

Comparative Study of Confidence Intervals for Relative Ratio¹⁾

Sang-Gue Park²⁾, You-Jin Oh³⁾

Abstract

Consider the several methods of constructing interval for relative ratio from two independent binomial samples. The special interests are gives in the cases of low rates and small samples. Bias-corrected and accelerated bootstrap method is proposed to overcome are the non-efficiency of current methods based on asymptotic results. Simulation studies are presented to demonstrate the performance of the proposed method.

1. 서론

서로 독립인 두 표본으로부터 얻어진 통계량의 상대비율(relative ratio)은 두 표본이 얻어진 집단들의 특성을 파악하는데 자주 사용된다. 특히 표본에서 관찰된 반응치들이 이항적(binary)일 때 이 비는 두 집단간의 위험율의 차이 혹은 사망률의 차이 등의 의미를 갖게 되어 각 집단에 가해진 처리 효과를 비교할 수 있게 된다.

독립인 두 이항 집단의 상대비율의 신뢰구간 추정에 관한 연구는 Noether(1957)에 의해서 제시된 이래 최근 Nam(1995)까지 많은 통계학자들에 의해서 끊임없이 연구되어 왔다. 상대비율의 신뢰구간을 추정하는 대부분의 연구가 근사적인 방법을 통해 이루어져 왔고 실제 이러한 근사적인 방법들도 어느 정도 신뢰성을 유지하고 있다고 알려져 왔다. 하지만 이러한 근사적인 방법들의 유효성은 표본의 크기 뿐만 아니라 각 집단에서 얻어지는 비율의 추정치가 작았을 때도 문제가 있을 수 있다.

본 연구는 상대비율의 신뢰구간을 추정하는데 지금까지 제시되었던 방법들의 특징을 살펴보고, 최근 많이 사용되는 BC_a 부스트랩 방법(bias-corrected and accelerated percentile method)을 이용하여 상대비율의 신뢰구간을 추정해보고자 한다. 또한 논의된 방법들의 효율성을 판단하기 위해 모의실험을 통해 포함확률과 평균 구간길이를 비교해보고자 한다.

1) The Paper is supported by 1998 Chung-Ang University Research Fund.

2) Associate Professor, Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, Seoul, 156-756, KOREA

3) Ph.D Candidate, Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, Seoul, 156-756, KOREA

2. 상대비율의 신뢰구간 추정방법

X 를 표본 크기가 n_1 이고 모수가 p_1 인 이항확률변수라 하고, Y 를 표본 크기가 n_2 이고 모수가 p_2 인 이항확률변수라 하자. X 와 Y 가 서로 독립이라 하고 상대비율 ϕ 는 $\phi = p_2/p_1$ 로 정의한다. 각각의 표본에서 얻은 추정치들을 $\hat{p}_1 = x/n_1$, $\hat{p}_2 = y/n_2$ 라고 할 때, 가장 자연스런 ϕ 의 추정치는 $\hat{\phi} = \hat{p}_2/\hat{p}_1$ 가 된다. 또한 $q_i = 1 - p_i$ ($i = 1, 2$)라 하고 이것의 대응되는 추정량 $\hat{q}_i = 1 - \hat{p}_i$ 라 하자.

2.1. Noether 방법

Noether(1957)는 상대비율의 추정량 $\hat{\phi}$ 과 델타 방법(Delta method)에 의해서 근사적으로 계산된 분산 $\phi^2[q_1/n_1p_1 + q_2/n_2p_2]$ 을 이용해서 ϕ 의 근사적인 $(1 - \alpha)100\%$ 신뢰구간을 다음과 같이 제시했다.

$$\hat{\phi} \cdot \left(1 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{q}_1/n_1\hat{p}_1 + \hat{q}_2/n_2\hat{p}_2}\right)^{-1} \quad (1)$$

단, $z_{\alpha/2}$ 는 표준정규분포의 상위 $\alpha/2$ 분위수이다. 이 구간추정방법은 비교적 단순하면서도 신뢰수준을 잘 맞추는 것으로 알려져 있지만, 신뢰구간의 길이가 비교적 길고 상대비율의 분모항의 x 값 혹은 y 의 값이 0이 되면 통계량 자체가 정의되지 않아서 사용할 수 없다는 단점이 있다. 따라서 x 나 y 가 0이 자주 나타날 수 있는 모비율이 작은 경우에는 그렇게 바람직한 방법이 될 수 없지만, ϕ , p_1 과 p_2 의 추정량을 각각 $\hat{\phi}^* = \hat{p}_2^*/\hat{p}_1^*$, $\hat{p}_1^* = (x+1/2)/(n_1+1/2)$ 과

$\hat{p}_2^* = (y+1/2)/(n_2+1/2)$ 으로 고려한다면 이 문제점은 피할 수 있을 것이다. 즉, ϕ 의 근사적인 $(1 - \alpha)100\%$ 신뢰구간은

$$\hat{\phi}^* \cdot \left(1 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{q}_1^*/n_1\hat{p}_1^* + \hat{q}_2^*/n_2\hat{p}_2^*}\right)^{-1} \quad (2)$$

이 된다.

2.2. Katz 연구팀 방법

Katz 연구팀(1978)은 Noether의 방법을 변형하여 $\log \hat{\phi}$ 의 점근적인 성질을 이용했다. 역시 델타 방법을 이용해서 $\log \hat{\phi}$ 의 근사적인 분산 $[1/y - 1/n_2 + 1/x - 1/n_1]$ 을 얻은 후, ϕ 의 근사적인 $(1 - \alpha)100\%$ 신뢰구간을 제시했다.

$$\hat{\phi} \cdot \exp(\pm z_{\alpha/2} \sqrt{1/y - 1/n_2 + 1/x - 1/n_1}). \quad (3)$$

이 방법은 log 방법으로도 많이 알려져 있으며 Noether 방법보다 신뢰수준을 잘 맞추고 신뢰구간의 길이를 비교해 보아도 훨씬 우수한 방법으로 알려져 있다. 하지만 이 방법은 Noether의 방법

과 마찬가지로 x 나 y 가 0이 되면 사용할 수 없는 단점을 가지고 있다. Walter(1975)는 이를 극복하기 위해 $\log \widehat{\phi}_{1/2} = \log((y+1/2)/(n_2+1/2)) - \log((x+1/2)/(n_1+1/2))$ 를 $\log \phi$ 의 추정량으로 제시하였으며 $\log \widehat{\phi}_{1/2}$ 가 $\log \phi$ 에 대해 거의 불편성을 가짐을 보였다. 즉, ϕ 의 근사적인 $(1-\alpha)100\%$ 신뢰구간을 다음과 같이 제시할 수 있다.

$$\widehat{\phi}_{1/2} \cdot \exp(\pm z_{\alpha/2} \sqrt{1/(y+1/2) - 1/(n_2+1/2) + 1/(x+1/2) - 1/(n_1+1/2)}) \tag{4}$$

하지만 이 방법의 치명적인 문제점은 x 와 y 가 n_1 이나 n_2 가 되면 구간이 한 점으로 퇴화(degenerate)되기 때문에 사용될 수 없다는 것이다.

