The Korean Communications
in Statistics Vol. 6, No. 1, 1999
pp. 89-97

Estimation of Reliability for a Tow-Component Parallel Stress-Strength System[1)]

Yeonwoong Hong[2)]

Abstract

In this paper, we estimate the reliability of parallel system with two components. We assume that the strengths of these components follow bivariate exponential(BVE) models proposed by Marshall-Olkin(1967), Block-Basu(1974), Freund(1961) and Proschan-Sullo(1974). These two components are subjected to a normally distributed random stress which is independent of the strength of the components. If the strengths (X_1, X_2) are subjected to a stress (Y), then the system reliability (R) is given by $R=P[Y< \max(X_1, X_2)]$. We present some numerical results and compare the bias and the mean square error of the maximum likelihood etimator and proposed estimators for a moderate sized samples when (X_1, X_2) follow BVE of Marshall-Olkin.

1. 서 론

부하강도체계의 신뢰도를 추정하는 연구는 체계의 구조나 부하 및 강도의 확률모형에 따라 매우 다양하다. 특히 두 개 또는 그 이상의 부품이 병렬구조인 체계에서는 구성부품들이 동일한 확률모형을 가진다고 가정하여도 부품의 수명이 서로 종속인 경우에 신뢰도의 추정문제는 매우 복잡하게 나타난다.

이중부품체계를 포함하는 다중부품체계의 신뢰도추정에 관한 연구에는 모든 구성부품의 강도와 부하가 서로 독립인 지수분포를 따른다는 전제하에 체계신뢰도를 추정한 Bhattacharyya와 Johnson(1974), Draper와 Guttman(1978), Gupta와 Gupta(1988) 등의 연구가 있으나, 더욱 현실적으로는 어느 한 부품에 고장이 발생하면 고장난 부품이 맡고있던 부하가 다른 부품으로 이전되어 정상적으로 작동하는 부품의 부하가 증가하고 결국에는 이 부품의 고장률에도 변화를 가져오는 상황이 고려될 수 있다. 이러한 상황에서 Kunchur와 Munoli(1993)는 부하의 분포를 안다는 가정하에 강도가 지수분포를 따르며 부하와 독립일 때, 신뢰도의 최우추정량과 최소분산불편추정량을 구하였다. 특히 두 개의 부품이 병렬구조로 구성된 부하강도체계에서 Hanagal(1996)은 두 부품의 강도(X_1, X_2)가 Freund(1961), Marshall-Olkin(1967), Block-Basu(1974) 및 Proschan-Sullo(1976)의 이변량지수분포를 따르고, 부하 Y가 지수분포를 따를 때 신뢰도를 유도하고 이들의 최우추정

1) 본 논문은 1997년 한국학술진흥재단의 공모과제연구비에 의하여 연구되었음
2) Professor, Department of Industrial Engineering, Dongyang University, Youngju, 750-711, Korea

량을 구하였다.

그러나 Hanagal(1996)의 연구는 부하가 지수분포를 따른다고 가정하여 현실성을 충분히 반영하지 못하는 측면이 있으므로 이를 보다 현실성있게 모형화할 필요성이 있으며, 그 대안으로 본 연구에서는 정규분포를 따른다고 가정한다.

이변량지수분포에는 여러 가지 형태가 있지만 본 연구에서는 고려하는 강도의 모형은 다음 네 가지이다. 첫째, Marshall-Olkin(1967)모형으로 제 1 또는 제 2 유형의 부하 또는 충격은 부품 1 또는 2에만 고장을 유발하고 제3유형의 부하는 두 부품 모두에게 고장을 발생시키는 상황을 모형화한 것으로 결합생존함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\overline{F}(x_1,x_2) &= P[X_1>x_1, X_2>x_2] \\ &= \exp[-\lambda_1 x_1-\lambda_2 x_2-\lambda_3 \max(x_1,x_2)], \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0, \quad x_1,x_2>0.\end{aligned} \tag{1.1}$$

둘째, Freund모형으로 두 부품이 모두 작동할 때 부품 i의 고장률을 $\theta_i\,(i=1,2)$라하자. 한 부품이 고장나면 다른 부품은 고장난 부품의 부하를 이전받아 고장률이 θ_i 에서 θ_i'로 변화하는 모형이다.

