The Korean Communications
in Statistics Vol. 6, No. 1, 1999
pp. 77-88

A study on Process Capability Index using Semi-Variance[1)]

DaeKyung Kim[2)]

Abstract

A new measure of the process capability index(PCI) C_{cpk} is proposed that takes into account the proximity to the target value as well as process mean and process variation when we assessing process performance. Using the semivariance estimators proposed by Choobineh and Branting(1986) and Josephy and Aczel (1993), the estimator ($\widehat{C}_{cpk}$) of new index has been solved and the properties of these estimators have been examined through simulations. Also we compare the performance between C_{cpk} and C_{jpk} which is developed by Johnson, Kotz and Pearn(1992).

1. 서 론

제품을 생산하는 생산업체에서 지향하는 목표중의 하나는 완성된 제품의 규격(specification)이 구매자의 요구 규격에 일치할 수 있도록 생산 공정의 정확성을 충족시키는 것이다. 요구되는 규격에 맞는 제품을 생산하기 위해서는 제품의 생산 시설의 능력(capability)에 대한 지속적이고도 효과적인 점검 및 능력 측정을 위한 정량적인 추정이 필요하다. 이러한 필요성에 의하여 생산 공정의 능력을 측정하기 위한 공정능력지수(process capability index ; PCI)가 개발되어 기업의 경영자 및 엔지니어들에게 매우 중요한 지수로서 이용되고 있으며 보다 효과적인 지수를 개발하기 위한 연구가 활발히 진행되고 있다.

PCI 는 생산된 제품규격의 평균(mean), 분산(variance) 및 목표치(target value)등을 고려하여 구매자들의 제품 규격을 만족시킬 수 있는 생산 공정의 능력을 정량적으로 정의한 값이다. 현재까지 많은 산업 공학자 및 신뢰성 분야의 통계학자들에 의하여 다양한 형태의 공정능력지수들이 개발되었고 이러한 지수들의 성질들이 연구되어 왔으며 생산 현장에서의 품질관리를 위하여 광범위하게 이용되고 있다. 가장 많이 사용되고 있는 PCI 는 C_p 지수와 C_{pk} 지수 등이 있으며 그 외에도 C_{pm} 및 C_{pmk}등의 지수들이 최근에 제안되어 이러한 지수들의 통계적 분석방법 및 장·단점 등에 대한 연구가 많은 학자들에 의하여 활발하게 진행되고 있다.

현재까지 제안된 PCI 들의 추정치에 대한 정확한 표본 분포들은 일반적으로 구하기가 매우 어

---

1) This paper was financially supported by Chonbuk National University Research Fund, 1998 and it is in part of "A study on development of new process capability index".

2) Full-time Lecturer , Statistical Information, Division of Mathematics and Statistical Information, Chonbuk National University, Chonbuk, 560-756, KOREA

려우나 공정 분포가 정규분포를 한다는 가정 하에서는 이러한 표본분포들이 유도되어 PCI들의 신뢰구간 개발 등에 이용되어 왔다.(Chan, Cheng 과 Spiring(1988a), Chou 과 Owen(1989) Zhang, Steinbeck 과 Wardrop(1990), Boyles(1991), Kotz, Pearn 와 Johnson(1992), Pearn, Kotz 와 Johnson(1992)).

본 논문에서는 새로운 PCI를 제안하고 기존의 유사한 지수들과 비교하고자 한다. 현재까지 개발된 PCI 들은 모두가 공정규격수치들의 분산(variance)에 의존함으로서 모집단의 분포가 비대칭인 경우 효과적인 측정지수가 되지 못하였다. 따라서 최근에 개발된 반분산(semivariance)의 개념을 이용함으로서 새로운 PCI를 정의하고자 한다.

2 절에서는 반분산의 개념을 정의하고 Choobineh 와 Branting(1986) 과 Josephy 와 Aczel(1993)에 의하여 제안된 반분산의 추정치들을 소개한다. 3 절에서는 반분산을 이용한 새로운 PCI 를 제안하고 기존의 공정능력지수들과 관계를 설명하고 4 절에서는 모의실험을 통하여 Pearn, Kotz 와 Johnson(1992)의 PCI 와 본 논문에서 제안된 새로운 PCI 와의 관계 및 그 추정치들의 비편의성(unbiasedness)을 연구한다. 5 절에서는 이러한 모의실험 결과에 대한 분석 및 결론을 기술한다.

2. 반분산(Semivariance)

평균에 대한 확률변수의 2차 적률(즉, 분산)은 가장 넓게 쓰이는 변이에 대한 지표이고 때때로 위험의 척도(measure of risk)로 쓰여 왔다. 그러나 PCI에서의 분산의 사용은 (1) 목표치가 평균이 아닐 때 (2) 목표치의 위와 아래의 편차가 같지 않을 때, 즉 모집단이 비대칭일 때 (3) 목표치의 한쪽의 편차가 바람직하지 않은 경우에는 공정의 변이에 대한 효과적인 측도가 되지 못한다. 이러한 상황을 조절하기 위하여 2개의 변이의 지표들이 분산을 대신해서 사용되어질 수 있다. 하나는 목표치의 위의 편차들을 측정하고, 다른 하나는 목표치 아래의 편차들을 측정하는 것이다.

