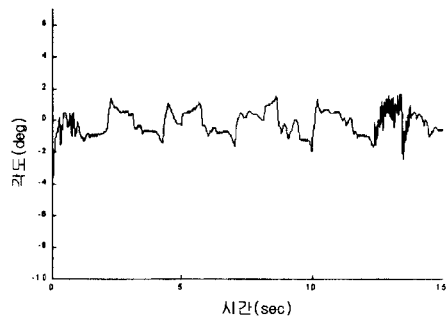
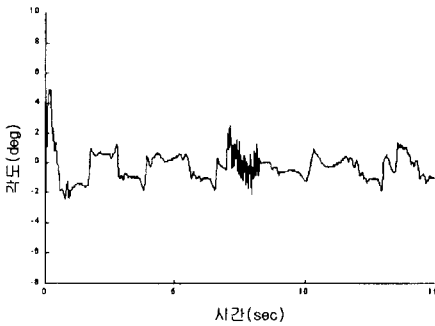


그림 16. 초기상태 1, 2에 대한 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기에 의한 진자의 각도 궤적

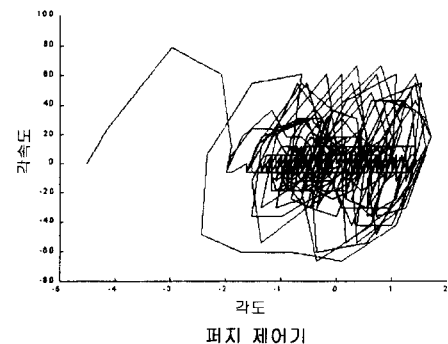
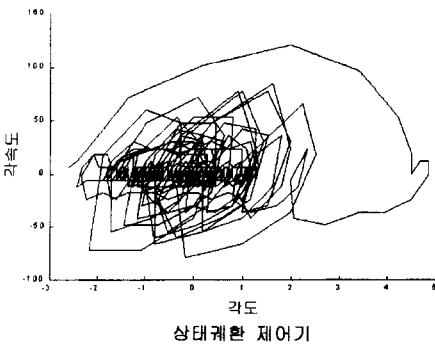


그림 17. 초기상태 1, 2에 대한 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기에 의한 cart의 거리 궤적

평형점으로 들어가지만 우측의 퍼지 제어기는 초기 각도가 초기상태 1보다 더 큼에도 불구하고 초기각도에서 곧바로 평형점으로 들어감을 알 수 있다. 이로부터 본 논문에서 제안한 퍼지 제어기가 선형의 상태궤환 제어기 보다 더 우수함을 알 수 있다.

그림 18은 초기상태 1, 2에 대하여 도립진자에 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기를 적용하였을 때의 cart의 거리 궤적을 나타낸 그림이다.

그림 19는 초기상태 1, 2에 대하여 상태궤환 제어

기와 퍼지 제어기를 도립진자에 적용하였을 때 거리 및 속도의 상태공간에서의 궤적을 나타낸 그림이다. 각도와 각속도의 상태공간의 궤적과 비슷하게 상태궤환 제어기인 경우에는 초기거리에서 약 -14 cm까지 변화한 후 평형점으로 들어가지만 퍼지 제어기를 적용시에는 초기거리에서 약 -11 cm로 변화한 후 평형점으로 들어감을 알 수 있다.

