

A Model for a State-Dependent Deteriorating System

Jiyeon Lee¹⁾

Abstract

A model for a system whose deteriorating rate depends on the state is introduced. A repairman arrives according to Poisson process and increases the state of the system by the random amount if the state is below a threshold. If the system fails at arrival of the repairman it is assumed that the system is replaced by new one. The stationary distribution function of the state of the system and the expected life length of the system are deduced.

1. 서론

시간이 흐름에 따라 점차 상태가 나빠지는 시스템의 신뢰도를 분석하기 위해 상태의 악화 과정에 적합한 확률 모형을 설정하여 분석하는 다양한 시스템 모형이 소개되었다. 예를 들면, 일정한 속도로 나빠지는 모형(Baxter and Lee (1987a), Lee and Lee(1997)), 확산 과정(diffusion process)을 따르면서 악화되는 모형(Baxter and Lee(1987b)), 임의로 발생하는 충격으로 인해 상태가 나빠지는 모형(Lee and Lee(1993)) 등이 있다.

본 논문에서는 Baxter and Lee(1987a)와 Lee and Lee(1997)가 제안한 일정하게 악화되는 모형을 좀 더 확장하여 시스템의 악화율(deteriorating rate)이 상태에 따라 달라지는 모형을 고려한다. β 를 시스템 초기의 완벽한 상태라고 하고 0을 고장난 상태라고 하자. $X(t)$ 를 시간 t 에서의 시스템의 상태라고 하면 $0 \leq X(t) \leq \beta$ 이고 이 때 시스템의 악화율은 $r(X(t))$ 가 된다. 여기서 $r(x)$ 는 상태 x 의 음이 아닌 감소 함수로써 상태가 나쁠 수록 악화율이 높아지는 것을 나타내고 $r(0)=0$ 으로 고장난 시스템은 더 이상 나빠지지 않음을 가정한다. 이 시스템을 관리하기 위해 수리인이 시간당 평균 λ 의 포아송 과정으로 도착한다. 도착해서 시스템을 점검했을 때 상태가 적정 수준(threshold) α ($0 < \alpha < \beta$) 위에 있으면 그냥 놓아 두고, 아래에 있으면 시스템을 수리(불완전수리, imperfect repair)하여 상태를 적정수준 α 이상으로 올린다. 이 때, 수리인의 수리 양(repair amount)을 확률 변수 Y 로 나타내고 그 분포는 G 라고 하자. 만약, 점검때 시스템이 완전히 고장나 있으면 새 시스템으로 교체(replace) 또는 완전 수리(perfect repair)를 한다. 2절에서는 이 시스템의 상태 $X(t)$ 의 정상 분포(stationary distribution)의 존재 조건을 찾고 그 조건하에서 up and downcrossing argument를 이용하여 정상 확률 분포 함수를 구한다. 그리고 3절에서는 시스템의 평균 수명과 상태 x 에서의 시스템의 평균 잔여 수명을 계산한다.

여기서 $\{t_n, n \geq 1\}$ 를 수리인의 n 번째 도착 시점이라고 하면 $X(t)$ 의 샘플 경로(sample path)

1 영남대학교 이과대학 통계학과 조교수, [712-749] 경북 경산시 대동 214-1.

는 이 점들에서 이산인 값을 가지고 그 사이는 연속인 함수가 된다. 즉,

$$X(t_n) = \begin{cases} X(t_n^-) + Y, & \text{if } X(t_n^-) \leq \alpha, \quad \alpha < X(t_n^-) + Y < \beta, \\ \beta, & \text{if } X(t_n^-) = 0 \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots$$

이고 t_{n-1} 과 t_n 사이의 $X(t)$ 는 다음 미분방정식의 해가 됨을 알 수 있다.

$$\frac{dX(t)}{dt} = -r(X(t)).$$

본 논문에서 제안되는 모형은 재고량에 따라 수요율이 달라지는 재고 모형이나, 방출 속도가 템의 물의 양에 의해 결정되는 유한 템 모형 또는 서비스 속도가 가상 대기 시간(virtual waiting time)에 의해 결정되는 유한 대기 모형(Browne and Sigman(1992), Perry and Asmussen(1995))등에 적용될 수 있다.