2.3. Bailey 방법

Bailey(1987)는 ϕ 의 신뢰수준을 보다 잘 확보하기 위해 통계량 $T = \widehat{p}_1 - (\phi \widehat{p}_2)^t$ 를 고려한 후 통계량 T 의 분포의 왜도(skewness)를 최소화시키는 t 를 찾아 이를 이용해서 ϕ 의 신뢰구간을 찾는 방법을 제시했다. 역시 델타 방법을 이용해서 다음과 같은 추측 변량을 만들면

$$Z = (\widehat{p}_1 - \phi^t \widehat{p}_2) / [t \widehat{p}_1^{2t-1} \widehat{q}_1/n_1 + \phi^{2t} \widehat{p}_2^{2t-1} \widehat{q}_2/n_2]^{1/2}$$

이고, 통계량 Z 는 근사적인 정규분포를 따르므로 왜도를 최소화시키기 위해 Z 의 중심 3차 적률의 첫 번째 항이 0인 t 값을 찾으면 다음을 얻을 수 있다.

$$t = 1/3 + 2(n_1^2 \widehat{p}_2^2 \widehat{p}_1 \widehat{q}_1 - n_2^2 \widehat{p}_1^2 \widehat{p}_2 \widehat{q}_2) / 3(n_1^2 \widehat{p}_2^2 \widehat{q}_1^2 - n_2^2 \widehat{p}_1^2 \widehat{q}_2^2) \approx 1/3.$$

이를 이용해서 ϕ 의 $(1-\alpha)100\%$ 근사적인 신뢰구간을 계산해보면 다음과 같다.

$$(\widehat{p}_2/\widehat{p}_1) \cdot \left[\frac{1 \mp z_{\alpha/2} \sqrt{(1-\widehat{p}_1)/x + (1-\widehat{p}_2)/y - z_{\alpha/2}^2(1-\widehat{p}_1)(1-\widehat{p}_2)/9xy/3}}{1 - \frac{z_{\alpha/2}^2(1-\widehat{p}_2)}{9y}} \right]^3 \tag{5}$$

Bailey 방법은 Noether 방법에 비해서 신뢰수준을 잘 맞추고 있고 $x = n_1$ 이거나 $y = n_2$ 일 경우에도 항상 신뢰구간을 얻을 수 있다는 장점이 있다. 하지만 일반적인 경우에 log 방법에 비해서 크게 향상된 결과를 가지지는 못하며 x 혹은 y 가 0일 때는 역시 문제가 있어 Walter(1975)의 제안을 통해 신뢰구간을 얻을 수 있다.

2.4. Score 방법

Koopman(1984), Miettinen과 Nurminen(1985), Gart와 Nam(1988)은 ϕ 의 신뢰구간을 얻는데 우도함수를 이용한 Score방법을 제안했다. Gart 와 Nam에 의해서 Score 방법에 의한 신뢰구간이 많은 바람직한 통계적 성질을 만족하고 있다는 것이 밝혀졌지만 신뢰구간을 계산하는데 반복적인 계산이 요구되는 것이 문제점으로 지적되어 왔다.

두 독립인 이항분포로부터 로그 우도함수는 다음과 같이 얻어진다.

$$\ln L = (x+y) \ln p_1 + (n_1+x) \ln q_1 + y \ln \phi + (n_2+y) \ln(1-\phi p_1)$$

그러면 ϕ 의 Score 함수는

$$S_\phi(\phi, p_1) = \partial \ln L(\phi, p_1) / \partial \phi = (y - n_2 p_2) / q_2 \phi$$

이고, 분산은

$$\text{var}[S_\phi(\phi, p_1)] = 1 / \phi^2 (q_1 / n_1 p_1 + q_2 / n_2 p_2)$$

이다. 따라서 ϕ 의 근사적인 $(1 - \alpha)100\%$ 신뢰구간은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\chi^2(\phi) = \frac{(x - n_1 \tilde{p}_1)^2}{n_1 \tilde{p}_1 \tilde{q}_1} \left(1 + \frac{n_1 (1 - \phi \tilde{p}_1)}{n_2 \phi \tilde{q}_1} \right) = z_{\alpha/2}^2, \quad (6)$$

여기서 \tilde{p}_1 은 p_1 의 최우추정량을 의미하며 \tilde{p}_1 은 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$(y - n_2 \tilde{p}_2) / \tilde{q}_2 + (x - n_1 \tilde{p}_1) / \tilde{q}_1 = 0. \quad (7)$$

Gart와 Nam은 위의 두 식을 이용해서 반복적으로 계산해서 ϕ 의 근사적인 하한과 상한을 얻는 방법을 제시했다. 그러나 최근 Nam(1995)은 이를 개선해서 비반복적으로 ϕ 의 신뢰구간을 계산할 수 있는 방법을 제시했다. 즉, 식 (7)을 정리하면

$$\phi = (1 - (n_2 - y) \tilde{q}_1 / (x + n_2 - (n_1 + n_2) \tilde{p}_1)) / \tilde{p}_1 \quad (8)$$

이고 식 (8)을 식 (6)에 대입하여 전개하면

$$\begin{aligned} & (x + n_1 \tilde{p}_1)^2 [n_2 (x + y - n_1 \tilde{p}_1 - y \tilde{p}_1) + n_1 \tilde{p}_1 (n_2 - y)] \\ & = z_{\alpha/2}^2 n_1 \tilde{p}_1 \tilde{q}_1 n_2 (x + y - n_1 \tilde{p}_1 - y \tilde{p}_1) \end{aligned}$$

이다. 양변을 정리하면

$$a_1 \tilde{p}_1^3 + a_2 \tilde{p}_1^2 + a_3 \tilde{p}_1 + a_4 = 0 \quad (9)$$

이고, 이 때

$$\begin{aligned} a_1 &= n_1 (n_1 (n_1 + n_2) y + n_2 (n_1 + y) z_{\alpha/2}^2), \\ a_2 &= -n_1 (2(n_1 + n_2) x y + n_1 n_2 (x + y) + n_2 (n_1 + x + 2y) z_{\alpha/2}^2) \\ a_3 &= 2n_1 n_2 x (x + y) + (n_1 + n_2) x^2 y + n_1 n_2 (x + y) z_{\alpha/2}^2 \\ a_4 &= -n_2 x^2 (x + y) \end{aligned}$$

이다. 식 (9)로부터 얻은 \tilde{p}_1 의 세 근은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & -2(-c_1/3)^{1/2} \cos(\pi/3 - \theta/3) - b_1/3, \\ & -2(-c_1/3)^{1/2} \cos(\pi/3 + \theta/3) - b_1/3, \\ & 2(-c_1/3)^{1/2} \cos(\theta/3) - b_1/3, \end{aligned}$$

여기서 $b_1 = a_2/a_1$, $c_1 = b_2 - b_1^2/3$, $\cos \theta = 27^{1/2} c_2 / (2c_1 (-c_1)^{1/2})$ 이고, 이때 $b_2 = a_3/a_1$, $b_3 = a_4/a_1$, $c_2 = b_3 - b_1 b_2/3 + 2b_1^3/27$ 이다. 이렇게 얻어진 세 근 중 가장 작은 값과 두 번째로 작은 값이 식(8)에 의해서 신뢰구간의 상한과 하한을 주게 된다.