$$f_F(x_1,x_2)=\begin{cases}\theta_1\theta_2'\exp[-\theta_2' x_2-(\theta_1+\theta_2-\theta_2')x_1], & 0<x_1<x_2, \\ \theta_2\theta_1'\exp[-\theta_1' x_1-(\theta_1+\theta_2-\theta_1')x_2], & 0<x_2<x_1.\end{cases} \tag{1.2}$$

여기서 $\theta_i>0$, $\theta_i'>0$이다.

셋째, Marshall-Olkin모형을 수정하여 절대연속성(absolutely continuity)을 가지는 Block-Basu (1974) 모형으로 결합생존함수는 다음과 같다.

$$\overline{F}_B(x_1,x_2)=\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}\overline{F}(x_1,x_2)-\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}\exp[-\lambda\max(x_1,x_2)], \quad x_1,x_2>0. \tag{1.3}$$

여기서 $\overline{F}(x_1,x_2)$는 Marshall-Olkin의 이변량지수분포의 결합생존함수이고 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$이다.

넷째, Freund모형과 Marshall-Olkin모형을 결합한 Proschan-Sullo모형으로 결합확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f_P(x_1,x_2)=\begin{cases}\theta_1\eta_2'\exp[\eta_2' x_2-(\theta-\eta_2')x_1], & 0<x_1<x_2 \\ \theta_2\eta_1'\exp[\eta_1' x_1-(\theta-\eta_1')x_2], & 0<x_2<x_1 \\ \theta_3\exp(-\theta x), & 0<x_1=x_2=x\end{cases} \tag{1.4}$$

여기서 $\theta=\theta_1+\theta_2+\theta_3$, $\eta_1'=\theta_1'+\theta_3$, $\eta_2'=\theta_2'+\theta_3$이고 특히 $\theta_3=0$이면 Freund(1961)모형이 된다.

(X_1,X_2)를 상호 종속인 두 부품의 강도, Y를 부품이 받는 부하를 나타내는 확률변수라하고, 강도와 부하는 서로 독립이라고 가정하자. 그러면 두 부품이 병렬구조인 부하강도체계의 신뢰도는 $P[Y<\max(X_1,X_2)]$이다.

본 연구에서는 두 개의 부품이 병렬구조를 가지는 부하강도체계에 대하여 두 부품의 강도가 서로 종속인 확률변수로 Marshall-Olkin(1967), Freund(1961), Block-Basu(1974) 및 Proschan-

Sullo(1976)의 네 가지 이변량지수분포를 따르고 부하는 정규분포를 따르고 모든 모수를 모르는 경우에 체계의 신뢰도의 최우추정량을 구하고 모형에 따라서는 새로운 추정방법을 제안하며, 이들의 편의와 평균제곱오차를 비교하고자 한다. 2절에서는 네 가지 모형에 대한 부하강도체계의 신뢰도를 유도하고 최우추정량을 구하며 특히, Marshall-Olkin모형에 대해서는 INT추정량, 최소분산불편추정량의 적분형태로 표현되는 추정량을 구하며, 3절에서는 시뮬레이션을 통하여 비교한다.

2. 신뢰도 추정

본 절에서는 부하 Y가 평균 μ, 분산 σ^2인 정규분포를 따르고 두 부품의 강도 (X_1, X_2)가 앞 절에서 열거한 네 가지 이변량지수분포를 따를 경우 신뢰도와 최우추정량 등을 구한다.

