The Korean Communications
in Statistics Vol. 6, No. 3, 1999
pp. 695-705

3^{n-p} Fractional Factorial Design Excluded Some Debarred Combinations[1)]

Byoung Chul Choi[2)]

Abstract

When fractional factorial experiments contain some infeasible treatment combinations, called debarred combinations, we should construct experimental designs so that those debarred combinations are to be excluded by selecting defining contrasts appropriately. By applying Franklin(1985)'s procedure for selecting defining contrasts to Cheng and Li(1993)'s method, this paper presents a method of selecting defining contrasts to construct orthogonal 3-level fractional factorial experiments which exclude some debarred combinations.

1. 서론

요인실험에서는 조작상 실험할 수 없는 처리조합, 조작상 실험할 수는 있으나 경제적으로 많은 비용이 드는 처리조합 등 몇 가지 원인으로 실험할 수 없는 처리조합들이 포함될 수 있다. Greenfield(1976)가 2수준계 요인실험에서 최소의 실험횟수로 원하는 요인효과를 추론할 수 있는 2^{n-p} 일부실시법을 위한 정의대비 찾는 방법을 제안하였고, Franklin과 Bailey(1977)는 Greenfield의 방법을 수정하여 2수준계 요인실험에서 정의대비를 선택하기 위한 알고리즘을 제안하였다. 또 Cheng과 Li(1993)는 Franklin과 Bailey(1977)의 정의대비 선택 알고리즘을 활용하여 2수준계 요인실험에서 실험 불가능한 처리조합(debarred combination)을 배제하면서 원하는 요인효과들을 추론할 수 있는 일부실시법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법을 제안하였다.

국내에서는, 최병철과 최승현(1998)이 Cheng과 Li의 방법을 3수준계 요인실험으로 확장하여 한 개의 실험 불가능한 처리조합이 있을 때 이러한 처리조합이 배제되는 일부실시법이나 교락법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법에 대하여 논했다. 그러나, 최병철과 최승현의 방법은 실험 불가능한 처리조합이 2개 이상 있을 경우에 대한 연구는 실행되지 않아 일부실시법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법이 일반적인 3수준계 요인실험으로 확장되지 않아 실용가치 면에서 불완전한 것이다. Franklin(1985)은 3수준계 요인실험의 일부실시법이나 교락법을 위한 정의대비를 선택하기 위한 알고리즘을 제안하였다. 본 연구에서는 Franklin(1985)의 정의대비 선택 알고리즘을 Cheng과 Li(1993)의 방법으로 확장 적용하여 3수준계 요인실험에서 2개 이상의 실험 불가능한 처리조합이 있을 때 이러한 처리조합이 배제되는 일부실시법이나 교락법을 실행하기 위한 정의대비

1) The author wish to acknowledge the financial support of the Korea Research Foundation made in the program year of 1998

2) Professor, Division of Mathematics and Statistical Informatics, Chonbuk National University, Chonju, Chonbuk, 561-756

의 선택방법을 제안한다.

2. 교락법과 일부실시법을 위한 정의 대비의 선택

인자의 수준이 모두 0, 1, 2 인 3^n요인실험에서 인자는 영문 대문자로, k개의 인자 $F_1, \cdots, F_k$, $1 \le k \le n$, 의 어떤 수준조합은 $f_1^{x_1} \cdots f_k^{x_k}$ (x_i = 0, 1, 2로 해당인자의 수준, $i=1,\cdots, k$)로, 효과(effect)는 $F_1F_2^2F_3$ 등으로, $(\text{인자})^3=1$, $(\text{효과})^2=(\text{효과})$ 로 간주한다. 그러면 $(X^2Y)^2=XY^2$이므로 효과 X와 효과 Y의 일반화 곱(generalized interaction)은 효과의 첫 인자가 제곱이 아닌 것을 택하여 XY, XY^2으로 표현하기로 한다.

어떤 효과들의 집합이 주어졌을 때 그 집합의 어떤 효과도 그 집합의 다른 효과들의 일반화 곱으로 표현되지 않으면, 그 집합은 독립(independent)이라고 한다. 예를 들어, 효과들의 집합 $\{ACD, AC^2E, AD^2E^2, CD^2E\}$는 ACD와 AC^2E의 일반화 곱이 AD^2E^2이므로 독립이 아니다.

$D_1, \cdots, D_p$가 블럭과 교락되는 독립인 효과들이라 할 때, 이 요인효과들과 그들의 모든 일반화 곱을 정의대비(defining contrasts)라 부르며 이런 정의관계(defining relation)를 다음과 같이 나타낸다.

$$I=D_1=\cdots=D_p=D_i \text{ 들의 모든 일반화곱.}$$

이 정의관계로부터 3^n 요인실험의 모든 처리조합을 $3^p(p<n)$개의 블럭으로 나누어 배치하는 교락법이나 3^{n-p} 일부실시법을 실행할 수 있다.