Markowitz(1959)는 이러한 2 개의 변이 측정 모수들을 목표치에 관한 2차 부분 적률로 정의하였으며 처음으로 반분산(semivariance)이라는 용어를 사용하였다. 반분산의 개념은 다음과 같이 정의된다.

X를 확률변수, T 를 임의의 고정된 값(일반적으로 목표치로 취함)이라고 하면 T 에 관한 하한과 상한 2차 부분 적률은

$$L_T = E\{[\min(0, X-T)]^2\} \tag{2.1}$$

$$U_T = E\{[\max(0, X-T)]^2\} \tag{2.2}$$

로 정의된다. 이 경우 $T=\mu$, 모평균, 으로 취하면

$$\begin{aligned} L_\mu &= E\{[\min(0, X-\mu)]^2\} \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} (x-\mu)^2 dF(x) \end{aligned}$$

인데 위 식은 반분산으로 불려지며 여기에서 F 는 모집단의 누적분포함수이다.

최근에 Choobineh 와 Branting(1986)은 반분산을 평균, 분산 및 목표치의 함수로 근사(approximate)하고 그 함수의 성질에 관하여 연구하였다. 즉, (2.1) 과 (2.2)의 근사로서 다음의 값을 구하였다.

$$AL_T = [p^{1/2}(T-\mu)+(1-p)^{1/2}\sigma]^2 \tag{2.3}$$

$$AU_T = [(1-p)^{1/2}(\mu-T)+p^{1/2}\sigma]^2 \tag{2.4}$$

여기에서 $p=P[X \le T]$이고 μ 와 σ 는 각각 확률변수 X 의 평균과 표준편차이다. 이들 값들은 X 의 분포가 대칭이고 $T=\mu$ 일 때는 $AL_\mu = AU_\mu = \frac{1}{2}\sigma^2$ 이다. 또한 Josephy 와 Aczel(1993)은 반분산에 대한 점근적으로 불편인 일치추정량을 다음과 같이 구하였다.

$$\hat{L}_\mu = \frac{n}{(n-1)^2} \sum_{X_i \le \bar{x}} (X_i - \bar{X})^2 \tag{2.5}$$

여기에서 n 은 표본의 크기, $\bar{X}$ 는 표본평균이다. AL_T 와 AU_T 는 모의실험 분석에서 사용되어져 왔고[Choobineh 와 Ballard(1989), Choobineh 와 Lee (1991)], 품질관리에서도 사용되었다[Choobineh 와Ballard(1987), Bai 와 Choi(1995)]. 또한 AL_T 는 평균잔여수명의 비모수적 소표본 추정량을 구하기 위하여 사용되었다[Choobineh 와 Park(1990)]. 그러나 (2.5)식은 목표치 T 가 모평균 μ 와 같은 경우에만 점근적 불편, 일치 추정량이고 다른 목표값에 대하여는 불편성 및 일치성이 성립되지 않으므로 일반적인 T 에 관한 L_T 의 추정량으로는 사용할 수 없다. 그러나 일반적인 목표치 T 에 대하여도 Josephy 와 Aczel(1993)가 증명한 방법과 유사하게 구하면 점근적으로 다음과 같은 불편인 일치 통계량을 구할 수 있다.

$$\hat{L}_T = \frac{1}{n} \sum_{X_i \le T} (X_i - T)^2 \tag{2.6}$$

따라서 일반적인 목표치 T 가 주어졌을 때의 하한 2 차 부분 적률 L_T 에 대한 추정량은 L_T 의 근사값인 (2.3)의 AL_T 의 추정량에 의하여 근사 될 수 있고 또한 (2.6)의 $\hat{L}_T$ 에 의하여 추정될 수도 있다. 이러한 추정 기법은 3 절에서 제안된 새로운 PCI 및 Johnson, Kotz 와 Pearn(1992)에 의하여 제안된 기존의 PCI의 추정량을 계산하기 위하여 사용된다.

3. 새로운 공정능력지수

새로운 공정능력지수와의 비교를 위하여 기존의 PCI들을 다음과 같이 요약한다. USL은 상한

규격한계, LSL은 하한규격한계, T는 측정된 특성값 X 의 목표값, μ 그리고 σ 는 각각 측정된 특성값 X 에 대한 분포의 평균과 표준편차를 나타낸다고 할 때 초기의 1 세대의 PCI는

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

이고 C_p 의 추정량은 $\hat{C}_p = (USL - LSL)/6\hat{\sigma}$ 으로 구한다. 여기에서 $\hat{\sigma}$ 는 표본 표준편차 $s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/(n-1)}$의 값이다. Chen, Cheng와 Spiring(1988a)은 $\hat{C}_p$의 확률분포를 구했고 $\hat{C}_p$는 점근적으로 불편추정량이라는 것을 증명하였다. 그러나 이 지수는 μ 혹은 T 의 값들을 고려하지 못한다[Kane(1986) 와 Sullivan(1985)]는 단점이 있다.