2.1 Marshall-Olkin의 이변량지수분포

두 부품의 강도 (X_1, X_2)가 Marshall-Olkin의 이변량지수분포를 따르고 부하 Y가 평균 μ분산 σ^2인 정규분포를 따르는 경우 신뢰도 $R = P[Y < \max(X_1, X_2)]$를 유도하고 그 추정량을 구한다. 먼저 $Z = \max(X_1, X_2)$ 의 생존함수는

$$\begin{aligned}\overline{H}_Z(z) &= P[Z > z] \\ &= \exp[-(\lambda_1+\lambda_3)z] + \exp[-(\lambda_2+\lambda_3)z] - \exp(-\lambda z)\end{aligned} \tag{2.1}$$

이고, 체계의 신뢰도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}R &= P[Z > Y] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{H}_M(y) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) dy \\ &= \int_0^{\infty} [\exp\{-(\lambda_1+\lambda_3)y\} + \exp\{-(\lambda_2+\lambda_3)y\} - \exp(-\lambda y)] \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) dy \qquad (2.2a) \\ &= \overline{\Phi}((\lambda_1+\lambda_3)\sigma - \mu/\sigma) \cdot \exp(-(\lambda_1+\lambda_3)\mu + (\lambda_1+\lambda_3)^2\sigma^2/2) \\ &+ \overline{\Phi}((\lambda_2+\lambda_3)\sigma - \mu/\sigma) \cdot \exp(-(\lambda_2+\lambda_3)\mu + (\lambda_2+\lambda_3)^2\sigma^2/2) \qquad (2.2b) \\ &- \overline{\Phi}(\lambda\sigma - \mu/\sigma) \cdot \exp(-\lambda\mu + \lambda^2\sigma^2/2)\end{aligned}$$

한편 (X_1, X_2)가 (1.1)의 생존함수를 가지기 위한 필요충분조건은 서로 독립이고 평균이 $1/\lambda_i$인 지수분포를 따르는 $U_i, i = 1, 2, 3,$에 대하여 $X_1 = \min(U_1, U_3)$, $X_2 = \min(U_2, U_3)$ 이

다. $(X_{11}, X_{21}), \cdots, (X_{1n}, X_{2n})$를 (1.1)을 따르는 크기 n의 이변량표본이라하고 n_0를 $X_{1i}=X_{2i}$인 (X_{1i}, X_{2i})의 수, n_1을 $X_{1i}<X_{2i}$인 (X_{1i}, X_{2i})의 수, $n_2=n-n_0-n_1$라고하자. 또한 $S_1=\sum_{i=1}^{n} X_{1i}$, $S_2=\sum_{i=1}^{n} X_{2i}$, $S_3=\sum_{i=1}^{n} \max(X_{1i}, X_{2i})$라 하자. Proschan-Sullo(1976)로부터 λ_i의 최우추정치는 다음의 방정식을 만족하는 해이다.

$$\frac{n_1}{\lambda_1}+\frac{n_2}{\lambda_3+\lambda_1}=S_1,$$

$$\frac{n_2}{\lambda_2}+\frac{n_1}{\lambda_3+\lambda_2}=S_2,$$

$$\frac{n_0}{\lambda_3}+\frac{n_1}{\lambda_2+\lambda_1}+\frac{n_2}{\lambda_1+\lambda_3}=S_3,$$

위의 방정식을 반복법으로 풀기 위하여

$$\phi_1(0)=n_1/(n-n_2), \quad \phi_2(0)=n_1/(n-n_1),$$

$$\phi_1(j)=\frac{\lambda_1(j)}{\lambda_1(j)+\lambda_3(j)}, \quad \phi_2(j)=\frac{\lambda_2(j)}{\lambda_2(j)+\lambda_3(j)}, \quad j=1,2,\cdots$$

라고 하자. 만약 $n_i>0, i=0,1,2,$이면 $j=0$부터 시작하여 다음 식을 반복하면 해를 구할 수 있다.

$$\lambda_1(j+1)=(n_1+n_2\phi_1(j))/S_1,$$

$$\lambda_2(j+1)=(n_2+n_1\phi_2(j))/S_2,$$

$$\lambda_3(j+1)=(n-n_2\phi_1(j)-n_1\phi_2(j))/S_3.$$

만약 어떤 i에 대하여 $n_i=0$이면 λ_i의 최우추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{\lambda}_1=\begin{cases} n/S_1 \cdot n_1/(n-n_2), & n_2<n, \\ n/S_1, & n_2=n, \end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_2=\begin{cases} n/S_2 \cdot n_2/(n-n_1), & n_1<n, \\ n/S_2, & n_1=n, \end{cases}$$

$$\widehat{\lambda}_3=\begin{cases} \{n-n_1n_2/(n-n_2)-n_1n_2/(n-n_1)\}/S_3. & n_1<n,\ n_2<n, \\ n/S_3, & n_1=n \text{ 또는 } n_2=n. \end{cases}$$