만약 $x = 0$ 일 경우에는 상한이 ∞ 이 되고 $y = 0$ 일 경우에는 하한이 0 이 되며 $x = y = 0$ 인 경우에는 신뢰구간이 $(0, \infty)$ 이 되어 ϕ 에 관한 아무런 정보를 얻을 수 없다. 또한 $x = n_1$,

$y = n_2$ 일 경우에는 하한이 $n_2/(n_2 + z_{\alpha/2}^2)$ 로, 상한이 $(n_1 + z_{\alpha/2}^2)/n_1$ 으로 얻어진다.

이 Score 방법은 신뢰구간을 유도하는데 약간 어려움은 있지만 카이제곱검정과 일관된 결론을 주고 있으며 신뢰수준도 잘 유지하는 등 많은 통계적인 적합성 때문에 많이 사용되고 있다. 하지만 x 혹은 y 의 값이 0이 될 가능성이 많은 비율이 작은 경우에는 구간의 길이가 너무 넓어져 ϕ 에 관한 정보를 파악하기 어려운 문제점을 역시 가지고 있다.

2.5. 붓스트랩 방법

붓스트랩(Bootstrap) 방법은 Efron(1979)에 의해 유용성이 제시된 이래로 많은 분야에서 사용되는 통계적 방법이다. 붓스트랩 방법은 분포가 알려져 있는 모집단이나 알려져 있지 않은 모집단에서 정확한 표본분포를 얻기 어려운 경우에 자주 사용되는 기법이다. 붓스트랩 추정량은 비모수적 최우추정량의 몬테카를로 접근이라 볼 수 있다. 이러한 붓스트랩 추정량은 비교적 작은 표본에서 점근적인 이론에 기초한 추정량보다 평균제곱오차가 작다고 알려져 있고 컴퓨터에 의한 재표본 추출을 이용해서 간단하게 얻을 수 있다는 장점이 있다.

상대 비율 ϕ 의 신뢰구간을 추정하는데 다음과 같은 알고리즘을 이용할 수 있다. 두 표본에서 얻은 \hat{p}_1 과 \hat{p}_2 을 모수처럼 간주하고 표본의 크기가 n_1 과 n_2 인 이항집단을 B 번 생성한 후 B 개의 $\hat{\phi}_b$ 을 계산한다. 계산된 B 개의 $\hat{\phi}_b$ 를 가지고 단순 백분위 방법(simple percentile method)을 이용해서 ϕ 의 신뢰구간을 만들 수 있다. x 나 y 가 0이 자주 나타날 수 있는 모비율이 작은 경우에는 역시 이 방법도 제한된 $\hat{\phi}_b$ 을 주기 때문에 Walter(1975)의 추정량을 이용하기로 한다. 즉, \hat{p}_1 과 \hat{p}_2 이 0이 된다면 이를 \hat{p}_1^* 과 \hat{p}_2^* 를 가지고 B 개의 붓스트랩 표본을 만들기로 하고 붓스트랩 표본에서 생성된 x 나 y 가 0이 된다면 역시 Walter의 방법과 같이 양변에 1/2를 더해서 계산하도록 한다.

ϕ 의 붓스트랩 신뢰구간을 구하는 방법은 단순 백분위 방법과 BC 방법(bias-corrected percentile method), BC_a 방법(bias-corrected and accelerated percentile method) 등이 있다. 일반적으로는 가장 단순한 단순 백분위 방법이 많이 쓰이지만, 본 논문에서 단순 백분위 방법이나 BC 방법을 사용해서 ϕ 의 붓스트랩 신뢰구간을 만든 결과 두 집단의 모비율이 낮은 경우 주어진 유의수준을 유지하지 못하는 것으로 나타나 BC_a 방법을 이용하기로 한다.

BC_a 방법에 의해 추정된 ϕ 의 $(1-\alpha)100\%$ 신뢰구간을 $(\phi_{LB}(\alpha/2), \phi_{UB}(1-\alpha/2))$ 라 하자. B 번 반복에 의해 얻어진 B 개의 $\hat{\phi}_b^*$ 를 순서대로 나열했을 때, $\alpha/2$ 에 해당되는 $\hat{\phi}_b^*$ 값과 $(1-\alpha/2)$ 에 해당되는 $\hat{\phi}_b^*$ 값이 BC_a 방법에 의한 ϕ 신뢰구간의 하한값과 상한값이 된다.

B 개의 $\hat{\phi}_b^*$ 로부터 얻은 표본 분포함수를 G_B 라 하면 BC_a 방법에서의 $\alpha/2$ 와 $(1-\alpha/2)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\alpha/2 = G_B^{-1} \left[\Phi \left(z_0 + \frac{z_0 + z_{(\alpha/2)}}{1 - a \cdot (z_0 + z_{(\alpha/2)})} \right) \right],$$

$$(1 - \alpha/2) = G_B^{-1} \left[\Phi \left(z_0 + \frac{z_0 + z_{(1-\alpha/2)}}{1 - \alpha \cdot (z_0 + z_{(1-\alpha/2)})} \right) \right],$$

이때 Φ 는 누적 표준정규분포를 의미하며,

$$z_0 = \Phi^{-1}\{G_B(\hat{\phi})\}, \quad \alpha = \frac{\sum_{i=1}^4 (\hat{\phi}_{(i)} - \hat{\phi}_{(\cdot)})^3}{6 \left(\sum_{i=1}^4 (\hat{\phi}_{(i)} - \hat{\phi}_{(\cdot)})^2 \right)^{3/2}}$$

이다. α 는 잭나이프 값(jackknife value)을 의미하는데 이항 집단의 경우에 다음과 같이 계산할 수 있다. 첫 번째 표본에서 계산된 잭나이프 값 \hat{p}_1^j 는 x 개의 $(x-1)/(n_1-1)$ 과 (n_1-x) 개의 $x/(n_1-1)$ 이 얻어지고, 두 번째 표본에서 계산된 잭나이프 값 \hat{p}_2^j 는 y 개의 $(y-1)/(n_2-1)$ 과 (n_2-y) 개의 $y/(n_2-1)$ 가 얻어진다. 이를 이용해서

$$\hat{\phi}_{(1)} = [(y-1)/(n_2-1)] / [(x-1)/(n_1-1)],$$

$$\hat{\phi}_{(2)} = [y/(n_2-1)] / [(x-1)/(n_1-1)],$$

$$\hat{\phi}_{(3)} = [(y-1)/(n_2-1)] / [x/(n_1-1)],$$

$$\hat{\phi}_{(4)} = [y/(n_2-1)] / [x/(n_1-1)]$$

라 하고 이들의 평균을

$$\hat{\phi}_{(\cdot)} = \sum_{i=1}^4 \frac{\hat{\phi}_{(i)}}{4}$$

한다. 실제 이렇게 계산되는 α 값은 연속형 자료에서 계산되는 방법과 약간 차이가 있지만 본질은 변하지 않는다고 생각되며 저자들은 모의실험을 통해 이를 확인하였다.