목표 값으로부터의 편차를 반영하기 위하여 C_p 와 유사한 몇 가지의 지수들이 제안되었다. 그러한 지수들은 공정과 연계된 목표 값으로부터 이탈뿐만 아니라 공정 분산의 크기를 고려하기 위하여 시도되었다. 지수 $C_{pk} = \min(USL - \mu,\ \mu - LSL)/3\sigma$ 는 μ 는 고려했지만 T 는 고려하지 않았다. Chou 와 Owen(1989)은 정규분포의 데이터에 대한 $\hat{C}_{pk}$ 의 정확한 분포를 구하였다.

Taguchi의 손실함수에 근거한 제 2 세대의 PCI는 지수 C_{pm} 과 C^*_{pm} 가 있다. 목표값 T를 고려한 이들 지수들은 $C_{pm} = \{USL - LSL\}/6\sqrt{E[(X-T)^2]}$ 과 $C^*_{pm} = \min(USL - T,\ T - LSL)/3\sqrt{E[(X-T)^2]}$ (Hsiang 와 Taguchi(1985), Chan, Cheng 과 Spiring(1988b))로 정의된다. 그러나 $T-\mu = \delta$ 와 $T - \mu = -\delta$, $\delta > 0$ 를 구분하지 못하는 단점이 있다. (Beazley 와 Marcucci(1988) , Boyles(1991), Franklin 과 Wasserman (1992)). Pearn, Kotz 와 Johnson(1992)은 $\hat{C}_{pm}$ 의 표본분포를 유도하였고 $\hat{C}_p$ 보다 작은 편의를 갖고 작은 평균제곱오차(MSE)를 가진다는 것을 보였다.

제 3 세대의 지수로는 Choi 와 Owen(1990) 이 C_{pm} 지수를 개량하여 제안한 새로운 지수 C_{pn}가 있다. C_{pm} 지수는 공정 평균으로부터 공정의 변이가 충분히 작은지의 여부와 공정의 평균이 목표 값에 충분히 가까운지를 동시에 고려한 반면, C_{pn} 지수는 여기에 공정의 불량 율이 충분히 낮은 지의 여부를 함께 고려하였다. 이 지수는 $C_{pn} = \min(CPNL,\ CPLU)$으로 정의되는데 여기에서 $CPNL = \{\mu - LSL\}/3\sqrt{E(X-T)^2}$ 이고 $CPNU = \{USL - \mu\}/3\sqrt{E(X-T)^2}$ 이다. 이 지수는 공정이 정규분포를 가정할 때 생산공정으로부터의 관찰 치의 임의 표본에 의해서 추정되었다. 또한 이 지수는 Pearn, Kotz 와 Johnson(1992) 에 의해서 독립적으로 C_{pmk} 로 소개되었다.

그 밖에 몇 개의 PCI들을 통합한 지수가 Spiring(1997)에 의해서 제안되었는데 이 지수는 $C_{p\omega}(\omega) = (USL - LSL)/6\sqrt{\sigma^2 + \omega(\mu - T)^2}$이다. 여기에서 ω는 가중함수로서 $\omega = \left\{\left(\frac{d}{d - |\mu - M|}\right)^2 - 1\right\}\left(\frac{\sigma}{|\mu - T|}\right)^2$라면 $C_{p\omega}(\omega) = C_{pk}, C_{p\omega}(1) = C_{pm}$,

$C_{p\omega}(0) = C_p$ 이 된다. 여기에서 $d = (USL - LSL)/2$ 이다. 따라서 $C_{pw}(\omega)$ 는 기존의 PCI 들을 일반화 한 것으로 간주된다.

그러나 위의 모든 지수들은 X의 분포에서 가능한 비대칭을 고려하지 않았다. Johnson, Kotz 와 Pearn(1992)는 목표치의 위와 아래의 값에 대한 X 의 변이성에서 가능한 차이들을 고려한 유연한 지수 C_{jpk} 를 개발하였다.

이 지수는 $C_{jpk} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \min\left(\frac{USL-T}{\sqrt{E_{X>T}[(X-T)^2]}}, \frac{T-LSL}{\sqrt{E_{X<T}[(X-T)^2]}} \right)$으로 정의되었으며 C_{jpk} 의 추정량에 대한 표본분포는 X 의 분포가 평균이 T 이고 분산이 σ^2 인 정규분포인 특별한 경우에 유도되어졌다..