이와 같은 방법으로 구한 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$의 최우추정량과 (μ, σ^2)의 최우추정량을 (2.2b)에 대입

하면 체계신뢰도의 최우추정량 $\hat{R}$을 구할 수 있다. Basu(1981)는 λ_i의 간편한 추정량으로 직관적 추정량의 일종인 "INT"추정량을 제안했는데 이를 $\tilde{\lambda}_i$라고 하면 $\tilde{\lambda}_i=\lambda_i(1), i=1,2,3,$으로 첫 번째 반복에서 얻어지는 해임을 알 수 있다. 본 연구에서는 (2.2b)의 λ_i와 (μ, σ^2) 대신 $\tilde{\lambda}_i$와 (μ, σ^2)의 최우추정량을 대입하여 $\tilde{R}$이라 한다. 경험적으로 미루어보면 편의나 평균제곱오차측면에서 낮은 신뢰도부터 높은 신뢰도까지 모든 수준에서 절대적으로 우위를 가지는 추정량은 구하기 어렵지만, 가능하다면 최우추정량 보다 편의나 평균제곱오차가 적은 새로운 추정량을 찾는 것은 의미있는 일이 될 것이다. 이러한 측면에서 본 연구에서는 새로운 추정방법을 제안하고자한다. (2.2a)의 피적분함수는 $G_1(y, \lambda_1+\lambda_3)=\exp\{-(\lambda_1+\lambda_3)y\}$, $G_2(y, \lambda_2+\lambda_3)=\exp\{-(\lambda_2+\lambda_3)y\}$ 및 $G_3(y,\lambda)=\exp(-\lambda y)$ 와 평균 μ와 분산 σ^2인 정규분포의 확률밀도함수 $\phi\{(y-\mu)/\sigma\}/\sigma$ 곱한 항의 선형결합으로 이루어져있으므로 이들 함수의 최소분산불편추정량을 이용하여 신뢰도를 추정하려한다.

$U_i(i=1,2,3)$가 평균 $1/\lambda_i$이고 서로 독립인 지수분포를 따르므로 $G_1(z, \lambda_1+\lambda_3)$, $G_2(z,\lambda_2+\lambda_3)$ 및 $G_3(z,\lambda)$는 각각 $\min(U_1, U_3)$, $\min(U_2, U_3)$, $\min(U_1, U_2, U_3)$의 생존함수임을 알 수 있다. $\min(U_1, U_3)=X_1$, $\min(U_2, U_3)=X_2$ 및 $\min(U_1, U_2, U_3)=\min(X_1, X_2)$의 관계를 이용하여 $G_i(\cdot,\cdot)$를 추정할 수 있을 것이다. $V=\sum_{i=1}^{n}\min(X_{1i}, X_{2i})$라고 정의하면 $X_{11},\cdots,X_{1n}$과 $X_{21},\cdots,X_{2n}$ 및 $\min(X_{11}, X_{21}),\cdots \min(X_{1n}, X_{2n})$는 각각 평균이 $1/(\lambda_1+\lambda_3)$과 $1/(\lambda_2+\lambda_3)$ 및 $1/\lambda$인 지수분포를 따르므로 $G_i(\cdot,\cdot)$의 최소분산불편추정치는 다음과 같다.

$$\overline{G_1}(y, \lambda_1+\lambda_3)=\begin{cases}(1-y/s_1)^{n-1}, & 0<y<s_1,\\ 0, & \text{그 밖의 경우},\end{cases} \tag{2.3}$$

$$\overline{G_2}(y, \lambda_2+\lambda_3)=\begin{cases}(1-y/s_2)^{n-1}, & 0<y<s_2,\\ 0, & \text{그 밖의 경우},\end{cases} \tag{2.4}$$

$$\overline{G_3}(y, \lambda)=\begin{cases}(1-y/v)^{n-1}, & 0<y<v,\\ 0, & \text{그 밖의 경우}.\end{cases} \tag{2.5}$$