3. 모의 실험 및 결론

두 독립인 이항 표본으로부터 상대비율의 신뢰구간을 추정하기 위하여 앞에서 제시했던 방법들의 효율을 비교해보기 위하여 모의 실험을 통하여 신뢰구간의 평균길이와 포함확률을 계산하였다. 각각의 방법들은 표본이 같은 경우만을 고려 p_1 하였고 표본의 크기는 20, 50, 100의 세 가지 경우를 고려하였다. 그리고 첫 번째 집단의 모수 α 의 값은 0.125, 0.25, 0.5인 경우, 두 번째 집단의 모수 p_2 의 값은 0.125, 0.25, 0.5, 0.875인 경우에 대하여 각각 $\alpha = 0.1$ (신뢰수준 90%), $\alpha = 0.05$ (신뢰수준 95%)인 경우로 나누어 평균 신뢰구간 길이와 포함확률을 계산하여 비교하여 보았다. 이 때 BC_a 방법에서 대표본 추출의 횟수는 400번으로 하고, 모든 방법에서 포함확률을 계산하기 위해 각각의 방법을 1000번씩 반복하여 실제 ϕ 값이 포함되는 경우의 수와 1000번의 신뢰구간의 길이를 평균한 값을 기록하였다. 신뢰구간을 추정하는데 있어서 p_1, p_2 가 낮은 값을 가진 경우 $\hat{p}_1 = 0$ 또는 $\hat{p}_2 = 0$ 인 경우가 발생되어 모든 방법을 Walter(1975)가 제안한대로 1/2를 양변에 추가하여 계산하였다.

모의실험 결과는 다음의 표에 요약되어 있다.

[표 3.1] $n_1 = n_2 = 20$, 신뢰수준 90%인 경우 포함확률, 평균구간길이, 평균하한과 상한

	$n_1 = 20$	$n_2 = 20$			
$p_1 = 0.125$	$\phi =$	1	2	4	7
	Noether	0.464 [6.56] (0.4868, -0.5987)	0.701 [23.66] (1.1165, 14.5927)	0.707 [31.19] (2.4586, -11.8359)	0.634 [145.39] (4.549, 157.2992)
	Katz	0.957 [3.199] (0.3552, 3.5547)	0.918 [7.1] (0.8136, 7.9176)	0.885 [14.92] (1.8224, 16.7433)	0.875 [26.18] (3.8356, 56.2037)
	Bailey	0.954 [4.039] (0.34, 4.3792)	0.911 [12.76] (0.8611, 13.6227)	0.891 [29.81] (2.0181, 31.8318)	0.828 [52.368] (3.8356, 56.2037)
	Score	0.955 [2.78] (0.3667, 3.1492)	0.911 [6.43] (0.8562, 7.2885)	0.898 [13.59] (1.9515, 15.5476)	0.908 [24.06] (3.6928, 27.7561)
	Bootstrap	0.949 [1.96] (0.4451, 2.4529)	0.912 [4.12] (1.0759, 5.6485)	0.902 [9.94] (2.5961, 12.9152)	0.912 [15.56] (5.1488, 21.0012)
	$p_1 = 0.25$	$\phi =$	$\frac{1}{2}$	1	2
Noether		0.631 [8.53] (0.2952, 7.5695)	0.893 [3.82] (0.5916, 2.9005)	0.882 [6.025] (1.3088, 4.6185)	0.869 [20.86] (2.524, 22.511)
Katz		0.957 [1.166] (0.2347, 1.4011)	0.924 [1.57] (0.5045, 2.077)	0.919 [2.837] (1.1522, 3.99)	0.901 [5.99] (2.2183, 8.2109)
Bailey		0.947 [1.177] (0.2194, 1.3965)	0.921 [1.65] (0.4958, 2.1493)	0.911 [3.25] (1.1782, 4.4327)	0.913 [8.62] (2.3225, 10.9464)
Score		0.947 [1.09] (0.236, 1.3335)	0.924 [1.54] (0.5055, 2.0513)	0.911 [2.85] (1.1759, 4.0277)	0.913 [5.88] (2.3232, 8.2067)
Bootstrap		0.941 [0.95] (0.2456, 1.211)	0.915 [1.1] (0.5111, 1.7015)	0.920 [2.13] (1.1801, 3.4009)	0.917 [4.59] (2.3335, 7.1956)
$p_1 = 0.5$		$\phi =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
	Noether	0.563 [1.25] (0.163, 0.4155)	0.895 [1.00] (0.3386, 1.2698)	0.923 [1.00] (0.7152, 1.7314)	0.874 [1.36] (1.3761, 2.7362)
	Katz	0.873 [0.46] (0.1374, 0.5996)	0.937 [0.61] (0.3048, 0.9134)	0.935 [0.83] (0.6736, 1.4972)	0.907 [1.191] (1.3223, 2.5134)
	Bailey	0.872 [0.44] (0.1265, 0.5649)	0.931 [0.604] (0.2942, 0.899)	0.930 [0.84] (0.6692, 1.5077)	0.885 [1.233] (1.3344, 2.5672)
	Score	0.886 [0.43] (0.1357, 0.5734)	0.931 [0.59] (0.2995, 0.899)	0.931 [0.84] (0.6671, 1.5109)	0.921 [1.21] (1.3535, 2.5967)
	Bootstrap	0.899 [0.35] (0.1401, 0.5127)	0.929 [0.50] (0.3124, 0.8342)	0.940 [0.78] (0.6775, 1.4194)	0.922 [1.14] (1.3512, 2.501)