위에서 언급된 PCI들은 C_{jpk} 를 제외하고는 모두 공정의 변이를 정량적으로 나타내기 위하여 분산을 사용하였으며 C_{jpk} 에서는 Markowitz(1959)의 반분산의 개념을 이용함으로서 목표치, T, 의 위와 아래에서의 변이의 정도를 분리하여 측정함으로서 기존의 PCI에 비하여 공정의 변이에 대한보다 예민한 지수를 정의하려고 시도하였다. 본 논문에서는 특성치 X 에 대한 두 개의 규격한계, 목표치 와 목표치의 위와 아래의 값들에 대한 반분산을 고려함으로서 다음과 같은 새로운 공정능력지수 C_{cpk} 를 제안한다.

$$C_{cpk} = \frac{\min(USL-T,\ T-LSL)}{3\sqrt{2}\max\left(\sqrt{\int_{-\infty}^{T}(X-T)^2}, \sqrt{\int_{T}^{\infty}(X-T)^2}\right)} \tag{3.1}$$

C_{jpk} 는 C_{pn} 에 반분산의 개념을 적용한 PCI 인데 반하여 C_{cpk} 는 C^*_{pm} 의 분모에 반분산을 적용시킴으로서 특히 공정의 분포가 비대칭인 경우에 보다 효율적으로 공정능력을 평가 할 수 있는 지수가 될 것으로 기대된다. 만일 T 가 μ 와 같고 T 가 USL 과 LSL 의 대칭점이면 C_{jpk} 와 C_{cpk} 는 일치됨을 알 수 있다.

4. 모의실험

본 절에서는 C_{jpk} 와 C_{cpk} 의 추정량들에 대한 비편의성 및 일치성에 대한 성질을 연구하기 위하여 여러 가지 경우를 가정한 모의실험을 행한다. 각 PCI 들의 추정량을 구하기 위하여는 2 절에서 소개된 Choobineh 와 Branting(1986)의 반분산 근사값 (2.3),(2.4)와 Josephy 와 Aczel(1993)의 추정량 (2.6)을 사용한다. 본 연구에서의 모의실험은 특성치 X 가 평균이 100, 분산이 25인 정규분포와 자유도가 3 인 비대칭인 분포 χ^2 에 따른다고 가정하고 정규분포에서는 $USL = 110$ 과 $LSL = 90$, χ^2분포에서는 $USL = 3.3$ 과 $LSL = 2.7$ 로 고정하고 목표 값 T 가 평균 μ 에서 멀어질 때 새로운 PCI인 C_{cpk}와 C_{jpk} 의 참값과 모의실험에서 얻은 추정값 $\hat{C}_{cpk}$, $\hat{C}_{jpk}$ 에 대한 비인 $\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}$, $\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}$ 의 평균과 분산을 각각 구하여 비교하여 보았다. 표본의 수는 5(1)10(2)20(5)30 이며 반복횟수는 각 추정량을 1,000 번씩 반복 계산함으로서 평균과 분산을 구하였다. 도표 1 과 2 는 특성치 X 가 $N(100, 25)$인 경우에 대한 결과이고 도표 3 과 4 는 특성치

X 가 $\chi^2_{(3)}$ 을 따르는 경우에서의 결과이다. 그리고 도표 1 에서 도표 4 까지 ( )안의 값은 각각의 추정값의 비에 대한 표준오차를 나타내고, 모의실험은 MatLab(5.0 버전) 페키지를 사용하였다.

도표 1 특성치 X 가 $N(100,\ 25)$를 따를 때 Choobineh 와 Branting(1986)의 추정량에 대한 $E[\ \hat{C}_{jpk}/C_{jpk}], E[\ \hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$와 $S.D.[\ \hat{C}_{jpk}/C_{jpk}], S.D.[\ \hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$ 값의 비교