그림 20은 초기상태 3, 4에 대한 상태궤환 제어기 및 퍼지 제어기를 도립진자에 적용하여 시간에 따른

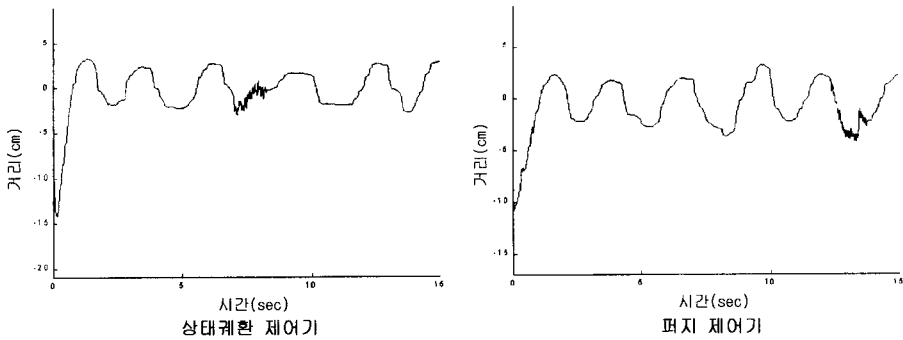


그림 18. 초기상태 1, 2에 대한 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기에 의한 cart의 거리 궤적

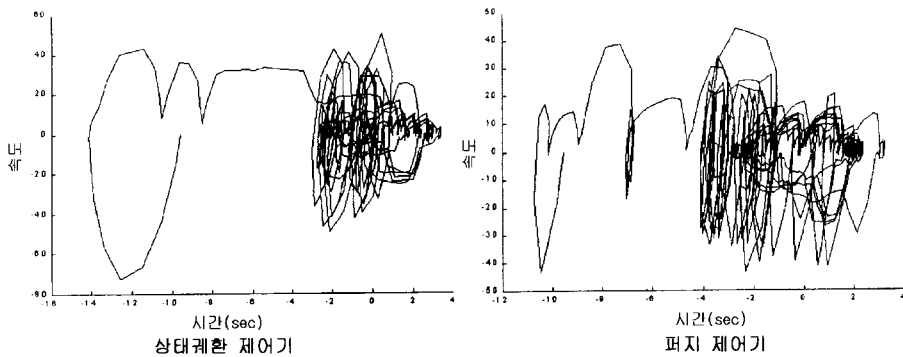


그림 19. 초기상태 1, 2에 대한 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기에 의한 거리, 속도의 상태공간 궤적

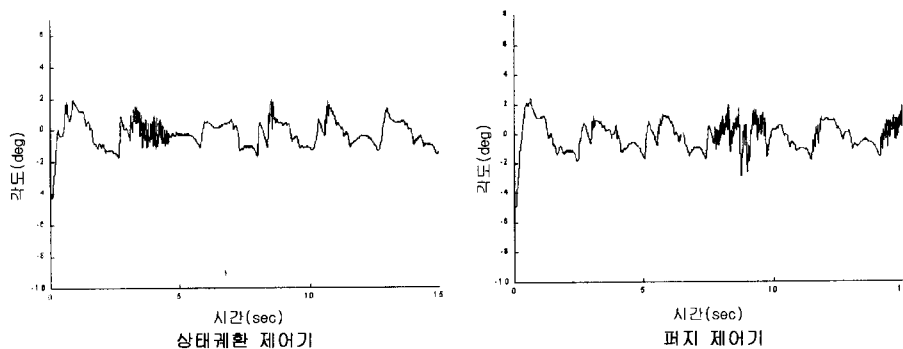


그림 20. 초기상태 3, 4에 대한 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기에 의한 진자의 각도 궤적

3. 결 론

각도의 궤적을 나타낸 그림이고, 그림 21은 각도, 각속도의 상태공간에서의 궤적을 나타낸 그림이다. 초기상태 1, 2에서와 마찬가지로 상태궤환 제어기와는 달리 퍼지 제어기의 상태공간에서의 궤적은 초기각도에서 바로 평형점으로 들어감을 확인할 수 있다.

그림 22는 초기상태 3, 4에 대하여 도립진자에 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기를 적용하였을 때의 cart의 거리 궤적을 그림 23은 동일한 초기상태에 대해 거리 및 속도의 상태공간에서의 궤적을 나타낸 그림이다.