[표 3.2] $n_1 = n_2 = 20$, 신뢰수준 95%인 경우 포함확률, 평균구간길이, 평균하한과 상한

	$n_1 = 20$	$n_2 = 20$			
$p_1 = 0.125$	$\phi =$	1	2	4	7
	Noether	0.236 [10.92] (0.4289,10.6548)	0.338 [21.845] (0.9820,21.4726)	0.439 [48.31] (2.1226,50.2251)	0.716 [315.65] (3.9667,345.5921)
	Katz	1 [5.00] (0.2734,5.2751)	0.999 [10.15] (0.6384,10.7939)	0.96 [21.46] (1.4014,22.8632)	0.92 [40.85] (2.6187,43.4675)
	Bailey	1 [11.049] (0.2541,11.3034)	0.995 [45.18] (0.6863,45.8721)	0.965 [115.43] (1.6171,117.05)	0.96 [239.83] (3.1301,242.96)
	Score	0.934 [3.93] (0.2908,4.1226)	0.998 [8.437] (0.6944,9.1316)	0.959 [17.949] (1.5395,19.5186)	0.92 [34.04] (3.0259,37.0682)
	Bootstrap	1 [2.11] (0.1765,2.2954)	0.962 [7.03] (0.7727,7.8064)	0.928 [13.76] (1.9683,15.7249)	0.930 [24.69] (3.9815,28.5797)
$p_1 = 0.25$	$\phi =$	$\frac{1}{2}$	1	2	$3\frac{1}{2}$
	Noether	0.273 [7.33] (0.2614,7.0972)	0.769 [12.59] (0.5307,10.5487)	0.897 [12.68] (1.2022,5.0123)	0.865 [66.65] (2.2403,67.1795)
	Katz	1 [1.72] (0.1851,1.9056)	0.988 [2.23] (0.4174,2.6539)	0.987 [4.65] (0.9769,5.6272)	0.946 [7.69] (1.8665,9.5646)
	Bailey	0.998 [1.94] (0.1653,2.1)	0.991 [2.79] (0.4055,3.1932)	0.982 [12.16] (1.0718,13.1775)	0.957 [21.68] (1.9958,23.6798)
	Score	1 [1.51] (0.1894,1.7086)	0.998 [2.11] (0.4217,2.5288)	0.984 [4.41] (1.0163,5.4319)	0.957 [7.36] (2.0167,9.3776)
	Bootstrap	0.937 [1.16] (0.1363,1.3016)	1 [1.69] (0.3032,1.9942)	0.961 [4.74] (1.0885,5.8375)	0.934 [6.12] (2.1025,8.3947)
$p_1 = 0.5$	$\phi =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{3}{4}$
	Noether	0.361 [2.6] (0.1561,2.2745)	0.849 [2.61] (0.3066,1.6163)	0.907 [1.75] (0.6631,2.3906)	0.868 [1.93] (1.2989,3.2316)
	Katz	0.943 [0.66] (0.1191,0.7772)	0.99 [0.813] (0.2605,1.0737)	0.976 [1.076] (0.6041,1.68)	0.988 [1.56] (1.2189,2.7831)
	Bailey	0.952 [0.56] (0.1046,0.7044)	0.986 [0.799] (0.2458,1.0453)	0.976 [1.1] (0.5983,1.6986)	0.964 [1.64] (1.2387,2.88)
	Score	0.946 [0.59] (0.1178,0.7138)	0.987 [0.78] (0.2548,1.043)	0.981 [1.1] (0.5948,1.7031)	0.987 [1.66] (1.2654,2.9262)
	Bootstrap	0.934 [0.48] (0.187,0.6319)	0.948 [0.70] (0.2439,0.9849)	0.962 [0.94] (0.5865,1.5294)	0.946 [1.19] (1.1985,2.3089)

[표 3.3] $n_1 = n_2 = 50$, 신뢰수준 90%인 경우 포함확률, 평균구간길이, 평균하한과 상한

	$n_1 = 50$	$n_2 = 50$			
$p_1 = 0.125$	$\phi =$	1	2	4	7
	Noether	0.848 [4.296] (0.6631,3.9751)	0.822 [6.157] (1.381,5.3081)	0.822 [12.06] (2.8517,16.6154)	0.891 [15.025] (4.9969,19.0155)
	Katz	0.928 [1.784] (0.5606,2.3447)	0.901 [3.019] (1.2057,4.2256)	0.886 [5.77] (2.5278,8.3027)	0.913 [9.304] (4.4810,13.7857)
	Bailey	0.923 [1.97] (0.562,2.5381)	0.89 [3.25] (1.2358,4.4817)	0.895 [6.725] (2.6247,9.3497)	0.908 [10.912] (4.6691,15.5816)
	Score	0.923 [1.74] (0.5679,2.3081)	0.902 [2.99] (1.2235,4.2136)	0.903 [5.69] (2.5794,8.2745)	0.908 [9.18] (4.5897,13.7792)
	Bootstrap	0.932 [1.65] (0.5702,2.2895)	0.910 [2.91] (1.2310,4.2011)	0.898 [5.62] (2.6129,8.0954)	0.912 [9.05] (4.6028,13.5945)
$p_1 = 0.25$	$\phi =$	$\frac{1}{2}$	1	2	$3 - \frac{1}{2}$
	Noether	0.814 [1.00] (0.3576,1.3419)	0.863 [1.23] (0.7295,1.9563)	0.901 [1.869] (1.5078,3.3769)	0.929 [2.73] (2.6904,5.4175)
	Katz	0.909 [0.66] (0.3193,0.9816)	0.947 [0.98] (0.6756,1.6614)	0.906 [1.6] (1.426,3.0313)	0.923 [2.43] (2.5738,5.0032)
	Bailey	0.908 [0.66] (0.3121,0.9723)	0.942 [1.00] (0.6744,1.6739)	0.902 [1.645] (1.4401,3.0859)	0.922 [2.45] (2.6109,5.110)
	Score	0.910 [0.65] (0.3194,0.9726)	0.942 [0.98] (0.6768,1.6617)	0.903 [1.617] (1.4378,3.0549)	0.922 [2.45] (2.6154,5.0685)
	Bootstrap	0.910 [0.59] (0.3200,0.9125)	0.938 [0.91] (0.6709,1.5981)	0.911 [1.60] (1.4124,3.0319)	0.917 [2.38] (2.6589,5.1011)
$p_1 = 0.5$	$\phi =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$1 - \frac{3}{4}$
	Noether	0.826 [0.37] (0.1807,0.5376)	0.881 [0.43] (0.389,0.8214)	0.886 [0.566] (0.8114,1.3776)	0.882 [0.73] (1.4821,2.214)
	Katz	0.923 [0.27] (0.1654,0.4387)	0.908 [0.38] (0.3702,0.7509)	0.901 [0.53] (0.7895,1.320)	0.887 [0.703] (1.4579,2.1608)
	Bailey	0.91 [0.27] (0.1597,0.4279)	0.895 [0.38] (0.3656,0.7458)	0.901 [0.53] (0.7885,1.3229)	0.892 [0.71] (1.4635,2.1747)
	Score	0.915 [0.26] (0.1643,0.4322)	0.895 [0.37] (0.3676,0.7463)	0.901 [0.53] (0.788,1.324)	0.893 [0.71] (1.4734,2.1895)
	Bootstrap	0.919 [0.21] (0.1632,0.3845)	0.903 [0.40] (0.3709,0.7714)	0.903 [0.52] (0.7831,1.3109)	0.900 [0.705] (1.4686,2.1599)