n \ T	$E[\ \hat{C}_{jpk}/C_{jpk}]$와 $S.D.[\ \hat{C}_{jpk}/C_{jpk}]$					$E[\ \hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$와 $S.D.[\ \hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$				
	100	102	104	106	108	100	102	104	106	108
5	0.9211	1.0004	0.9437	0.6881	0.3530	0.9211	1.1564	1.2405	1.2294	1.1760
	(.3570)	(.4093)	(.4059)	(.3294)	(.2162)	(.3570)	(.5254)	(.5452)	(.4613)	(.3321)
6	0.9312	0.9719	0.9109	0.6622	0.3345	0.9312	1.1053	1.1740	1.1683	1.1763
	(.3555)	(.3350)	(.3108)	(.2697)	(.1680)	(.3555)	(.4161)	(.4469)	(.3328)	(.2977)
7	0.9109	0.9913	0.9175	0.6948	0.3265	0.9109	1.1151	1.1669	1.1641	1.1514
	(.2762)	(.3196)	(.3064)	(.2700)	(.1517)	(.2762)	(.3732)	(.4024)	(.3038)	(.2588)
8	0.9152	0.9864	0.9437	0.6953	0.3284	0.9152	1.1241	1.1677	1.1411	1.1478
	(.2888)	(.2981)	(.2821)	(.2556)	(.1536)	(.2888)	(.3750)	(.3495)	(.2938)	(.2339)
9	0.9004	0.9889	0.9261	0.7011	0.3259	0.9004	1.1166	1.1491	1.1499	1.1270
	(.2590)	(.2591)	(.2553)	(.2410)	(.1397)	(.2590)	(.3048)	(.3288)	(.2721)	(.2107)
10	0.9031	0.9701	0.9306	0.6934	0.3240	0.9031	1.0943	1.1265	1.1220	1.1272
	(.2436)	(.2394)	(.2359)	(.2396)	(.1400)	(.2436)	(.2894)	(.2945)	(.2306)	(.2089)
12	0.9227	0.9770	0.9448	0.7082	0.3326	0.9227	1.0823	1.1110	1.1080	1.1209
	(.2302)	(.2238)	(.2062)	(.2107)	(.1251)	(.2302)	(.2792)	(.2499)	(.2081)	(.1784)
14	0.9132	0.9723	0.9513	0.7228	0.3345	0.9132	1.0769	1.1060	1.1044	1.0971
	(.1818)	(.2031)	(.1947)	(.2053)	(.1199)	(.1818)	(.2500)	(.2393)	(.1986)	(.1578)
16	0.9181	0.9748	0.9511	0.7171	0.3541	0.9181	1.0760	1.0939	1.0915	1.1011
	(.1874)	(.1944)	(.1819)	(.1935)	(.1261)	(.1874)	(.2483)	(.2147)	(.1779)	(.1467)
18	0.9126	0.9869	0.9570	0.7213	0.3383	0.9126	1.0869	1.0955	1.0807	1.0976
	(.1737)	(.1808)	(.1749)	(.1886)	(.1123)	(.1737)	(.2184)	(.2059)	(.1590)	(.1421)
20	0.9185	0.9877	0.9611	0.7162	0.3377	0.9185	1.0823	1.0795	1.0797	1.0867
	(.1652)	(.1766)	(.1668)	(.1674)	(.1049)	(.1652)	(.2153)	(.1810)	(.1509)	(.1327)
25	0.9221	0.9984	0.9661	0.7258	0.3392	0.9221	1.0734	1.0816	1.0766	1.0761
	(.1411)	(.1544)	(.1463)	(.1487)	(.0924)	(.1411)	(.1894)	(.1619)	(.1343)	(.1154)
30	0.9312	1.0098	0.9675	0.7313	0.3415	0.9312	1.0863	1.0691	1.0752	1.0699
	(.1397)	(.1474)	(.1286)	(.1378)	(.0837)	(.1397)	(.1848)	(.1507)	(.1227)	(.1048)

(단, ( ) 안은 $S.D.$ 임)

도표 2 특성치 X 가 $N(100,\ 25)$를 따를 때 Josephy 와 Aczel(1993)의 추정량에 대한 $E[\ \hat{C}_{jpk}/C_{jpk}], E[\ \hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$와 $S.D.[\ \hat{C}_{jpk}/C_{jpk}], S.D.[\ \hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$값의 비교