Greenfield(1976)는 추정이 필요한 효과들의 집합을 요구집합(requirement set)이라 불렀다. 3^n 요인실험에서 요구집합의 주효과들은 모두 자유도가 2이나, 2인자 교호작용효과들은 모두 자유도가 4, 3인자 교호작용효과들은 모두 자유도가 8 등이므로 모든 효과들을 자유도가 각각 2가 되도록 교호작용효과 $A\times B$를 두 성분효과 AB, AB^2 으로, 교호작용효과 $A\times B\times C$를 4 성분효과 ABC, ABC^2, AB^2C, AB^2C^2 등으로 나누어 쓰면 원하는 효과들을 추정하기 위한 정의대비를 선택하기가 편리해진다. 3^n 요인실험은 자유도가 각각 2인 $(3^n-1)/2$개의 효과 또는 성분효과를 갖는다. 반복이 없는 교락법에서는 이 요구집합의 자유도가 2인 효과들만 정의대비로 선택하지 않으면 된다. 그러나, 일부실시법에서는 별명관계 때문에 요구집합과 자유도가 2가 되는 요구집합의 모든 한 쌍씩의 일반화 곱(generalized interaction)은 정의대비로 선택될 수 없고, 이와 같이 정의대비로 선택될 수 없는 효과들의 집합을 선택불가집합(ineligible set)이라 부른다.

예 1. 3^5요인실험에서 인자 A, B, C, D, E와 2인자 교호작용 $A\times B$, $B\times C$의 효과를 추정해야할 경우 요구집합은 $\{A, B, C, D, E, A\times B, B\times C\}$인데, 모든 효과들을 자유도가 2가 되도록 다시 쓰면 요구집합은

$$\{A, B, C, D, E, AB, AB^2, BC, BC^2\}$$

이 된다. 또, 선택불가집합은

$$\{I,\ A,\ B,\ AB,\ AB^2,\ C,\ AC,\ AC^2,\ BC,\ BC^2,\ ABC,\ ABC^2,\ AB^2C,\ AB^2C^2,\ D,\ AD,\ AD^2,\ BD,\ BD^2,\ ABD,\ ABD^2,\ AB^2D,\ AB^2D^2,\ CD,\ CD^2,\ BCD,\ BCD^2,\ BC^2D,\ BC^2D^2,\ E,\ AE,\ AE^2,\ BE,\ BE^2,\ ABE,\ ABE^2,\ AB^2E,\ AB^2E^2,\ CE,\ CE^2,\ BCE,\ BCE^2,\ BC^2E,\ BC^2E^2,\ DE,\ DE^2\}$$

이 된다. 여기서 인자 C와 성분 AB^2 등의 일반화 곱은 자유도가 4이므로 자유도가 각각 2인 성분 AB^2C, AB^2C^2 등으로 분해하여 표현하였다. 참고로, 교호작용 효과 $A\times B$를 추정해야 할 경우 $A\times B$를 두 성분 AB, AB^2으로 분해하였으므로 AB, AB^2은 모두 정의대비로 선택될 수 없다.

일부실시법의 주 목적중의 하나는 최소의 실험횟수로 원하는 효과들을 추정하는 것이다. 일부실시법의 실험배치는 Taguchi(1987)의 직교배열표를 사용하여 쉽게 할 수 있으나 실험 불가능한 수준조합이 있을 경우에는 그 배치방법이 알려지지 않아 이용하기 곤란하다. Franklin(1985)은 일부실시법을 위해, 먼저 주어진 요구집합의 효과의 총 자유도를 계산하여 가능한 최소 실험횟수를 조사한 후 기본 인자(basic factor)와 추가 인자(added factor or indicator factor)를 정하여 선택가능 효과표(eligible-effects table)를 만들고 이 선택가능 효과표로부터 적절한 정의대비를 구하여 일부실시법이나 교락법을 위한 블록들을 생성하였다. 그런데 Franklin(1985)의 선택가능 효과표들은 전체적으로 일관성이 결여되어 있어 선택 가능한 효과들을 택하는데 문제가 있다. 예를 들어 Franklin(1985)의 Table 3에서 ACD 뿐 만 아니라 ACD^2도 선택 가능한 효과인데 빠져있고 ACD의 자유도가 2인지 4인지 구분하지도 않았다. 본 논문에서는 Franklin(1985)이 제안한 방법을 수정하여 실험 불가능한 수준조합이 있을 경우에도 실험배치가 가능한 방법을 제안하고자 한다.

선택불가집합의 어떤 3인자 성분효과도 별명관계 때문에 정의대비로 선택될 수 없다. 따라서 선택불가집합의 3인자 성분효과에 있는 인자를 기본 인자로 나머지를 추가인자로 하여 선택가능 효과표를 만들고 이 선택가능 효과표로부터 적절한 정의대비를 구하면 된다. 예 1에서 최소의 실험횟수로 주어진 요구집합 효과들을 추정하기 위한 일부실시법 또는 교락법을 다음 예 2를 통해 설계해 보자.

예 2. 예 1에서 주어진 요구집합의 효과들의 총 자유도가 18이므로 최소의 실험횟수는 $3^3=27$임을 알 수 있고 3^{5-2} 일부실시법을 설계하면 된다. 만약 3^{5-2} 일부실시법으로 요구집합의 효과들을 추정할 수 없다면 3^{5-1} 일부실시법을 고려하는 등 실험횟수를 늘려 가면 된다. 선택불가집합의 3인자 성분효과에 있는 인자 A, B, C를 기본 인자로 D, E를 추가 인자로 하면 자유도가 모두 2이면서 기본 효과(basic effect)의 개수와 같은 $(3^3-1)/2+1$ 개의 행과, 추가 인자마다 2개씩의 열을 갖는 다음 표2.1과 같은 선택가능 효과표 (eligible-effects table)를 만들 수 있다. 여기서, 추가 인자마다 2개씩의 열을 갖게 한 것은 선택가능 효과표의 모든 원소의 자유도가 모두 2

가 되도록 한 것으로 Franklin(1985)의 선택가능 효과표 Table 2나 Table 3과 다름을 보여준다.