[표 3.4] $n_1 = n_2 = 50$, 신뢰수준 95%인 경우 포함확률, 평균구간길이, 평균하한과 상한

	$n_1 = 50$	$n_2 = 50$			
$p_1 = 0.125$	$\phi =$	1	2	4	7
	Noether	0.749 [47.629] (0.6143,41.009)	0.901 [18.186] (1.236,14.1607)	0.917 [20.077] (2.6103,8.608)	0.886 [47.748] (4.5683,-5.6928)
	Katz	0.931 [2.65] (0.4746,3.1254)	0.923 [3.962] (1.0084,4.9712)	0.915 [9.027] (2.1609,11.1878)	0.91 [12.745] (3.8693,16.6147)
	Bailey	0.927 [4.586] (0.4762,5.062)	0.927 [4.45] (1.0459,5.4962)	0.97 [24.165] (2.2987,26.464)	0.888 [21.741] (4.1303,25.8714)
	Score	0.927 [2.491] (0.4884,2.979)	0.936 [3.88] (1.0366,4.9167)	0.903 [8.398] (2.2463,10.6444)	0.903 [12.347] (4.0423,16.390)
	Bootstrap	1 [1.693] (0.3293,2.0227)	0.979 [4.05] (1.1048,5.0126)	0.933 [9.095] (2.4065,11.5011)	0.939 [13.414] (4.4697,17.8839)
	$p_1 = 0.25$	$\phi =$	$\frac{1}{2}$	1	2
Noether		0.828 [5.010] (0.3176,4.9519)	0.895 [2.027] (0.6773,2.7049)	0.914 [2.891] (1.14185,4.3095)	0.927 [4.033] (2.5357,6.5685)
Katz		0.944 [0.871] (0.2663,1.1382)	0.942 [1.319] (0.6003,1.9197)	0.946 [2.125] (1.2998,3.4253)	0.928 [3.249] (2.3607,5.6097)
Bailey		0.931 [0.864] (0.2557,1.1198)	0.938 [1.348] (0.5988,1.9475)	0.944 [2.213] (1.3216,3.5346)	0.925 [3.402] (2.4186,5.8207)
Score		0.942 [0.848] (0.2677,1.1157)	0.928 [1.312] (0.6035,1.9159)	0.944 [2.142] (1.3193,3.4615)	0.927 [3.2869] (2.4280,5.1494)
Bootstrap		0.954 [0.78] (0.2059,1.009)	0.954 [1.19] (0.562,1.7102)	0.962 [2.15] (1.3418,3.4899)	0.955 [3.31] (2.233,5.652)
$p_1 = 0.5$		$\phi =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
	Noether	0.891 [0.685] (0.1671,0.7611)	0.926 [0.617] (0.3634,0.9813)	0.933 [0.759] (0.7595,1.5191)	0.916 [0.967] (1.4177,2.3848)
	Katz	0.943 [0.364] (0.1458,0.5101)	0.946 [0.495] (0.3362,0.8319)	0.925 [0.6817] (0.7269,1.4087)	0.934 [0.907] (1.3906,2.2876)
	Bailey	0.956 [0.352] (0.1375,0.4898)	0.942 [0.493] (0.3294,0.8224)	0.925 [0.6877] (0.7255,1.4132)	0.932 [0.921] (1.3897,2.3113)
	Score	0.937 [0.351] (0.1447,0.4960)	0.943 [0.489] (0.3328,0.8227)	0.925 [0.69] (0.7246,1.4152)	0.937 [0.932] (1.4043,2.3362)
	Bootstrap	0.955 [0.31] (0.103,0.4214)	0.962 [0.42] (0.3189,0.7921)	0.953 [0.599] (0.7015,1.3102)	0.947 [0.91] (1.3749,2.2801)

[표 3.5] $n_1 = n_2 = 100$, 신뢰수준 90%인 경우 포함확률, 평균구간길이, 평균하한과 상한

	$n_1 = 100$	$n_2 = 100$			
$p_1 = 0.125$	$\phi =$	1	2	4	7
	Noether	0.907 [1.43] (0.7313, 2.16)	0.937 [2.235] (1.4894, 3.7246)	0.93 [3.856] (3.0493, 6.9054)	0.927 [5.88] (5.2494, 11.1327)
	Katz	0.898 [1.105] (0.6687, 1.7737)	0.929 [1.85] (1.3894, 3.2392)	0.913 [3.31] (2.8776, 6.1854)	0.932 [5.16] (4.9902, 10.1489)
	Bailey	0.881 [1.12] (0.6686, 1.7892)	0.918 [1.89] (1.4046, 3.2993)	0.911 [3.41] (2.9256, 6.3318)	0.928 [5.32] (5.081, 10.3983)
	Score	0.895 [1.09] (0.6715, 1.7684)	0.928 [1.84] (1.3973, 3.2425)	0.909 [3.3] (2.9013, 6.2089)	0.928 [5.16] (5.0405, 10.2041)
	Bootstrap	0.901 [1.05] (0.6691, 1.7234)	0.926 [1.81] (1.3914, 3.2191)	0.910 [3.31] (2.9278, 6.1818)	0.932 [5.15] (5.0512, 10.2051)
	$p_1 = 0.25$	$\phi =$	$\frac{1}{2}$	1	2
Noether		0.922 [0.511] (0.3808, 0.8922)	0.924 [0.73] (0.7839, 1.5142)	0.923 [1.169] (1.6436, 2.8127)	0.907 [1.755] (2.8869, 4.6418)
Katz		0.903 [0.441] (0.3578, 0.7942)	0.905 [0.664] (0.7525, 1.4169)	0.916 [1.09] (1.597, 2.6932)	0.903 [1.667] (2.8211, 4.4882)
Bailey		0.889 [0.435] (0.3536, 0.7887)	0.905 [0.668] (0.7518, 1.4201)	0.916 [1.11] (1.6051, 2.7134)	0.904 [1.689] (2.8419, 4.531)
Score		0.893 [0.43] (0.3575, 0.7908)	0.905 [0.664] (0.7528, 1.417)	0.918 [1.10] (1.6037, 2.7044)	0.906 [1.67] (2.8435, 4.519)
Bootstrap		0.904 [0.431] (0.3594, 0.7991)	0.904 [0.66] (0.7275, 1.4019)	0.910 [1.09] (1.6078, 2.7101)	0.898 [1.65] (2.8295, 4.5089)
$p_1 = 0.5$		$\phi =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
	Noether	0.932 [0.21] (0.1915, 0.4033)	0.916 [0.277] (0.4055, 0.6828)	0.908 [0.38] (0.8544, 1.236)	0.891 [0.5] (1.5526, 2.0544)
	Katz	0.928 [0.187] (0.1822, 0.3693)	0.905 [0.26] (0.3947, 0.6557)	0.921 [0.37] (0.8422, 1.212)	0.9 [0.49] (1.5393, 2.0316)
	Bailey	0.93 [0.185] (0.1789, 0.3643)	0.903 [0.26] (0.3922, 0.6529)	0.921 [0.37] (0.8418, 1.2129)	0.908 [0.495] (1.5425, 2.0375)
	Score	0.925 [0.185] (0.1814, 0.3666)	0.904 [0.26] (0.3931, 0.6533)	0.921 [0.37] (0.8416, 1.2133)	0.904 [0.49] (1.5479, 2.0449)
	Bootstrap	0.917 [0.184] (0.1809, 0.3658)	0.904 [0.27] (0.3970, 0.660)	0.917 [0.372] (0.8420, 1.2121)	0.908 [0.49] (1.5378, 2.0358)