선형의 대응부를 안정하게 하는 상태궤환 이득을 이용하여 퍼지 제어기에서 가장 중요한 결론부 파라미터를 결정함으로써 기존의 퍼지 설계기법보다 간단하고, 제어기 성능이 보증된 안정한 퍼지 제어기를 쉽게 설계할 수 있었다. 이러한 퍼지 제어기의 성능은 선형의 대응부인 상태궤환 제어기보다 플랜트 파라미터의 변동에 덜 민감하고, 더 강건함을 알 수 있었다. 서론

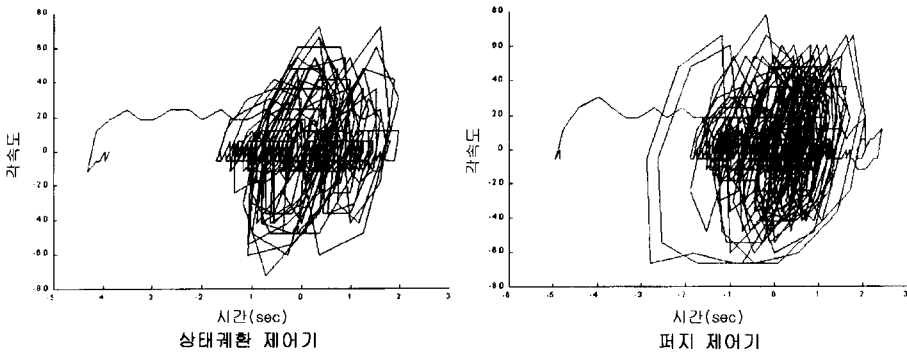


그림 21. 초기상태 3, 4에 대한 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기에 의한 각도, 각속도의 상태공간 궤적

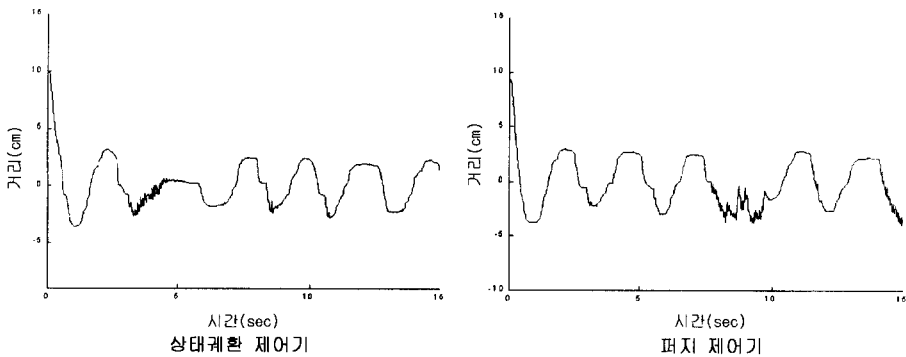


그림 22. 초기상태 3, 4에 대한 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기에 의한 cart의 거리 궤적