표2.1. 선택가능 효과표

		추가인자			
		D		E	
기본 효과	I	–	–	–	–
	A	–	–	–	–
	B	–	–	–	–
	AB	–	–	–	–
	AB^2	–	–	–	–
	C	–	–	–	–
	AC	ACD	ACD^2	ACE	ACE^2
	AC^2	AC^2D	AC^2D^2	AC^2E	AC^2E^2
	BC	–	–	–	–
	BC^2	–	–	–	–
	ABC	$ABCD$	$ABCD^2$	$ABCE$	$ABCE^2$
	ABC^2	ABC^2D	ABC^2D^2	ABC^2E	ABC^2E^2
	AB^2C	AB^2CD	AB^2CD^2	AB^2CE	AB^2CE^2
	AB^2C^2	AB^2C^2D	$AB^2C^2D^2$	AB^2C^2E	$AB^2C^2E^2$

– : 선택불가 효과

위 2원표에서 첫 번째나 두 번째 열에 있는 선택가능 효과중 하나인 X와 세 번째나 네 번째 열에 있는 선택가능 효과중 하나인 Y와의 일반화 곱 XY, XY^2 이 모두 선택 가능하면 X와 Y를 정의대비로 선택한다. 예를 들어, ACD와 ACE의 일반화 곱 중에는 선택불가효과 DE^2이 있어 부적당하나, ACD와 AC^2E의 일반화 곱은 AD^2E^2과 CD^2E로 모두 선택 가능하다. 이렇게 선택된 효과들을 정의대비로 하면 정의관계는

$$I = ACD = AC^2E = AD^2E^2 = CD^2E$$

가 된다. 또, ACD^2과 AC^2E의 일반화 곱은 ADE^2과 CDE로 모두 선택 가능하여 ACD^2과 AC^2E도 정의대비로 선택될 수 있다. Franklin(1985)의 Table 3 에서는 이 점을 빠져있다. 정의관계 $I = ACD = AC^2E = AD^2E^2 = CD^2E$ 로부터 요구집합의 모든 효과들에 대한 별명관계를 구하면 다음과 같다.

$$A = AC^2D^2 = ACE^2 = ADE = ACD^2E$$
$$B = ABCD = ABC^2E = ABD^2E^2 = CBD^2E$$
$$C = AC^2D = AE = ACD^2E^2 = CDE^2$$
$$D = ACD^2 = AC^2DE = AE^2 = CE$$
$$E = ACDE = AC^2E^2 = AD^2 = CD^2E^2$$
$$AB = AB^2C^2D^2 = AB^2CE^2 = AB^2DE = ABCD^2E$$
$$AB^2 = AC^2D^2 = ACE^2 = ADE = AB^2CD^2E$$
$$BC = ABC^2D = ABE = ABCD^2E^2 = BC^2D^2E$$
$$BC^2 = ABD = ABCE = ABC^2D^2E^2 = BD^2E$$

위 별명관계로부터 요구집합의 각 효과간에는 별명관계가 없어 정의대비 $I = ACD$, $I = AC^2E$, $I = AD^2E^2$ 또는 $I = CD^2E$ 중에서 둘을 택하여 3^5 요인실험을 9 개의 블럭으로 나누어 그 중 한 블록을 선택하여 실험하여도 요구집합의 모든 효과들을 추정할 수 있음을 알 수 있다.

이제 Kempthorne(1952)이 제안한 합동식을 이용하여 3^5 요인실험을 9 개의 블럭으로 나누어 보자. 독립인 정의대비 $I = ACD$와 $I = AC^2E$로부터 선형표현식

$$L_1 = x_1 + x_3 + x_4 (\bmod\ 3) \text{ 과 } \quad L_2 = x_1 + 2x_3 + x_5 (\bmod\ 3)$$

을 만들고 순서쌍 (L_1, L_2)의 값이 각각 (0, 0), (0, 1), ..., (2, 2)이 되는 처리조합끼리 같은 군으로 묶으면 블록 크기가 각각 27인 다음 그림2.1과 같은 9 개의 블록을 얻을 수 있다.
그림2.1에서 처리조합(treatment combination) 00000을 포함하는 블록은 군(group)을 이루고 나머지 8개의 블록은 이 군의 잉여류(coset)가 된다(김웅태와 박승안; 1980). 편의상 이들 9개의 블록을 모두 잉여류라고 부르자. 이들은 모두가 동일한 별명관계를 갖고 있다는 의미에서 동치(equivalent)이다.