n \ T	$E[\ \hat{C}_{jpk}/C_{jpk}]$와 $S.D.[\ \hat{C}_{jpk}/C_{jpk}]$					$E[\ \hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$와 $S.D.[\ \hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$				
	100	102	104	106	108	100	102	104	106	108
5	0.9492	1.0680	1.0711	1.0324	1.0212	0.9492	1.2028	1.1902	1.1205	1.0893
	(.3793)	(.5039)	(.4139)	(.3126)	(.2870)	(.3793)	(.6224)	(.5072)	(.3865)	(.3266)
6	0.9231	1.0242	1.0514	1.0371	1.0181	0.9231	1.1444	1.1546	1.0957	1.0588
	(.3299)	(.3517)	(.3387)	(.2820)	(.2475)	(.3299)	(.4257)	(.4134)	(.3338)	(.2317)
7	0.9436	1.0156	1.0406	1.0358	1.0097	0.9436	1.1375	1.1248	1.0912	1.0637
	(.3291)	(.3347)	(.2943)	(.2887)	(.2450)	(.3291)	(.4210)	(.3553)	(.3136)	(.2382)
8	0.9342	1.0034	1.0310	1.0617	0.9906	0.9342	1.1027	1.1107	1.0671	1.0479
	(.2897)	(.3016)	(.2770)	(.2411)	(.2216)	(.2897)	(.3556)	(.3288)	(.2599)	(.2109)
9	0.9429	0.9967	1.0336	1.0101	0.9831	0.9429	1.0894	1.0988	1.0657	1.0419
	(.2720)	(.2776)	(.2552)	(.2232)	(.2090)	(.2720)	(.3421)	(.3006)	(.2534)	(.1839)
10	0.9153	0.9887	1.0227	1.0136	0.9982	0.9153	1.0800	1.0960	1.0647	1.0453
	(.2513)	(.2497)	(.2476)	(.2155)	(.2085)	(.2513)	(.1341)	(.3025)	(.2343)	(.1936)
12	0.9199	0.9999	1.0138	1.0071	0.9826	0.9199	1.0699	1.0673	1.0440	1.0307
	(.2296)	(.2348)	(.2229)	(.1825)	(.1900)	(.2296)	(.2775)	(.2517)	(.1924)	(.1654)
14	0.9196	0.9927	1.0227	1.0087	0.9811	0.9196	1.0669	1.0624	1.0417	1.0294
	(.2008)	(.20900	(.1917)	(.1735)	(.1713)	(.2008)	(.2481)	(.2174)	(.1742)	(.1451)
16	0.9280	0.9844	1.0160	1.0104	0.9830	0.9280	1.0584	1.0513	1.0351	1.0261
	(.19910	(.1984)	(.1864)	(.1657)	(.1585)	(.1991)	(.2376)	(.2119)	(.1654)	(.1389)
18	0.9171	0.9908	1.0129	1.0036	0.9819	0.9171	1.0577	1.0423	1.0305	1.0275
	(.1801)	(.1977)	(.1737)	(.1501)	(.1569)	(.1801)	(.2390)	(.1936)	(.1553)	(.1279)
20	0.9270	0.9975	1.0105	1.0089	0.9822	0.9270	1.0519	1.0405	1.0262	1.0221
	(.1703)	(.1873)	(.1580)	(.1339)	(.1466)	(.1703)	(.2321)	(.1790)	(.1377)	(.1184)
25	0.9244	0.9918	1.0109	1.0049	0.9811	0.9244	1.0443	1.0280	1.0209	1.0169
	(.1532)	(.1520)	(.1442)	(.1227)	(.1360)	(.1532)	(.1854)	(.1526)	(.1271)	(.1046)
30	0.9243	0.9956	1.0058	1.0034	0.9813	0.9243	1.0362	1.0200	1.0117	1.0074
	(.1391)	(.1352)	(.1255)	(.1121)	(.1198)	(.1391)	(.1657)	(.1351)	(.1121)	(.0966)

(단, ( ) 안은 $S.D.$ 임)

도표 3 특성치 X 가 $\chi^2_{(3)}$에 따를 때의 Choobineh 와 Branting(1986) 추정량에 대한 $E[\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}]$, $E[\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$와 $S.D.[\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}]$, $S.D.[\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$ 값의 비교

n \ T	$E[\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}]$와 $S.D.[\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}]$					$E[\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$와 $S.D.[\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$				
	2.8	2.9	3	3.1	3.2	2.8	2.9	3	3.1	3.2
5	0.9559	0.9424	1.1687	1.5319	1.8682	1.2564	1.2309	1.1687	1.1283	1.1270
	(.4801)	(.3774)	(.4791)	(.8356)	(1.5193)	(.5626)	(.5398)	(.4791)	(.4391)	(.4859)
6	0.9327	0.9043	1.1444	1.5155	1.6757	1.2227	1.1842	1.1444	1.1283	1.0906
	(.3683)	(.2773)	(.4423)	(.8171)	(1.1866)	(.5273)	(.4640)	(.4423)	(.4166)	(.4403)
7	0.9361	0.9217	1.1598	1.4837	1.5612	1.2171	1.2094	1.1598	1.1215	1.0624
	(.3205)	(.2812)	(.4159)	(.7626)	(1.0400)	(.4827)	(.4668)	(.4159)	(.3881)	(.3552)
8	0.9132	0.9075	1.1602	1.4150	1.5223	1.2207	1.1820	1.1602	1.1048	1.0802
	(.2530)	(.2266)	(.3970)	(.7010)	(.9496)	(.4385)	(.3938)	(.3970)	(.3589)	(.3260)
9	0.9030	0.9144	1.1455	1.4258	1.4915	1.2321	1.1978	1.1455	1.1187	1.0565
	(.2477)	(.2392)	(.3609)	(..6966)	(.9245)	(.4441)	(.4385)	(.3609)	(.3509)	(.3234)
10	0.9046	0.8972	1.1468	1.4082	1.4897	1.2039	1.1496	1.1468	1.1212	1.0792
	(.2222)	(.2192)	(.3676)	(.6582)	(.8716)	(.4105)	(.3921)	(.3676)	(.3240)	(.3087)
12	0.8941	0.8905	1.1104	1.3751	1.4209	1.2080	1.1565	1.1104	1.1134	1.0720
	(.1899)	(.1799)	(.3410)	(.6237)	(.7627)	(.3891)	(.3562)	(.3410)	(.3049)	(.2817)
14	0.8913	0.9034	1.1183	1.3189	1.3882	1.2159	1.1896	1.1183	1.0951	1.0642
	(.1773)	(.1772)	(.3219)	(.5802)	(.7445)	(.3878)	(.3482)	(.3219)	(.2963)	(.2704)
16	0.8823	0.8894	1.1362	1.3082	1.3117	1.1986	1.1408	1.1362	1.1046	1.0594
	(.1640)	(.1624)	(.3074)	(.5558)	(.6338)	(.3597)	(.3287)	(.3074)	(.2870)	(.2653)
18	0.8832	0.8952	1.1237	1.2913	1.3057	1.1804	1.1497	1.1237	1.1063	1.0667
	(.1544)	(.1613)	(.3038)	(.5245)	(.5904)	(.3367)	(.3342)	(.3038)	(.2709)	(.2513)
20	0.8809	0.8910	1.1213	1.2620	1.2907	1.1739	1.1549	1.1213	1.0999	1.0672
	(.1497)	(.1504)	(.2975)	(.5057)	(.5918)	(.3335)	(.3203)	(.2975)	(.2788)	(.2563)
25	0.8664	0.8814	1.1144	1.2445	1.2341	1.1573	1.1443	1.1144	1.1057	1.0657
	(.1355)	(.1337)	(.2723)	(.4369)	(.4861)	(.3173)	(.2953)	(.2723)	(.2408)	(.2298)
30	0.8691	0.8827	1.1205	1.2051	1.1902	1.1658	1.1392	1.1205	1.0975	1.0668
	(.1234)	(.1225)	(.2661)	(.3949)	(.3901)	(.3001)	(.2734)	(.2661)	(.2413)	(.2121)