2. 정상 확률 분포 함수

정리 2.1 만약 수리 양의 분포 G 와 시스템의 고장을 함수 r 이 주어져 있고 $\lambda\beta < r(\beta)$ 이면 $\{X(t), t \geq 0\}$ 는 상태 0를 재생점(regeneration point)으로 하는 양의 재귀적 재생 과정(positive recurrent regenerative process)이 된다

증명

$$\begin{aligned} E_x[X(dt)] &= E[X(dt)|X(0)=x] \\ &= \begin{cases} \lambda dt E[x+Y; \alpha < x+Y < \beta] + (1-\lambda dt)(x-r(x)dt) + o(dt), & 0 < x \leq \alpha \\ x - r(x)dt + o(dt), & \alpha < x \leq \beta. \end{cases} \end{aligned}$$

따라서 이 시스템의 the instantaneous drift function $m(x)$ 는

$$\begin{aligned} m(x) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{E_x[X(dt)] - x}{dt} \\ &= \begin{cases} -r(x) + \lambda E[Y; \alpha < x+Y < \beta] - \lambda x [1 - P\{\alpha < x+Y < \beta\}], & 0 < x \leq \alpha \\ -r(x), & \alpha < x \leq \beta \end{cases} \end{aligned}$$

가 된다. $r(x)$ 가 음이 아닌 감소 함수이므로 만약 $\lambda\beta < r(\beta)$ $\{X(t), t \geq 0\}$ 이면 모든 x 에 대하여 $m(x) < 0$ 이 된다. 따라서 Browne and Sigman(1992)에 의해 는 상태 0를 재생점으로 하는 양의 재귀적 재생 과정이 된다.

위 정리의 조건식 $\lambda\beta < r(\beta)$ 을 보면 왼쪽은 시간당 최대 수리양에 관한 식이고 오른쪽은 상태 β 에서의 악화율로 최소 악화율을 나타낸다. 즉, 악화되는 정도가 수리되는 정도보다 큰 경우는 $\{X(t), t \geq 0\}$ 는 정리 2.1에 의해 양의 재귀적 재생과정이 되고 따라서 유일한 정상 확률 분포를 갖게 된다 (Asmussen(1987)). 한편 $\{X(t), t \geq 0\}$ 는 상태 0에서 이산 확률을 가지기 때문에 정상 상태에서도 이산 확률을 가지므로 그 확률을 p_0 라고 하고 그 이외의 $x, 0 < x \leq \beta$ 에서 정의되는 정상 확률 밀도 함수를 $f(x)$ 라고 하자.

정리 2.2 정리 2.1의 조건 하에서 $f(x)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$f(x) = p_0 K(x, 0) + \int_0^x K(x, y) f(y) dy \quad (2.1)$$

여기서

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{\lambda I_{\{y < \alpha\}} [G(\beta - y) - G(\max(\alpha, x) - y)]}{r(x)}, & 0 < y \leq x, \quad x > 0 \\ \frac{\lambda}{r(x)}, & y = 0 \\ 0, & y > x. \end{cases}$$

이고 I_A 는 지시 확률 변수(indicator random variable)이다. 즉,

$$I_A = \begin{cases} 1, & A \text{가 일어나면} \\ 0, & A \text{가 일어나지 않으면.} \end{cases}$$

로 정의되는 확률 변수이다.

증명 정상 상태에서 시간 구간 $[t, t+dt]$ 사이에 상태 x 를 아래로 가로지르는 비율(downcrossing rate)은 $r(x)f(x)dt$ 이다. 그리고 x 를 위로 가로지르는 비율(upcrossing rate)은 $u(x)dt$ 이다. 여기서

$$u(x) = \begin{cases} \lambda p_0 + \lambda \int_0^x [G(\beta - y) - G(\alpha - y)] f(y) dy, & 0 < x \leq \alpha \\ \lambda p_0 + \lambda \int_0^\alpha [G(\beta - y) - G(x - y)] f(y) dy, & \alpha < x \leq \beta \end{cases}$$

이고 다음과 같이 정리된다.

$$u(x) = \lambda p_0 + \lambda \int_0^x I_{\{y < \alpha\}} [G(\beta - y) - G(\max(\alpha, x) - y)] f(y) dy.$$