3. 실험 불가능한 수준조합이 배제되는 3^{n-p} 일부실시법

3^n요인실험에서 k개의 인자 $F_1, \cdots, F_k$의 어떤 수준조합

$$f_1^{c_1} \cdots f_k^{c_k}, \qquad c_1, \cdots, c_k \text{는 고정된 하나의 수준,}$$

을 실험 불가능한 조합(debarred combination)이라고 가정하자. 그러면, 실험 불가능한 처리조합은

그림2.1 3^{5-2} 일부실시법의 잉여류

	BLOCK1	BLOCK2	BLOCK3	BLOCK4	BLOCK5	BLOCK6	BLOCK7	BLOCK8	BLOCK9
1	0 0 0 0 0	2 0 1 0 0	1 0 2 0 0	2 0 2 0 0	1 0 0 0 0	0 0 1 0 0	1 0 1 0 0	0 0 2 0 0	2 0 0 0 0
2	0 1 0 0 0	2 1 1 0 0	1 1 2 0 0	2 1 2 0 0	1 1 0 0 0	0 1 1 0 0	1 1 1 0 0	0 1 2 0 0	2 1 0 0 0
3	0 2 0 0 0	2 2 1 0 0	1 2 2 0 0	2 2 2 0 0	1 2 0 0 0	0 2 1 0 0	1 2 1 0 0	0 2 2 0 0	2 2 0 0 0
4	1 0 1 1 0	0 0 2 1 0	2 0 0 1 0	0 0 0 1 0	2 0 1 1 0	1 0 2 1 0	2 0 2 1 0	1 0 0 1 0	0 0 1 1 0
5	1 1 1 1 0	0 1 2 1 0	2 1 0 1 0	0 1 0 1 0	2 1 1 1 0	1 1 2 1 0	2 1 2 1 0	1 1 0 1 0	0 1 1 1 0
6	1 2 1 1 0	0 2 2 1 0	2 2 0 1 0	0 2 0 1 0	2 2 1 1 0	1 2 2 1 0	2 2 2 1 0	1 2 0 1 0	0 2 1 1 0
7	2 0 2 2 0	1 0 0 2 0	0 0 1 2 0	1 0 1 2 0	0 0 2 2 0	2 0 0 2 0	0 0 0 2 0	2 0 1 2 0	1 0 2 2 0
8	2 1 2 2 0	1 1 0 2 0	0 1 1 2 0	1 1 1 2 0	0 1 2 2 0	2 1 0 2 0	0 1 0 2 0	2 1 1 2 0	1 1 2 2 0
9	2 2 2 2 0	1 2 0 2 0	0 2 1 2 0	1 2 1 2 0	0 2 2 2 0	2 2 0 2 0	0 2 0 2 0	2 2 1 2 0	1 2 2 2 0
10	1 0 2 0 1	0 0 0 0 1	2 0 1 0 1	0 0 1 0 1	2 0 2 0 1	1 0 0 0 1	2 0 0 0 1	1 0 1 0 1	0 0 2 0 1
11	1 1 2 0 1	0 1 0 0 1	2 1 1 0 1	0 1 1 0 1	2 1 2 0 1	1 1 0 0 1	2 1 0 0 1	1 1 1 0 1	0 1 2 0 1
12	1 2 2 0 1	0 2 0 0 1	2 2 1 0 1	0 2 1 0 1	2 2 2 0 1	1 2 0 0 1	2 2 0 0 1	1 2 1 0 1	0 2 2 0 1
13	2 0 0 1 1	1 0 1 1 1	0 0 2 1 1	1 0 2 1 1	0 0 0 1 1	2 0 1 1 1	0 0 1 1 1	2 0 2 1 1	1 0 0 1 1
14	2 1 0 1 1	1 1 1 1 1	0 1 2 1 1	1 1 2 1 1	0 1 0 1 1	2 1 1 1 1	0 1 1 1 1	2 1 2 1 1	1 1 0 1 1
15	2 2 0 1 1	1 2 1 1 1	0 2 2 1 1	1 2 2 1 1	0 2 0 1 1	2 2 1 1 1	0 2 1 1 1	2 2 2 1 1	1 2 0 1 1
16	0 0 1 2 1	2 0 2 2 1	1 0 0 2 1	2 0 0 2 1	1 0 1 2 1	0 0 2 2 1	1 0 2 2 1	0 0 0 2 1	2 0 1 2 1
17	0 1 1 2 1	2 1 2 2 1	1 1 0 2 1	2 1 0 2 1	1 1 1 2 1	0 1 2 2 1	1 1 2 2 1	0 1 0 2 1	2 1 1 2 1
18	0 2 1 2 1	2 2 2 2 1	1 2 0 2 1	2 2 0 2 1	1 2 1 2 1	0 2 2 2 1	1 2 2 2 1	0 2 0 2 1	2 2 1 2 1
19	2 0 1 0 2	1 0 2 0 2	0 0 0 0 2	1 0 0 0 2	0 0 1 0 2	2 0 2 0 2	0 0 2 0 2	2 0 0 0 2	1 0 1 0 2
20	2 1 1 0 2	1 1 2 0 2	0 1 0 0 2	1 1 0 0 2	0 1 1 0 2	2 1 2 0 2	0 1 2 0 2	2 1 0 0 2	1 1 1 0 2
21	2 2 1 0 2	1 2 2 0 2	0 2 0 0 2	1 2 0 0 2	0 2 1 0 2	2 2 2 0 2	0 2 2 0 2	2 2 0 0 2	1 2 1 0 2
22	0 0 2 1 2	2 0 0 1 2	1 0 1 1 2	2 0 1 1 2	1 0 2 1 2	0 0 0 1 2	1 0 0 1 2	0 0 1 1 2	2 0 2 1 2
23	0 1 2 1 2	2 1 0 1 2	1 1 1 1 2	2 1 1 1 2	1 1 2 1 2	0 1 0 1 2	1 1 0 1 2	0 1 1 1 2	2 1 2 1 2
24	0 2 2 1 2	2 2 0 1 2	1 2 1 1 2	2 2 1 1 2	1 2 2 1 2	0 2 0 1 2	1 2 0 1 2	0 2 1 1 2	2 2 2 1 2
25	1 0 0 2 2	0 0 1 2 2	2 0 2 2 2	0 0 2 2 2	2 0 0 2 2	1 0 1 2 2	2 0 1 2 2	1 0 2 2 2	0 0 0 2 2
26	1 1 0 2 2	0 1 1 2 2	2 1 2 2 2	0 1 2 2 2	2 1 0 2 2	1 1 1 2 2	2 1 1 2 2	1 1 2 2 2	0 1 0 2 2
27	1 2 0 2 2	0 2 1 2 2	2 2 2 2 2	0 2 2 2 2	2 2 0 2 2	1 2 1 2 2	2 2 1 2 2	1 2 2 2 2	0 2 0 2 2
	$L_1=0$	$L_1=0$	$L_1=0$	$L_1=1$	$L_1=1$	$L_1=1$	$L_1=2$	$L_1=2$	$L_1=2$
	$L_2=0$	$L_2=1$	$L_2=2$	$L_2=0$	$L_2=1$	$L_2=2$	$L_2=0$	$L_2=1$	$L_2=2$