(단, ( ) 안은 $S.D.$ 임)

도표 4 특성치 X 가 $\chi^2_{(3)}$에 따를 때 Josephy 와 Aczel(1993)의 추정량에 대한
$E[\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}], E[\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$와 $S.D.[\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}], S.D.[\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$ 값의 비교

n \ T	$E[\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}]$와 $S.D.[\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}]$					$E[\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$와 $S.D.[\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$				
	2.8	2.9	3	3.1	3.2	2.8	2.9	3	3.1	3.2
5	1.2240	1.0209	1.2009	1.7109	2.5692	1.3390	1.2732	1.2009	1.1757	1.1184
	(.7767)	(.4177)	(.4896)	(.9900)	(2.1528)	(.6194)	(.5380)	(.4896)	(.4779)	(.4332)
6	1.1739	0.9929	1.1882	1.6646	2.2421	1.2715	1.2511	1.1882	1.1738	1.1046
	(.5140)	(.3268)	(.4572)	(.8985)	(1.9538)	(.5254)	(.4919)	(.4572)	(.4375)	(.4004)
7	1.1491	0.9953	1.1764	1.5527	2.0606	1.2763	1.2363	1.1764	1.1383	1.0910
	(.4489)	(.3008)	(.4396)	(.8089)	(1.7622)	(.5261)	(.4522)	(.4396)	(.3857)	(.3673)
8	1.1315	0.9733	1.1669	1.5364	2.0526	1.2585	1.2019	1.1669	1.1410	1.1007
	(.4196)	(.2808)	(.4158)	(.8037)	(1.7380)	(.4805)	(.4465)	(.4158)	(.3779)	(.3485)
9	1.0939	0.9821	1.1532	1.4872	1.9547	1.2204	1.2023	1.1532	1.1215	1.0965
	(.3631)	(.2296)	(.4213)	(.7735)	(1.5881)	(.4425)	(.4096)	(.4213)	(.3639)	(.3439)
10	1.0882	0.9671	1.1542	1.4502	1.7662	1.2156	1.1779	1.1542	1.1204	1.0827
	(.3219)	(.2219)	(.3747)	(.7232)	(1.3848)	(.4405)	(.4057)	(.3747)	(.3494)	(.3204)
12	1.0808	0.9651	1.1606	1.3982	1.6245	1.1765	1.1561	1.1606	1.1118	1.0829
	(.2838)	(.2014)	(.3590)	(.6911)	(1.2456)	(.4050)	(.3871)	(.3590)	(.3359)	(.3004)
14	1.0577	0.9605	1.1514	1.3372	1.5147	1.1757	1.1521	1.1514	1.0936	1.0624
	(.2602)	(.1820)	(.3477)	(.6400)	(1.0966)	(.3810)	(.3685)	(.3477)	(.3228)	(.2920)
16	1.0653	0.9639	1.1169	1.3162	1.4957	1.1813	1.1449	1.1169	1.0910	1.0928
	(.2358)	(.1683)	(.3278)	(.6050)	(.9771)	(.3829)	(.3582)	(.3278)	(.2953)	(.2737)
18	1.0559	0.9863	1.1107	1.2589	1.4079	1.1574	1.1413	1.1107	1.0760	1.0641
	(.2106)	(.1755)	(.3265)	(.5771)	(.9037)	(.3602)	(.3526)	(.3265)	(.3002)	(.2686)
20	1.0474	0.9744	1.1119	1.2554	1.3326	1.1597	1.1391	1.1119	1.0773	1.0492
	(.1899)	(.1558)	(.3135)	(.5609)	(.7694)	(.3611)	(.3284)	(.3135)	(.2919)	(.2550)
25	1.0339	0.9780	1.1019	1.2255	1.2481	1.1292	1.1117	1.1019	1.0957	1.0511
	(.1636)	(.1371)	(.2786)	(.4673)	(.6523)	(.3197)	(.3125)	(.2786)	(.2707)	(.2322)
30	1.0304	0.9842	1.0957	1.1934	1.2046	1.1194	1.1205	1.0957	1.0747	1.0551
	(.1499)	(.1337)	(.28010	(.4603)	(.4920)	(.3133)	(.2891)	(.2801)	(.2612)	(.2361)