Cohen(1977)에 의해 정상 상태에서는 두 비율이 일치함으로 식 (2.1)을 얻을 수 있다. \square

4절의 예제1과 같은 특수한 경우들을 제외하고 식 (2.1)로부터 해 $f(x)$ 를 바로 구하는 것은 불가능하다. 그래서 모든 경우에 적용이 가능한 Asmussen(1987)의 반복 방법(the iteration method)을 사용하여 식 (2.1)의 해를 찾아 보자. 먼저 다음과 같이 $K^{(n)}(x, y)$ 와 $K^*(x, y)$ 를 정의한다.

$$\begin{aligned} K^{(1)}(x, y) &= K(x, y) \\ K^{(n+1)}(x, y) &= \int_y^x K(x, z) K^{(n)}(z, y) dz, \quad n = 1, 2, \dots \\ K^*(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(x, y) \end{aligned}$$

그러면

정리 2.3 정리 2.1의 조건 하에서

$$\begin{aligned} f(x) &= p_0 K^*(x, 0) \\ p_0 &= [1 + \int_0^\beta K^*(z, 0) dz]^{-1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

가 된다.

증명 모든 $0 \leq x, y \leq \beta$ 에 대하여 $K(x, y) \leq \frac{\lambda}{r(\beta)}$ 이기 때문에 귀납적으로

$$K^{(n)}(x, y) \leq \frac{\lambda^n \beta^{n-1}}{r(\beta)^n}$$

를 만족한다. 따라서 $\frac{\lambda \beta}{r(\beta)} < 1$ 이면 모든 x, y 에 대하여 $K^*(x, y) < \infty$ 임을 알 수 있다. 한편, 식

(2.1)을 $N-1$ 번 반복하여 대입하면

$$f(x) = p_0 \sum_{n=1}^N K^{(n)}(x, 0) + \int_0^x K^{(n)}(x, y) f(y) dy$$

이 되고 $N \rightarrow \infty$ 일 때 the bounded convergence theorem에 의해

$$f(x) = p_0 K^*(x, 0)$$

을 얻는다. 또한 $p_0 + \int_0^\beta f(x) dx = 1$ 로부터

$$p_0 = [1 + \int_0^\beta K^*(x, 0) dx]^{-1}$$

을 구할 수 있다. □

정리 2.3으로부터 정상 분포의 존재 조건 $\lambda \beta < r(\beta)$ 를 만족하면 반복 방법을 이용하여 시스템의 상태에 대한 정상 확률 밀도 함수 $f(x)$ 와 p_0 를 식 (2.2)와 같이 구할 수 있다.

3. 평균 수명

본 절에서는 이 시스템의 평균 수명을 구해 본다. 이 시스템의 수명이란 초기 상태 β 에서 처음으로 상태 0에 이르는데 걸리는 시간 (the first passage time to state 0)과 일치한다. $S(x)$ 를 상태 x ($0 \leq x \leq \beta$)에서 처음으로 상태 0에 이르는 평균 시간이라고 하고 $T(x)$ 를 상태 x ($0 \leq x \leq \alpha$)에서 처음으로 상태 0에 이르는 평균 시간이라고 하자. 그러면, 정리 2.1의 조건하에서 $S(x) < \infty$ 이고

$$S(0) = T(0) = 0,$$

$$S(x) = \begin{cases} T(x), & 0 < x \leq \alpha \\ \int_\alpha^x \frac{1}{r(y)} dy + T(\alpha), & \alpha < x \leq \beta. \end{cases} \tag{3.1}$$

가 성립한다. 여기서 $S(\beta)$ 는 시스템의 평균 수명을 나타내고 $S(x)$ 는 상태 x 에 있는 시스템의 평균 잔여 수명(the mean residual life)을 나타낸다.

먼저 $T(x)$ 를 구하기 위해 상태 구간 $[x-dx, x]$ 에서 수리가 일어나는지 아닌지의 여부로 조건부 확률을 생각하면

$$\begin{aligned} T(x) &= \lambda \int_{x-dx}^x \frac{1}{r(y)} dy E[T(x-dx+Y); \alpha < x - dx + Y < \beta] \\ &\quad + [1 - \lambda \int_{x-dx}^x \frac{1}{r(y)} dy P\{\alpha < x + Y < \beta\}] [\int_{x-dx}^x \frac{1}{r(y)} dy + T(x-dx)] + o(dx). \end{aligned}$$

를 구할 수 있다. 이 식을 정리한 후 양변을 dx 로 나누고 $dx \rightarrow 0$ 로 하면 $T(x)$ 에 대한 다음과 같은 미분방정식을 얻는다.