3^n개의 처리조합 중 3^{n-k}개 있으며, 이들은

$$f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k} f_{k+1}^{\alpha_{k-1}}\cdots f_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_j=0,\ 1,\ 2, \quad j=k+1,\ \cdots,\ n,$$

으로 표현된다. 예들 들어, 인자가 A, B, C, D, E인 3^5요인실험에서 실험 불가능한 수준조합이 $a^1b^0c^2$이라면 3^{5-3} 개의 실험 불가능한 처리조합들은

$$a^1b^0c^2d^0e^0,\ a^1b^0c^2d^1e^0,\ a^1b^0c^2d^2e^0,$$
$$a^1b^0c^2d^0e^1,\ a^1b^0c^2d^1e^1,\ a^1b^0c^2d^2e^1,$$
$$a^1b^0c^2d^0e^2,\ a^1b^0c^2d^1e^2,\ a^1b^0c^2d^2e^2$$

이다. 3^{n-p} 일부실시법에서 실험 불가능한 처리조합이 없을 경우에는 3^p개의 잉여류들 모두가 동일한 별명관계를 갖고 있는 동치(equivalent)이므로 그 중 하나를 사용하면 된다. 그러나 실험 불가능한 처리조합이 있을 경우에는 어떤 잉여류는 그 처리조합을 포함하게 되어 요구집합의 효과중 일부를 추정할 수 없게 된다. 최악의 경우 어떤 잉여류는 실험 불가능한 처리조합들로만 구성되어 실험 자체를 하지 못할 수도 있을 것이다. 이런 점을 해결하기 위해서는 실험 불가능한 처

리조합이 배제되는 잉여류가 생성되도록 정의대비들을 적절히 선택해야 한다.

서로 독립인 p개의 정의대비들의 집합이 어떤 실험 불가능한 처리조합이 배제되는 잉여류를 적어도 하나 생성한다면, 이러한 정의대비들의 집합은 수용 가능(acceptable)하다고 한다. 또, 어떤 효과 X 에 나타나는 인자들의 집합이 실험 불가능한 수준조합 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$ 에 나타나는 인자들의 집합 $\{F_1, \cdots, F_k\}$의 부분집합이면, $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$ 과 X는 양립한다(compatible)고 한다. 앞의 예에서, 실험 불가능한 수준조합 $a^1b^0c^2$은 효과 AB^2이나 ABC 등과는 양립하지만 $ACDE$와는 양립하지 않는다. 이와 같은 정의대비의 수용 가능성과 양립성은 본 논문에서 실험 불가능한 처리조합이 배제되는 블럭을 만들기 위한 중요한 기준이 된다. 3^{n-p} 일부실시법에서 하나의 수준조합이 실험 불가능할 때, 주어진 정의대비들의 집합이 수용 가능하게 되는 필요충분조건은 다음 정리와 같다.

정리 1. 3^{n-p} 일부실시법에서 하나의 수준조합 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$ 이 실험 불가능할 때, 서로 독립인 p개의 정의대비들이 수용 가능할 필요충분조건은 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$ 가 적어도 한 개의 정의대비와 양립하는 것이다.

증명. $X = F_{i_1}\cdots F_{i_l}$ $1\le i_1 < \cdots < i_l \le k$, 를 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$ 와 양립하는 정의대비라 하자. 모든 잉여류들은 Kempthorne(1952)의 선형식 $L = \alpha_{i_1}x_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_l}x_{i_l} (\text{mod } 3)$, $\alpha_{i_j} = 1$ 또는 2, $j = 1, 2, \cdots, l$, 에 의해 생성된다. 실험 불가능한 처리조합 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k} f_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\cdots f_n^{\alpha_n}$ 의 선형식 값은 $L = \alpha_{i_1}x_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_l}x_{i_l} (\text{mod } 3)$에 의해서만 결정되므로 0, 1 또는 2중 하나가 된다. 따라서 잉여류들의 2/3에는 실험 불가능한 처리조합이 나타나지 않아 주어진 정의대비들은 수용 가능하다.