또한 $\phi\{(y-\mu)/\sigma\}/\sigma$의 최소분산불편추정량[Lehmann, p.87]은

$$\bar{f}(y)=\frac{\Gamma(m/2-1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(m/2-1)}\sqrt{\frac{m}{m-1}}\left(1-\frac{my^2}{m-1}\right)^{m/2-2}, \quad 0<|y|<\sqrt{1-1/m}, \tag{2.6}$$

이다. 여기서 m은 Y표본의 크기이다. 본 연구에서는 (2.3)-(2.6)을 (2.2a)의 피적분함수의 추정함수로 대입하여 $\overline{R}$라하면

$$\overline{R}=\int_0^\infty[\overline{G_1}(y,\lambda_1+\lambda_3)+\overline{G_2}(y,\lambda_2+\lambda_3)-\overline{G_1}(y,\lambda)]\bar{f}(y)\,dy$$

$$=K\sum_{i=1}^{2}\int_0^{a_i}(1-y/s_i)^{n-1}\{(1-my^2/(m-1))\}^{m/2-2}dy$$

$$-K\int_0^{a_3}(1-y/v)^{n-1}\{(1-my^2/(m-1))\}^{m/2-2}dy,$$

여기서 $a_i=\min(v_i,\sqrt{1-1/m}), i=1,2,3,$이고 $K=\frac{\Gamma(m/2-1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(m/2-1)}\sqrt{\frac{m}{m-1}}$ 이다.

2.2 그 밖의 분포에 대한 신뢰도 추정

본 절에서는 (X_1,X_2)가 (1.2), (1.3) 및 (1.4)를 따르고 부하가 정규분포를 따를 경우에 신뢰도 함수를 유도하고 최우추정량을 구한다.

Block-Basu(1974)모형의 경우 $Z=\max(X_1,X_2)$의 생존함수는

$$\overline{H}_B(z)=\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}[\exp\{-(\lambda_1+\lambda_3)z\}+\exp\{-(\lambda_2+\lambda_3)z\}]-\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}\exp(\lambda z)$$

이므로 신뢰도 $R_B=P(Z>Y)$는 다음과 같다.

$$R_B=\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}\overline{\Phi}\{(\lambda_1+\lambda_3)\sigma-\mu/\sigma\}\cdot\exp\{-(\lambda_1+\lambda_3)+(\lambda_1+\lambda_3)^2\sigma^2/2\}$$

$$+\frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}\overline{\Phi}\{(\lambda_2+\lambda_3)\sigma-\mu/\sigma\}\cdot\exp\{-(\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_2+\lambda_3)^2\sigma^2/2\}$$

$$-\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}\Phi(\lambda\sigma+\mu/\sigma)\cdot\exp(\lambda\mu+\lambda^2\sigma^2/2).$$

Newton-Raphson방법이나 Fisher의 점수법(Hanagal과 Kale, 1991)으로 구한 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$의 최우추정량과 $\hat{\mu}$과 $\hat{\sigma}^2$의 최우추정량을 위식에 대입하면 R_B의 최우추정량을 쉽게 구할 수 있다.

Proschan-Sullo(1974)모형의 경우 (X_1,X_2)의 결합생존함수는 $\theta\neq\eta_i', i=1,2,$일 때

$$\overline{F}_P(x_1,x_2)=\begin{cases}\frac{\theta_2+\theta_3-\eta_2'}{\theta-\eta_2'}\exp(-\theta x_2)+\frac{\theta_1}{\theta-\eta_2'}\exp\{-(\theta-\eta_2')x_1-\eta_2'x_2\}, & 0<x_1\le x_2,\\ \frac{\theta_1+\theta_3-\eta_1'}{\theta-\eta_1'}\exp(-\theta x_1)+\frac{\theta_2}{\theta-\eta_1'}\exp\{-(\theta-\eta_1')x_2-\eta_1'x_1\}, & 0<x_2\le x_1,\end{cases}$$