$$T'(x) = \lambda \frac{h(x)}{r(x)} + \lambda k(x)[T(\alpha) - T(x)] + \frac{1}{r(x)}, \quad (3.2)$$

여기서

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_a^\beta \frac{1}{r(z)} [G(\beta-x) - G(z-x)] dz \\ k(x) &= \frac{1}{r(x)} [G(\beta-x) - G(\alpha-x)] \end{aligned}$$

이다. 식 (3.2)를 초기 조건 $T(0)=0$ 에 의해 풀면

$$T(x) = \exp\{-\lambda \int_0^x k(y) dy\} \int_0^x [\lambda \frac{h(y)}{r(y)} + \lambda T(\alpha)k(y) + \frac{1}{r(y)}] \exp\{\lambda \int_0^y k(z) dz\} dy \quad (3.3)$$

를 얻는다.

위의 식에서 $x=\alpha$ 를 대입하여 $T(\alpha)$ 에 대해 정리하면

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= [\exp\{\lambda \int_0^\alpha k(y) dy\} - \lambda \int_0^\alpha k(y) \exp\{\lambda \int_0^y k(z) dz\} dy]^{-1} \\ &\quad \int_0^\alpha \frac{\lambda h(y) + 1}{r(y)} \exp\{\lambda \int_0^y k(z) dz\} dy \end{aligned}$$

가 되고 여기서

$$\begin{aligned} \exp\{\lambda \int_0^\alpha k(y) dy\} &- \lambda \int_0^\alpha k(y) \exp\{\lambda \int_0^y k(z) dz\} dy \\ &= \exp\{\lambda \int_0^\alpha k(y) dy\} - \int_0^\alpha \frac{d}{dy} \exp\{\lambda \int_0^y k(z) dz\} dy \\ &= 1 \end{aligned}$$

이므로

$$T(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\lambda h(y) + 1}{r(y)} \exp\{\lambda \int_0^y k(z) dz\} dy \quad (3.4)$$

가 된다. 그러므로 식 (3.1), (3.3)과 (3.4)로부터 이 시스템의 평균 수명

$$S(\beta) = \int_a^\beta \frac{1}{r(y)} dy + T(\alpha) \text{와 평균 잔여 수명 } S(x), 0 \leq x < \beta \text{를 구할 수 있다.}$$

4. 예제

본 절에서는 2절과 3절에서 얻은 결과를 이용하여 재고량에 따라 수요가 달라지는 재고 모형(예제 1)과 어떤 상태를 기준으로 시스템이 급속히 악화되는 시스템 모형(예제 2)에 대한 정상 확률 분포와 평균 수명 및 평균 잔여 수명을 구해 본다.

예제 1. Lee and Park(1989)이 다루었던 일정한 수요가 있는 재고모형을 확장하여 재고량에 따라 수요율이 달라지는 재고모형을 고려한다. 그 수요율이 적정수준 α 를 기준으로

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ r_1, & 0 < x \leq \alpha \\ r_2, & \alpha < x \leq \beta, \end{cases}$$

이고 시간당 평균 λ 인 포아송 과정으로 이 재고 상태를 조사하여 적정수준 α 이하이면 초기 상태 β 로 보충한다.

이 경우 정리 2.2로 부터

$$\begin{aligned} r_1 f(x) &= \lambda F(x), \quad 0 < x \leq \alpha \\ r_2 f(x) &= \lambda F(\alpha), \quad \alpha < x \leq \beta \end{aligned}$$

를 얻고 여기서 $F(x) = p_0 + \int_0^x f(y)dy$ 는 누적 확률 분포 함수이다. 위의 식을 $x=\alpha$ 에서 $F(x)$ 의