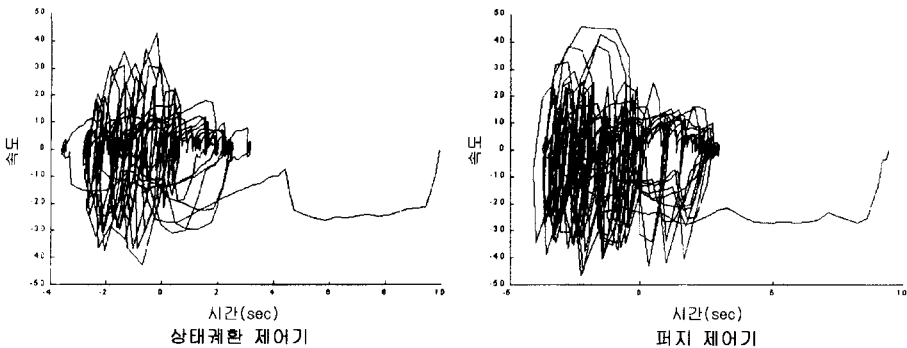


그림 23. 초기상태 3, 4에 대한 상태궤환 제어기와 퍼지 제어기에 의한 거리, 속도의 상태공간 궤적

에서 언급하였듯이 퍼지 제어기는 첫째, 개인적인 경험에 의존하므로 성능상에 문제점의 우려가 있고, 둘째, 선형 시스템이론의 제어기 설계기법과 같은 설계상의 명백한 이론적 배경이 없으므로 전체 시스템을 안정화시키는 다수의 파라미터를 설정하기 어려우며, 셋째, 역전과 알고리즘을 적용하더라도 전역적인 최적의 파라미터로의 수렴에는 장시간이 걸리는 단점을 가지고 있다. 본 논문에서 제시한 퍼지 제어기 설계방법은 개인적인 경험에 크게 의존을 하지 않고, 타당하고 명확한 이론적 배경에 의해 설계하므로 위와 같은 기존의 퍼지제어기 설계상의 문제점들을 해소할 수 있었다. 또한, 상태궤환 제어기의 출력이 상태변수와 이득의 곱의 합으로 나타남을 착안하여 소수의 상태변수가 입력되는 두 개의 퍼지 제어기로 나누어 설계함으로써 상태 공간적 해석(phase plan analysis)을 가능하게 하였고, 그 결과 강건한 퍼지 제어기를 구현할 수 있는 기반을 마련하였다. 설계된 퍼지 제어기는 선형 대응부인 상태궤환 제어기보다 시스템 파라미터 변동에 덜 민감함을 보였다. 그리고, 제한한 퍼지 제어기의 성능의 우수성과 강건성을 안정성 지표(stability indices)를 통해 입증하였고, 시뮬레이션과 실험을 통하여 확인하였다.

참고문헌

[1] Li-Xing Wang, "A Course In Fuzzy Systems & Control", Prentice Hall PTR Prentice-Hall Inc., 1997.

[2] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank, "An Introduction To Fuzzy Control", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
 [3] J. J. E. Slotine, Weiping Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall Inc., 1991.
 [4] G. Feng, S. G. Cao, N. W. Rees, "Design of Fuzzy Control Systems with Guaranteed Stability", *Fuzzy Sets & Systems*, No. 85, 1-10, 1997.
 [5] Javier Aracil, Anibal Ollero, Alfonso Garcia-Cerezo, "Stability Indices for the Global Analysis of Expert Control Systems", *IEEE Trans. on Sys. Man & Cybern.*, Vol. 19, No. 5, 998-1007, 1987.
 [6] Han-Xiong Li, "A Comparative Design and Tuning for conventional Fuzzy Control", *IEEE Trans. on Sys. Man & Cybern. PART B: Cybern.*, Vol. 27, No. 5, 884-889, 1997.
 [7] K. C. Sio, C. K. Lee, "Stability of Fuzzy PID Controllers", *IEEE Trans. on Sys. Man & Cybern. PART A: Sys.*, Vol. 28, No. 4, 490-495, 1998.
 [8] Li-Xing Wang, "Adaptive Fuzzy Systems And Control", Prentice Hall PTR Prentice-Hall Inc., 1994
 [9] Li-Xing Wang, "Stable Adaptive Fuzzy Controllers with Application to Inverted Pendulum Tracking", *IEEE Trans. on Sys. Man & Cybern.*, Part B, Vol. 26, No. 5, 677-691, 1996.
 [10] Li-Xing Wang, "A Supervisory Controller for Fuzzy Control Systems that Guarantees Stability", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 39, No. 9, 1845-1847, 1994.
 [11] M. Vidyasagar, "Nonlinear Systems Analysis", Prentice-Hall, Inc., 1993.
 [12] Jachb. Apkarian, "A Comprehensive and Modular Laboratory for Control Systems Design and Implementation", Quanser Consulting, 1995.



최 승 규 (Seung-Gyu Choi)

1996년 : 광운대 제어계측공학과 졸업
 1996년~1997년 : LG산전 인천공장 설계실
 1998년~현재 : 광운대 제어계측공학과 석사과정



홍 대 승 (Dae-Seung Hong)

제9권 제4호 참조



유 창 완 (Chang-Wan Ryu)

제9권 제4호 참조



임 화 영 (Wha-Yeong Yim)

제9권 제4호 참조