이고 $\theta=\eta_i', i=1,2,$일 때

$$\overline{F}_P(x_1, x_2) = \begin{cases} \{\theta_1(x_2 - x_1) + 1\}\exp(-\theta x_2), & 0 < x_1 \le x_2, \\ \{\theta_2(x_1 - x_2) + 1\}\exp(-\theta x_1), & 0 < x_2 \le x_1, \end{cases}$$

이므로 Z의 생존함수 $\overline{H}_p(z)$ 와 부하강도체계의 신뢰도 R_P는 각각 다음과 같다.

$$\overline{H}_P(z) = \begin{cases} \exp(-\theta z) + \sum_{i \ne j = 1}^{2} \frac{\theta_j}{\theta - \eta_i'}[\exp(-\eta_i' z) - \exp(-\theta z)], & \eta_1' \ne \theta \ne \eta_2', \\ \exp(-\theta z) + (\theta_1 + \theta_2) z \exp(-\theta z), & \eta_1' = \theta = \eta_2', \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_P = & \overline{\Phi}(\theta\sigma - \mu/\sigma) \cdot \exp(-\theta + \theta^2\sigma^2/2) \\ & + \sum_{i \ne j = 1}^{2} \frac{\theta_j}{\theta - \eta_i'}\Big[\overline{\Phi}(\eta_i'\sigma - \frac{\mu}{\sigma}) \cdot \exp(-\eta_i' + \eta_i'^2\sigma^2/2) \\ & - \overline{\Phi}(\theta\sigma - \frac{\mu}{\sigma}) \cdot \exp(-\theta + \theta^2\sigma^2/2)\Big], \qquad \eta_1' \ne \theta \ne \eta_2' \text{일 때}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_P = & \overline{\Phi}(\theta\sigma - \mu/\sigma) \cdot \exp(-\theta + \theta^2\sigma^2/2) \\ & + \frac{\sigma(\theta_1 + \theta_2)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\left(\frac{1}{2\sigma^2} - \theta\right)\mu + \frac{\theta^2\sigma^2}{2} - \frac{\theta}{2}\right\} \\ & + \frac{(\theta_1 + \theta_2)(\mu/\sigma - \theta)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\theta\mu + \theta^2\sigma^2/2) \cdot \overline{\Phi}(\theta\sigma - \mu/\sigma), \qquad \eta_1' = \theta = \eta_2' \text{일 때}. \end{aligned}$$

Hanagal(1992)로부터 θ_i와 η_i'의 최우추정량을 구하고 $\hat{\mu}$과 $\hat{\sigma}^2$의 최우추정량을 위식에 대입하면 R_P의 최우추정량을 구할 수 있다. 끝으로, Freund(1961)모형의 경우 Proschan-Sullo모형에서 θ_3 대신 0을 대입하면 신뢰도와 그에 대응되는 최우추정량을 구할 수 있으므로 그 표현식은 생략한다.

3. 추정량들의 비교

본 절에서는 강도의 분포가 Marshall-Olkin의 이변량지수분포를 따를 경우에 앞 절에서 구한 세 가지 추정량의 편의와 평균제곱오차의 추정치를 시뮬레이션방법을 사용하여 비교한다. <표 1>은 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) =$ (.002, .003, .001), (.004, .005, .002), (.01, .02, .03), (.02, .04, .05)인 (X_1, X_2)로부터 크기 n인 이변량표본과 평균 10, 분산 25인 정규분포로부터 $m = 15$인 표본을 생성하여 4,000회 반복시행하여 얻어진 결과이다. 평균제곱오차의 추정치는 큰 차이가 없으므로 편의의 관점에서만 비교한다. 기대했던 바와 같이 $\overline{R}$의 추정된 편의가 다른 두 추정량보다 작음을 알 수 있다. $\hat{R}$ 편의의 절대치는 $\tilde{R}$ 편의의 절대치보다 대체로 작지만 큰 차이가 발생하지 않으므로 추정의 간편성을 감안하면 $\tilde{R}$을 R의 추정치로 사용하여도 나쁘지는 않을 것으로 사료된다. 또한

세 가지 추정량 모두 표본의 크기와 신뢰도가 높을수록 편의와 평균제곱오차의 추정치가 작아짐을 알 수 있다.