연속성과 $F(\beta)=1$ 의 조건을 이용하여 풀면

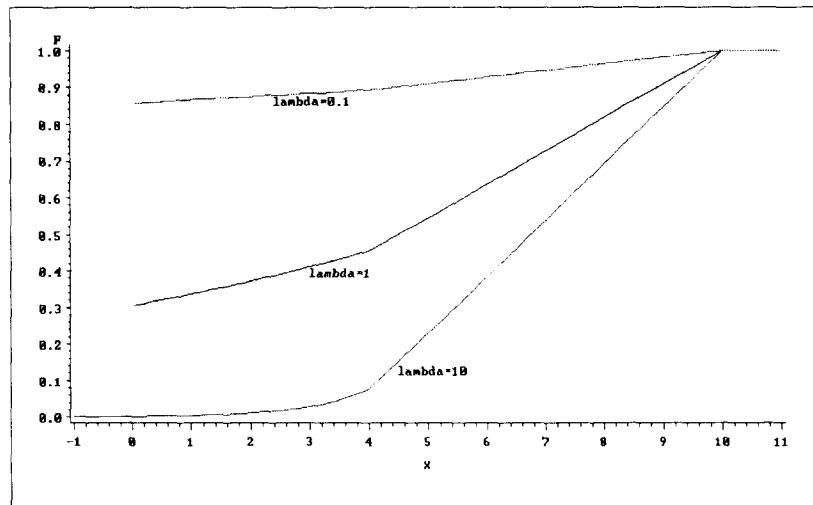
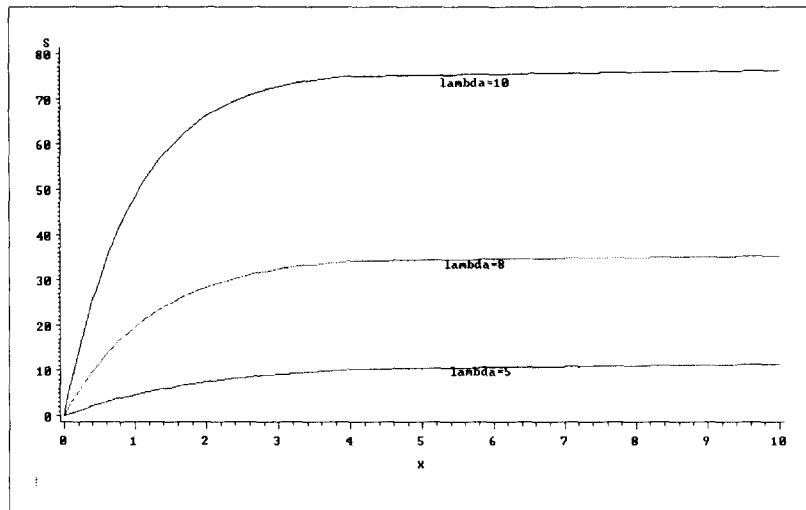
$$F(x) = \begin{cases} \frac{r_2}{r_2 + \lambda(\beta - \alpha)} \exp\left\{-\frac{\lambda}{r_1}(\alpha - x)\right\}, & 0 \leq x \leq \alpha \\ \frac{r_2 + \lambda(x - \alpha)}{r_2 + \lambda(\beta - \alpha)}, & \alpha < x \leq \beta \end{cases}$$

이다. 이 경우 모든 λ 값에 대하여 정상 확률이 존재함을 알 수 있다. 한편 초기상태 β 에서 재고가 완전히 빌 때까지의 평균 시간은 $S(\beta) = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{r_2 + \lambda(\beta - \alpha)}{r_2} \exp\left\{\frac{\lambda}{r_1}\alpha\right\} - 1 \right]$ 로 얻어지고, 재고 상태가 x 일 때 재고가 완전히 빌 때까지의 평균 시간 $S(x)$ 은

$$S(x) = \begin{cases} T(x), & 0 < x \leq \alpha \\ \frac{x - \alpha}{r_2} + T(\alpha), & \alpha < x \leq \beta \end{cases}$$

이며 이 때 $T(x) = \frac{1}{\lambda} [1 - \exp\{-\frac{\lambda}{r_1}x\}] [1 + \frac{r_2 + \lambda(\beta - \alpha)}{r_2} \exp\{\frac{\lambda}{r_1}\alpha\}]$ 이다. <그림 1>과 <그

림 2>에서처럼 λ 값이 클수록 점검 시간 간격이 짧아지고 따라서 재고 보충기회가 많아지므로 재고가 비어있을 확률은 작아지고 재고가 빌 때까지의 평균시간은 길어진다

<그림 1> $\alpha = 4, \beta = 10, r_1 = 10, r_2 = 5$ 에서의 $F(x)$ <그림 2> $\alpha = 4, \beta = 10, r_1 = 10, r_2 = 5$ 에서의 $S(x)$