반대로, $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$ 와 양립하는 정의대비가 없다고 하자. 그러면 어떤 정의대비 X도 X 에 나타나는 인자들의 집합이 실험 불가능한 수준조합 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k}$ 에 나타나는 인자들의 집합 $\{F_1, \cdots, F_k\}$의 부분집합이 아니므로 X 에 나타나는 인자 중 집합 $\{F_1, \cdots, F_k\}$의 인자가 아닌 것이 하나 이상 있다. 이런 인자 하나를 F_m $(k < m < n)$ 이라 하면 정의대비 X에 연관된 실험 불가능한 처리조합 $f_1^{c_1}\cdots f_k^{c_k} f_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\cdots f_n^{\alpha_n}$ 의 선형식의 값은 α_m의 값에 따라 0, 1, 2가 되어 모든 잉여류들에 실험 불가능한 처리조합이 나타나게 된다. 따라서, 주어진 정의대비들은 수용 불가능하다.■

예 3. 예 2의 3^{5-2} 일부실시법을 살펴보자.

(a) 실험 불가능한 수준조합이 한 개만의 정의대비와 양립하는 경우.

수준조합 $a^1c^2e^2$이 실험 불가능한 수준조합일 때 정의대비 $I = AC^2E$만 $a^1c^2e^2$과 양립한다. 이 때 선형식은 $L_2 = x_1 + 2x_3 + x_5 (\text{mod } 3)$이므로 실험 불가능한 처리조합 $a^1b^{x_2}c^2d^{x_4}e^2$ $(x_2, x_4 = 0, 1$ 또는 $2)$의 선형식 값은 1이므로 그림2.1에서 블록 2, 블록 5와 블록 8에만 실험 불가능한 처리조합이 나타난다.

(b) 실험 불가능한 수준조합이 서로 독립인 두 개의 정의대비와 동시에 양립하는 경우.
수준조합 $a^1c^2d^1e^2$이 실험 불가능한 수준조합이면 서로 독립인 정의대비 $I=ACD$와 정의대비 $I = AC^2E$두 개와 수준조합 $a^1c^2d^1e^2$이 양립한다. 그러면 실험 불가능한 처리조합 $a^1b^{x_2}c^2d^1e^2$ (x_2 = 0, 1 또는 2)의 선형식 값은 L_1 = 1이고 L_2 = 1이므로 그림2.1에서 블록 5에만 실험 불가능한 처리조합이 나타난다.
(c) 실험 불가능한 수준조합과 양립하는 정의대비가 없는 경우.
수준조합 $b^1c^1d^1$이 실험 불가능한 수준조합이라면 이 수준조합은 정의대비 $I=ACD$, $I = AC^2E$, $I=AD^2E^2$ 또는 $I=CD^2E$ 중 어떤 것과도 양립하지 않는다. 이 때 정의대비 $I=ACD$의 선형식 $L_1 = x_1 + x_3 + x_4 (\bmod 3)$ 에서 실험 불가능한 처리조합 $a^{x_1}b^1c^1d^1e^{x_5}$ (x_1, x_5 = 0, 1 또는 2)의 값은 x_1, $x_3 = 1$ 과 $x_4 = 1$ 에 의해 결정되는데 x_1이 0, 1 또는 2중 어느 것이어도 좋으므로 0, 1 과 2 모두를 선형식의 값으로 갖는다. 따라서 그림2.1에서 모든 잉여류에 실험 불가능한 처리조합이 나타난다. 실제로 ($x_1 111 x_5$) 모양의 처리조합이 모든 잉여류에 나타남을 확인할 수 있다. 나머지 3개의 정의대비에서도 같은 결과를 얻으므로 서로 독립인 어느 2개의 정의대비들도 수용 가능하지 않게 된다.

정리 2. 3^{n-p} 일부실시법에서 2개의 수준조합이 실험 불가능할 때, 서로 독립인 p개의 정의대비들이 수용 가능할 필요충분조건은 실험 불가능한 두 수준조합들이 각각 적어도 한 개의 정의대비와 양립하는 것이다.
증명. (a) 2개의 실험 불가능한 수준조합들이 각각 서로 다른 한 개씩의 정의대비와 양립하는 경우; 첫 번째 실험 불가능한 수준과 양립하는 정의대비의 선형식 L_1에서 실험 불가능한 처리조합들의 값을 α(정리 1에 의해 이 값은 0, 1 또는 2중 한 값이다)라 하고 첫 번째 실험 불가능한 수준과 양립하는 정의대비의 선형식 L_2에서 실험 불가능한 처리조합들의 값을 β(0, 1 또는 2)라 하면 3^p개의 잉여류들 중 $L_1 = \alpha$ 가 아닌 $(2/3)3^p$개의 잉여류들에는 첫 번째 실험 불가능한 처리조합들이 나타나지 않고 이 중 $L_2 = \beta$ 가 아닌 $(2/3)^2 3^p$개의 잉여류들에는 두 번째 실험 불가능한 처리조합들이 나타나지 않아 주어진 정의대비들이 수용 가능하다.
(b) 2개의 실험 불가능한 수준조합들이 같은 정의대비 한 개와 양립하는 경우; (a)와 같은 방법으로 첫 번째 실험 불가능한 처리조합들의 선형식 값을 $L_1 = \alpha$, 두 번째 실험 불가능한 처리조합들의 선형식 값을 $L_1 = \beta$ 라 하면 $L_1 = \alpha$ 와 $L_1 = \beta$ 가 아닌 $(1/3)3^p$개의 잉여류들에는 실험 불가능한 처리조합들이 나타나지 않아 주어진 정의대비들이 수용 가능하다.
(c) 2개의 실험 불가능한 수준조합들 중 하나라도 양립하는 정의대비가 없는 경우는 정리 1에 따라 주어진 정의대비들은 수용 불가능하다.■