<표 1> 신뢰도 추정량의 편의 및 평균제곱오차의 추정치

					편의			평균제곱오차		
λ_1	λ_2	λ_3	R	n	$\hat{R}$	$\tilde{R}$	$\bar{R}$	$\hat{R}$	$\tilde{R}$	$\bar{R}$
.002	.003	.001	.9666	6	-.0181	-.0221	.0063	.0053	.0097	.0046
				10	-.0164	-.0187	.0058	.0049	.0096	.0045
				14	-.0126	-.0155	.0045	.0038	.0075	.0034
				18	-.0125	-.0143	.0041	.0039	.0073	.0102
				22	-.0127	-.0152	.0045	.0102	.0120	.0102
				26	-.0105	-.0127	.0035	.0030	.0064	.0058
.004	.005	.002	.9551	6	-.0213	-.0273	.0094	.0077	.0123	.0069
				10	-.0182	-.0226	.0086	.0063	.0095	.0059
				14	-.0149	-.0189	.0068	.0051	.0078	.0047
				18	-.0150	-.0182	.0059	.0052	.0069	.0051
				22	-.0135	-.0181	.0047	.0064	.0073	.0059
				26	-.0107	-.0136	.0045	.0042	.0067	.0061
.010	.020	.030	.7115	6	-.0417	-.0480	-.0033	.0254	.0215	.0199
				10	-.0344	-.0415	-.0109	.0137	.0226	.0137
				14	-.0262	-.0315	-.0022	.0135	.0147	.0134
				18	-.0246	-.0192	.0055	.0082	.0098	.0068
				22	-.0246	-.0368	-.0040	.0154	.0159	.0135
				26	-.0208	-.0248	-.0067	.0097	.0117	.0090
.020	.040	.050	.5657	6	-.0449	-.0464	-.0046	.0233	.0223	.0221
				10	-.0358	-.0397	-.0058	.0168	.0186	.0160
				14	-.0301	-.0319	.0120	.0149	.0191	.0144
				18	-.0263	-.0286	-.0073	.0123	.0133	.0121
				22	-.0289	-.0305	.0057	.0148	.0167	.0154
				26	-.0223	-.0241	-.0082	.0098	.0124	.0095

참고문헌

[1] Basu,A.P.(1981). The estimation of P(X<Y) for distributions in life testing, *Naval Research Logistics*, Vol. 28, 383-392.

[2] Bhattacharyya, G.K. and Johnson,R.A.(1974). Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model, *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 69, 966-970.

[3] Block,H.W.and Basu,A.P.(1974). A continuous bivariate exponential extension, *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 69, 1031-1037.

[4] Draper,D. and Guttman,I.(1978). Bayesian analysis of reliability in multicomponent stress-strength models, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* Vol. 7, 441-452.

[5] Freund,J.E.(1961). A bivariate extension of exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 56, 971-977.

[6] Gupta, R.D. and Gupta, R.C.(1988). Estimation of P($Y_p > \max(Y_1, Y_2, ,\cdots, Y_{p-1})$) in the exponential case, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* Vol. 17, 911-924.

[7] Hanagal,D.D.(1992). Some inference results in modified Freund's bivariate exponential distribution. *Biomedical Journal,* Vol. 36, 745-756.

[8] Hanagal,D.D.(1996). Estimation of system reliability from stress strength relationship, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* Vol. 25, 1783-1797.

[9] Hanagal,D.D. and Kale, B.K.(1991). Large sample tests of independence for absolutely continuous bivariate exponential distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods,* Vol. 20, 1301-1013.

[10] Kunchur,S.H. and Munoli,S.B.(1993). Estimation of reliability for a multicomponent survival stress-strength model based on exponential distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* Vol. 22, 769-779.

[11] Lehmann, E.L.(1983). *Theory of point estimation,* John Wiley & Sons, Inc, New York.

[12] Marshall,A.W and Olkin,I.(1967). A multivariate exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 62, 30-44.

[13] Proschan, F. and Sullo, P.(1976). Estimating the parameters of a multivariate exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 71, 465-472.