[표 3.6] $n_1 = n_2 = 100$, 신뢰수준 95%인 경우 포함확률, 평균구간길이, 평균하한과 상한

	$n_1 = 100$	$n_2 = 100$			
$p_1 = 0.125$	$\phi =$	1	2	4	7
	Noether	0.911 [2.32] (0.6625,2.9826)	0.927 [3.376] (1.3693,4.7453)	0.937 [5.624] (2.7871,8.4111)	0.985 [9.285] (5.008,14.293)
	Katz	0.922 [1.419] (0.5784,1.9974)	0.922 [2.393] (1.2305,3.6238)	0.948 [4.215] (2.5489,6.7642)	0.984 [7.071] (4.6144,11.6861)
	Bailey	0.908 [1.447] (0.5772,2.0249)	0.915 [2.485] (1.2516,3.737)	0.944 [4.419] (2.6167,7.0366)	0.988 [7.445] (4.7567,12.2053)
	Score	0.928 [1.399] (0.5834,1.9828)	0.919 [2.379] (1.2516,3.737)	0.944 [4.206] (2.5868,6.7932)	0.984 [7.064] (4.70,11.764)
	Bootstrap	0.932 [1.01] (0.5677,1.6677)	0.938 [2.12] (1.2109,3.4028)	0.950 [4.25] (2.5984,6.7210)	0.981 [6.98] (4.6512,11.0284)
	$p_1 = 0.25$	$\phi =$	$\frac{1}{2}$	1	2
Noether		0.917 [0.76] (0.3529,1.1127)	0.947 [1.015] (0.7343,1.7501)	0.958 [1.542] (1.5242,3.0671)	0.953 [2.34] (2.744,5.0875)
Katz		0.932 [0.57] (0.3202,0.8910)	0.952 [0.864] (0.6883,1.5523)	0.952 [1.386] (1.4566,2.8429)	0.951 [2.15] (2.6453,4.7977)
Bailey		0.938 [0.567] (0.3138,0.8812)	0.945 [0.871] (0.6873,1.5585)	0.941 [1.408] (1.4684,2.8773)	0.951 [2.19] (2.6773,4.8736)
Score		0.948 [0.563] (0.3202,0.8835)	0.951 [0.862] (0.6894,1.5514)	0.961 [1.39] (1.4669,2.8602)	0.955 [2.16] (2.6814,4.8482)
Bootstrap		0.951 [0.5] (0.3109,0.8222)	0.961 [0.88] (0.6789,1.5623)	0.960 [1.38] (1.4557,2.8569)	0.955 [2.159] (2.6935,4.8415)
$p_1 = 0.5$		$\phi =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
	Noether	0.934 [0.3] (0.177,0.4812)	0.948 [0.37] (0.3842,0.7568)	0.945 [0.5] (0.8219,1.3231)	0.961 [0.64] (1.489,2.129)
	Katz	0.945 [0.243] (0.1635,0.4071)	0.960 [0.337] (0.368,0.705)	0.950 [0.476] (0.8032,1.2796)	0.966 [0.62] (1.4689,2.09)
	Bailey	0.923 [0.239] (0.1587,0.398)	0.956 [0.336] (0.3642,0.7)	0.938 [0.478] (0.8026,1.2811)	0.956 [0.625] (1.4738,2.0997)
	Score	0.942 [0.238] (0.1627,0.4017)	0.958 [0.334] (0.3659,0.7)	0.958 [0.479] (0.8022,1.2819)	0.954 [0.629] (1.4822,2.1122)
	Bootstrap	0.948 [0.24] (0.163,0.4022)	0.952 [0.339] (0.3648,0.6985)	0.958 [0.47] (0.8029,1.2755)	0.949 [0.631] (1.4795,2.102)

[표 3.5] $n_1 = n_2 = 100$, 신뢰수준 90%인 경우 포함확률, 평균구간길이, 평균하한과 상한

	$n_1 = 100$	$n_2 = 100$			
$p_1 = 0.125$	$\phi =$	1	2	4	7
	Noether	0.907 [1.43] (0.7313,2.16)	0.937 [2.235] (1.4894,3.7246)	0.93 [3.856] (3.0493,6.9054)	0.927 [5.88] (5.2494,11.1327)
	Katz	0.898 [1.105] (0.6687,1.7737)	0.929 [1.85] (1.3894,3.2392)	0.913 [3.31] (2.8776,6.1854)	0.932 [5.16] (4.9902,10.1489)
	Bailey	0.881 [1.12] (0.6686,1.7892)	0.918 [1.89] (1.4046,3.2993)	0.911 [3.41] (2.9256,6.3318)	0.928 [5.32] (5.081,10.3983)
	Score	0.895 [1.09] (0.6715,1.7684)	0.928 [1.84] (1.3973,3.2425)	0.909 [3.3] (2.9013,6.2089)	0.928 [5.16] (5.0405,10.2041)
	Bootstrap	0.901 [1.05] (0.6691,1.7234)	0.926 [1.81] (1.3914,3.2191)	0.910 [3.31] (2.9278,6.1818)	0.932 [5.15] (5.0512,10.2051)
	$p_1 = 0.25$	$\phi =$	$\frac{1}{2}$	1	2
Noether		0.922 [0.511] (0.3808,0.8922)	0.924 [0.73] (0.7839,1.5142)	0.923 [1.169] (1.6436,2.8127)	0.907 [1.755] (2.8869,4.6418)
Katz		0.903 [0.441] (0.3578,0.7942)	0.905 [0.664] (0.7525,1.4169)	0.916 [1.09] (1.597,2.6932)	0.903 [1.667] (2.8211,4.4882)
Bailey		0.889 [0.435] (0.3536,0.7887)	0.905 [0.668] (0.7518,1.4201)	0.916 [1.11] (1.6051,2.7134)	0.904 [1.689] (2.8419,4.531)
Score		0.893 [0.43] (0.3575,0.7908)	0.905 [0.664] (0.7528,1.417)	0.918 [1.10] (1.6037,2.7044)	0.906 [1.67] (2.8435,4.519)
Bootstrap		0.904 [0.431] (0.3594,0.7991)	0.904 [0.66] (0.7275,1.4019)	0.910 [1.09] (1.6078,2.7101)	0.898 [1.65] (2.8295,4.5089)
$p_1 = 0.5$		$\phi =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
	Noether	0.932 [0.21] (0.1915,0.4033)	0.916 [0.277] (0.4055,0.6828)	0.908 [0.38] (0.8544,1.236)	0.891 [0.5] (1.5526,2.0544)
	Katz	0.928 [0.187] (0.1822,0.3693)	0.905 [0.26] (0.3947,0.6557)	0.921 [0.37] (0.8422,1.212)	0.9 [0.49] (1.5393,2.0316)
	Bailey	0.93 [0.185] (0.1789,0.3643)	0.903 [0.26] (0.3922,0.6529)	0.921 [0.37] (0.8418,1.2129)	0.908 [0.495] (1.5425,2.0375)
	Score	0.925 [0.185] (0.1814,0.3666)	0.904 [0.26] (0.3931,0.6533)	0.921 [0.37] (0.8416,1.2133)	0.904 [0.49] (1.5479,2.0449)
	Bootstrap	0.917 [0.184] (0.1809,0.3658)	0.904 [0.27] (0.3970,0.660)	0.917 [0.372] (0.8420,1.2121)	0.908 [0.49] (1.5378,2.0358)