예 4. (예 3의 연속)
(a) 실험 불가능한 수준조합중 하나라도 양립하는 정의대비가 없는 경우.
수준조합 $a^1c^2e^2$과 수준조합 $b^1c^1d^1$이 실험 불가능한 수준조합이라면 수준조합 $a^1c^2e^2$을 포함하

지 않는 잉여류는 전체 잉여류의 2/3이지만 수준조합 $b^1c^1d^1$을 포함하지 않는 잉여류는 하나도 없어 정의관계 $I=ACD=AC^2E=AD^2E^2=CD^2E$ 로는 실험 불가능한 처리조합이 배제된 실험을 할 수가 없게 된다. 따라서 실험 불가능한 두 수준조합과 양립하는 정의대비가 한 개도 없는 경우에는 당연히 실험 불가능한 처리조합이 배제된 실험을 할 수가 없게 된다

(b) 실험 불가능한 두 개의 수준조합과 각각 양립하는 서로 독립인 정의대비가 있는 경우.
정의대비 $I=ACD$와 양립하는 수준조합 $a^1c^2d^1$와 정의대비 $I = AC^2E$와 양립하는 수준조합 $a^1c^1e^2$이 실험 불가능한 두 개의 수준조합 이라고 하자. 정의대비 $I=ACD$ 의 선형식 $L_1 = x_1 + x_3 + x_4 (\mathrm{mod}\ 3)$ 에서 실험 불가능한 처리조합 $a^1b^{x_2}c^2d^1e^{x_5}(x_2, x_5 = 0, 1$ 또는 $2)$의 값은 1이고 정의대비 $I = AC^2E$의 선형식 $L_2 = x_1 + 2x_3 + x_5(\mathrm{mod}\ 3)$ 에서 실험 불가능한 처리조합 $a^1b^{x_2}c^1d^{x_4}e^2(x_2, x_4 = 0, 1$ 또는 $2)$의 값은 2이므로 그림2.1에서 $L_1 = 1$이 아닌 6개의 잉여류 중 $L_2 = 2$가 아닌 4개의 잉여류, 즉, (L_1, L_2)의 값이 (0, 0), (0, 1), (2, 0), (2, 1)인 잉여류에서는 실험 불가능한 처리조합이 나타나지 않는다.

(c) 정의대비 $I=ACD$ 와 양립하는 수준조합 $a^1c^2d^2$과 서로 독립인 정의대비 $I=ACD$, $I = AC^2E$모두와 양립하는 수준조합 $a^1c^2d^1e^2$이 실험 불가능한 두 수준조합이라고 하자. 그러면 처리조합 $a^1b^{x_2}c^2d^2e^{x_5}(x_2, x_5 = 0, 1$ 또는 $2)$의 값은 $L_1 = 2$이므로 그림2.1에서 $L_1 = 2$인 잉여류에서만 이 처리조합이 나타난다. 또, 처리조합 $a^1b^{x_2}c^2d^1e^2(x_2 = 0, 1$ 또는 $2)$의 선형식 값은 $L_1 = 1$이고 $L_2 = 1$이므로 (L_1, L_2)의 값이 (1, 1)인 잉여류 하나에만 이 처리조합이 나타난다. 따라서 (L_1, L_2)의 값이 (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 2)인 잉여류에서는 어떤 실험 불가능한 처리조합도 나타나지 않는다.

정리 2와 예 4로부터 다음 따름정리가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

따름정리 2. 3^{n-p} 일부실시법에서 $q(\le p)$ 개의 실험 불가능한 수준조합들이 각각 서로 독립인 p개의 정의대비들 중 서로 다른 정의대비와 양립하는 경우 그 정의대비들은 수용 가능하고 실험 불가능한 처리조합이 나타나지 않는 잉여류는 $(2/3)^q 3^p$개 이상 있다.

정리 3. 3^{n-p} 일부실시법에서 3개의 수준조합이 실험 불가능할 때, 서로 독립인 p개의 정의대비들이 수용 가능하지 않을 필요충분조건은 다음과 같다.

(1) 적어도 한 개의 실험 불가능한 수준조합이 양립하는 정의대비를 갖지 않는다.

(2) 실험 불가능한 수준조합들이 모두 동일한 한 개의 정의대비와 양립하면서 그 선형식의 값들이 다르다.

증명. (1) 실험 불가능한 어떤 수준조합과 양립하는 정의대비를 갖지 않는다면 선형식의 값으로 0, 1과 2를 모두 갖게 되므로 실험 불가능한 처리조합들이 모든 잉여류들에 나타나 그 정의대비들이 수용 가능하지 않다.

(2) 정리 2의 증명 (b)와 같은 방법으로 하면 실험 불가능한 처리조합들이 모든 잉여류들에 나타나 그 정의대비들이 수용 가능하지 않음을 쉽게 알 수 있다.