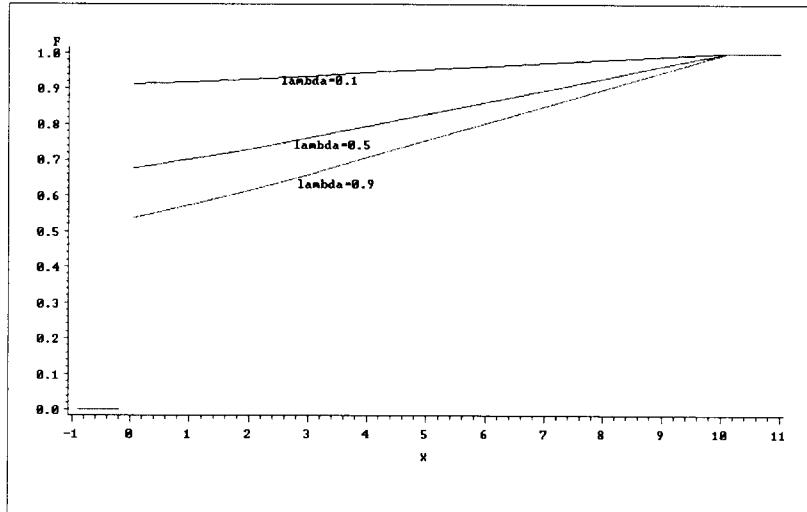
예제 2. 시스템이 처음에는 일정하게 악화되다가 상태가 적정수준 이하가 되면 급속히 악화되는 상황으로 그 악화율 함수가 다음과 같은 경우를 생각해 보자.

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ \alpha + r - x, & 0 < x \leq \alpha \\ r, & \alpha < x \leq \beta \end{cases}$$

그리고 수리되는 양은 $(0, \beta)$ 에서 균일 확률 분포를 따른다. 이때 $\lambda\beta < r$ 하에서 정리 2.3의 해를 정확한 식의 형태로 찾는 것은 불가능하여 Jagerman(1985)가 제안한 수치적 방법으로 누적 확률 분포 함수를 구하여 <그림 3>처럼 λ 값에 대하여 나타내었다. 여기서도 λ 가 클수록 상태가 적정수준 이상에 있을 확률이 높아짐을 알 수 있다. 한편 상태 x 에서의 평균 잔여 수명 $S(x)$ 는 3절의 결과로부터

$$S(x) = \begin{cases} \left[\frac{\beta-\alpha}{2r} + T(\alpha) + \frac{\beta}{(\beta-\alpha)\lambda} \right] \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha+r-x}{\alpha+r} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}\lambda} \right\}, & 0 < x \leq \alpha \\ \frac{x-\alpha}{r} + T(\alpha), & \alpha < x \leq \beta \end{cases}$$

로 얻어진다. 여기서 $T(\alpha) = \left(\frac{\alpha+r}{r} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}\lambda} - 1$ 이다.



<그림 3> $\alpha = 4, \beta = 10, r = 10$ 에서의 $F(x)$

참 고 문 헌

- [1] Asmussen, S. (1987). *Applied Probability and Queues*. John Wiley and Sons.
- [2] Baxter, L. A. and Lee, E. Y. (1987a). An inventory with constant demand and Poisson restocking. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. Vol. 1. 203-210.
- [3] Baxter, L. A. and Lee, E. Y. (1987b). A diffusion model for a system subject to continuous wear. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. Vol. 1.

- 405-416.
- [4] Browne, S. and Sigman, K. (1992). Work-modulated queues with applications to storage processes. *Journal of Applied Probability*. Vol. 29. 699-712.
 - [5] Cohen, J. W. (1977). On up- and downcrossings. *Journal of Applied Probability*. Vol. 14. 405-410.
 - [6] Jagerman, D. (1985). Certain Volterra integral equations arising in queueing. *Communications in Statistics - Stochastic Models*. Vol. 1. 239-256.
 - [7] Lee, E. Y. and Lee, J. (1993). A model for a system subject to random shocks. *Journal of Applied Probability*. Vol. 30. 979-984.
 - [8] Lee, E. Y. and Park, W. J. (1989). An Inventory Model and its Optimization. preprint.
 - [9] Lee, J. and Lee, E. Y. (1997). Optimal control of a dam with a compound Poisson input. *Journal of the Korean Statistical Society*. Vol. 26. 147-154.
 - [10] Perry, D. and Asmussen, S. (1995). Rejection rules in the M/G/1 queue. *Queueing Systems*. Vol. 19. 105-130.