[표 3.6] $n_1 = n_2 = 100$, 신뢰수준 95%인 경우 포함확률, 평균구간길이, 평균하한과 상한

	$n_1 = 100$	$n_2 = 100$			
$p_1 = 0.125$	$\phi =$	1	2	4	7
	Noether	0.911 [2.32] (0.6625,2.9826)	0.927 [3.376] (1.3693,4.7453)	0.937 [5.624] (2.7871,8.4111)	0.985 [9.285] (5.008,14.293)
	Katz	0.922 [1.419] (0.5784,1.9974)	0.922 [2.393] (1.2305,3.6238)	0.948 [4.215] (2.5489,6.7642)	0.984 [7.071] (4.6144,11.6861)
	Bailey	0.908 [1.447] (0.5772,2.0249)	0.915 [2.485] (1.2516,3.737)	0.944 [4.419] (2.6167,7.0366)	0.988 [7.445] (4.7567,12.2053)
	Score	0.928 [1.399] (0.5834,1.9828)	0.919 [2.379] (1.2516,3.737)	0.944 [4.206] (2.5868,6.7932)	0.984 [7.064] (4.70,11.764)
	Bootstrap	0.932 [1.01] (0.5677,1.6677)	0.938 [2.12] (1.2109,3.4028)	0.950 [4.25] (2.5984,6.7210)	0.981 [6.98] (4.6512,11.0284)
$p_1 = 0.25$	$\phi =$	$\frac{1}{2}$	1	2	$3\frac{1}{2}$
	Noether	0.917 [0.76] (0.3529,1.1127)	0.947 [1.015] (0.7343,1.7501)	0.958 [1.542] (1.5242,3.0671)	0.953 [2.34] (2.744,5.0875)
	Katz	0.932 [0.57] (0.3202,0.8910)	0.952 [0.864] (0.6883,1.5523)	0.952 [1.386] (1.4566,2.8429)	0.951 [2.15] (2.6453,4.7977)
	Bailey	0.938 [0.567] (0.3138,0.8812)	0.945 [0.871] (0.6873,1.5585)	0.941 [1.408] (1.4684,2.8773)	0.951 [2.19] (2.6773,4.8736)
	Score	0.948 [0.563] (0.3202,0.8835)	0.951 [0.862] (0.6894,1.5514)	0.961 [1.39] (1.4669,2.8602)	0.955 [2.16] (2.6814,4.8482)
	Bootstrap	0.951 [0.5] (0.3109,0.8222)	0.961 [0.88] (0.6789,1.5623)	0.960 [1.38] (1.4557,2.8569)	0.955 [2.159] (2.6935,4.8415)
$p_1 = 0.5$	$\phi =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{3}{4}$
	Noether	0.934 [0.3] (0.177,0.4812)	0.948 [0.37] (0.3842,0.7568)	0.945 [0.5] (0.8219,1.3231)	0.961 [0.64] (1.489,2.129)
	Katz	0.945 [0.243] (0.1635,0.4071)	0.960 [0.337] (0.368,0.705)	0.950 [0.476] (0.8032,1.2796)	0.966 [0.62] (1.4689,2.09)
	Bailey	0.923 [0.239] (0.1587,0.398)	0.956 [0.336] (0.3642,0.7)	0.938 [0.478] (0.8026,1.2811)	0.956 [0.625] (1.4738,2.0997)
	Score	0.942 [0.238] (0.1627,0.4017)	0.958 [0.334] (0.3659,0.7)	0.958 [0.479] (0.8022,1.2819)	0.954 [0.629] (1.4822,2.1122)
	Bootstrap	0.948 [0.24] (0.163,0.4022)	0.952 [0.339] (0.3648,0.6985)	0.958 [0.47] (0.8029,1.2755)	0.949 [0.631] (1.4795,2.102)

독립인 두 이항 집단으로부터 상대비율의 신뢰구간 추정방법들간의 차이는 모의 실험에서 가정한 p_1 , p_2 값과 표본의 크기에 따라 다음과 같이 얻어졌다.

첫 번째로 $n_1 = n_2 = 20$ 혹은 50인 경우에는 Noether의 방법을 제외한 나머지 방법들의 포함 확률은 90%, 95% 수준을 대체로 잘 유지하고 있다고 할 수 있다. 특히 p_1 의 값이 작을 때와 ϕ 의 값이 클 때 BC_a 붓스트랩 방법이 다른 방법에 비해 평균구간 길이가 가장 짧음을 알 수 있다.

두 번째로 $n_1 = n_2 = 100$ 인 경우에는 Noether 방법을 포함한 모든 방법에 있어서 포함확률 90%와 95% 수준을 거의 정확하게 유지하였고 신뢰구간의 평균구간 길이도 거의 비슷하게 나타났다. 즉, 표본의 크기(n_1 , n_2)가 클 때는 어느 방법을 이용하든지 신뢰구간 추정에 대한 결과가 비슷하게 얻어지지만, 표본의 크기(n_1 , n_2)가 작을 때는 BC_a 붓스트랩 방법이 다른 어떤 방법을 이용하는 것보다도 ϕ 에 관한 정보를 가장 잘 보여주고 있음을 알 수 있다. 또한 모비율이 작을 때는 물론 모비율이 어느 정도 크더라도 두 모비율간에 차이가 클 때 BC_a 붓스트랩 방법을 이용하는 것이 효율적임을 알 수 있다. 이런 결과를 통해 BC_a 붓스트랩 방법이 의학이나 약학 분야에 사망률이 극히 높거나 치료율이 극히 낮은 경우에 상대비율을 추정하는 문제나 독립이 아닌 두 이항 집단의 상대비율 추정에도 응용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Bailey, B.J.R. (1987). Confidence Limits to the Risk Ratio. *Biometrics* 43, 201-205.
- [2] Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Ann. Statist.* 7, 1-26
- [3] Gart, J.J. and Nam, J. (1988). Approximate Interval Estimation of the Ratio of binomial parameters: A review and corrections for skewness. *Biometrics* 44, 323-338.
- [4] Katz, D., Baptista, J., Azen, S.P., Pike, M.C. (1978). Obtaining confidence intervals for the risk ratio in cohort studies. *Biometrics* 34, 469-474.
- [5] Koopman, P.A.R. (1984). Confidence intervals for the ratio of two binomial proportions. *Biometrics* 40, 513-517.
- [6] Miettinen, O. and Nurminen, M. (1985). Comparative analysis of two rates. *Statistics in Medicine* 4, 213-220.
- [7] Nam, J. (1995). Confidence limits for the ratio of two binomial proportions based on likelihood score : Non-iterative method. *Biometrics* 37, 375-379.
- [8] Noether, G.E. (1957). Two confidence intervals for the ratio of two probabilities and some measures of effectiveness. *Journal of the American Statistical Association* 73, 386-394.
- [9] Walter, S.D. (1975). The distribution of Levin's measure of attributable risk. *Biometrika* 62, 371-375.