참고로, $q(\geq 3)$개의 실험 불가능한 수준조합들이 각각 독립인 p개의 정의대비들과 양립하나 그 정의대비들이 서로 다르지 않는 것이 있을 경우에는 정의대비들이 수용 가능하지 않을 수도 있음을 정리 3에서 알 수 있다.

4. 결론

Cheng과 Li(1993)는 Franklin과 Bailey(1977)의 정의대비 선택 알고리즘을 수정하여 실험 불가능한 수준조합을 배제하면서 원하는 요인효과들을 추론할 수 있는 2^{n-p} 일부실시법을 실행하기 위한 정의대비의 선택방법을 제시하였다. Franklin(1985)은 수준수가 소수(prime number)인 요인실험에서의 정의대비 선택 알고리즘을 제시했는데, 본 논문에서는 이 알고리즘을 Cheng과 Li(1993)의 결과에 확장 적용하여 실험 불가능한 수준조합이 있는 경우의 3^{n-p} 일부실시법을 계획하였다.

실험 불가능한 수준조합이 있는 경우에는 일반적인 3^{n-p} 일부실시법과는 달리 기본인자를 택할 때 정의대비로 선택 불가능한 효과들을 고려해야 하기 때문에 제약이 있다. 즉 실험 불가능한 수준조합에 나타나는 인자들을 기본인자로 하여 선택가능 효과표를 만들면 이 수준조합과 양립하는 정의대비를 선택할 수 없다. 이는 $a^1b^2c^0$이 실험 불가능한 수준조합이라 할 때 예 2의 선택가능 효과표에서 쉽게 확인할 수 있다. 결국 실험 불가능한 수준조합에 나타나는 인자들과 동일하지 않으면서 선택불가집합에 있는 효과의 인자들을 기본인자로 택하여 선택가능 효과표를 만들면 원하는 정의대비를 선택할 수 있다. 실험 불가능한 수준조합에 나타나는 인자들의 개수가 선택불가집합에 있는 효과들 중 최대 개수의 인자를 갖는 효과보다 많은 경우에는 기본인자를 택하는데 제약이 없어진다. 기본인자를 바꿔가면서 위와 같은 방법으로 만들어진 선택가능 효과표에서 실험 불가능한 수준조합과 양립하는 정의대비를 찾을 수 없을 때는 3 절의 정리에서 밝힌 대로 주어진 실험 크기에서는 실험 불가능한 수준조합이 배제되는 일부실시법을 설계할 수 없다. 이런 경우에는 실험의 크기를 늘려 같은 방법을 되풀이 적용하여 원하는 정의대비를 찾아야 한다. 지금까지 논한 방법을 단계별로 정리하면 다음과 같다.

1단계. 요구집합을 이용하여 선택불가집합을 만든다

2단계. 요구집합에서 최소 실험횟수를 찾는다.

3단계. 실험 불가능한 수준조합에 나타나는 인자들과 동일하지 않으면서 선택불가집합에 있는 효과의 인자들을 기본인자로 택한다.

4단계. 선택가능 효과표를 만든다.

5단계. 선택가능 효과표에서 실험 불가능한 수준조합과 양립하는 정의대비를 찾는다.

6단계. 정의대비를 찾았으면 9단계로 간다.

7단계. 선택가능 효과표에서 실험 불가능한 수준조합과 양립하는 정의대비를 찾을 수 없으면 기본인자를 바꾸고 4단계로 간다.

8단계. 기본인자를 다 바꿔도 정의대비를 찾을 수 없으면 실험의 크기를 늘리고 선택불가집합에

있는 효과의 인자들에 한 인자를 추가하여 기본인자로 한 후 3단계로 가고, 실험의 크기를 늘릴 수 없으면 실험 불가능한 수준조합이 배제되는 일부실시법을 설계할 수 없으므로 마친다.

9단계. 선형식을 세워서 잉여류들을 만든 후 실험 불가능한 수준조합이 배제된 잉여류를 택한다.

마지막으로 p 가 소수일 때, 실험 불가능한 수준조합이 배제되는 p^{n-m} 일부실시법은 3^{n-p} 일부실시법의 경우와 유사한 방법으로 설계할 수 있음을 밝힌다.

참 고 문 헌

[1] 김응태, 박승안(1980). *현대대수학*. 이우출판사.

[2] 박성현 (1995). *현대실험계획법*. 민영사.

[3] 최병철, 최승현(1998). 실험 불가능한 처리조합이 배제되는 3^{n-p} 일부실시법. *응용통계연구*. 11권, 303-315

[4] Cheng, C. S., Li, C. C. (1993). Constructing Orthogonal Fractional Factorial Designs When Some Factor-Level Combinations Are Debarred. *Technometrics*. Vol. 35. 277-283.

[5] Franklin, M. F. (1985). Selecting Defining Contrasts and Confounded Effects in p^{n-m} Fractional Experiments. *Technometrics*. Vol. 27. 165-172.

[6] Franklin, M. F., Bailey, R. A. (1977). Selection of Defining Contrasts and Confounded Effects in Two-level Experiments. *Applied Statistics*. Vol. 26. 321-326.

[7] Greenfield, A. A (1976). Selection of Defining Contrasts in Two-level Experiments. *Applied Statistics*.. Vol. 25. 64-67.

[8] Kempthorne, O.(1952). *The Design and Analysis of Experiment*, John Wiley & Sons. New York.

[9] Taguchi, G(1987). *System of Experimental Design Vol I and II*. UNIPUB/Kraus International Publications.