(단, ( ) 안은 $S.D.$ 임)

5. 결 론

도표 1 과 2는 각각 특성치 X 가 $N(100,25)$에 따를 때 Choobineh 와 Branting(1986)과 Josephy와 Aczel(1993)의 추정량을 이용한 두 PCI에 대한 $E[\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}], E[\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$와 $S.D.[\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}]$, $S.D.[\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$의 값을 비교한 표이다.

도표 1은 Choobineh 와 Branting(1986)의 추정량을 이용하여 Johnson, Kotz 와 Pearn(1992)의 지수와 본 연구에서 제안한 지수의 성능을 나타낸 표이다. 두 개의 추정량 모두 편의(bias)되었고 목표값 T 가 평균인 100과 같을 때는 두 PCI의 값이 3절에서 언급한 바와 같이 같다는 것을 알 수 있다. 그리고 목표값 T 가 평균으로 부터 멀어질수록 편의가 증가하여 성능이 약간 감소된다. 또한 표본크기 n 이 증가함에 따라 두 지수에 대한 편의와 표준오차는 감소하고 T 가 μ 로부터 멀어질 때 감소한다. 그러나 목표값 T 가 μ 로부터 멀어질 때 Johnson, Kotz 와 Pearn(1992)이 개발한 C_{jpk} 는 본 연구에서 제안한 C_{cpk} 보다 성능이 훨씬 떨어지는 사실로부터 새로 개발한 PCI 의 우수성을 알 수 있다.

도표 2 는 Josephy와 Aczel(1993)의 추정량을 이용하여 두 지수의 성능을 나타낸 표이다. 결과는 도표 1 과 유사하지만 두 PCI 에 대한 추정량의 편의에 관해서는 Choobineh 와 Branting(1986)의 추정량을 이용한 것보다는 나은 것을 알 수 있다. 그 이유는 Josephe와 Actel(1993)의 추정량이 불편이고 일치성 있는 추정량이기 때문이다. 또한 표본의 크기가 커짐에 따라 목표값에 관계없이 두 추정량의 편의가 감소되는 것을 알 수 있다.

도표 3 과 4 는 각각 특성치 X 가 $\chi^2_{(3)}$ 에 따를 때 Choobineh 와 Branting(1986)과 Josephy 와 Aczel(1993)의 추정량을 이용한 두 PCI에 대한 $E[\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}], E[\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$와 $S.D.[\hat{C}_{jpk}/C_{jpk}]$, $S.D.[\hat{C}_{cpk}/C_{cpk}]$의 값을 비교한 표이다.

도표 3 은 Choobineh 와 Branting(1986)의 추정량을 이용하여 Johnson, Kotz 와 Pearn(1992)의 지수와 본 연구에서 제안한 지수의 성능을 나타낸 표이다. 두 개의 추정량 모두 T 가 평균으로 부터 멀어질 때 편의(bias)가 증가하고 목표값 T 가 평균인 3 인 때는 도표 1,2 의 결과와 마찬가지로 두 PCI의 값이 같다. 또한 표본크기 n 이 증가함에 따라 두 지수에 대한 편의와 표준오차는 감소하고 T 가 μ 로부터 멀어질 때 표준오차는 감소한다. 그러나 목표값 T가 μ 로부터 멀어질 때 Johnson, Kotz 와 Pearn(1992)이 개발한 C_{jpk} 는 본 연구에서 제안한 C_{cpk} 보다 편의가 훨씬 크다는 사실로부터 비대칭인 분포에서도 새로 개발한 PCI 의 우수성을 알 수 있다.

도표 4 는 Josephy와 Aczel(1993)의 추정량을 이용하여 두 지수의 성능을 나타낸 표이다. 결과는 도표 3 과 유사하지만 두 PCI 에 대한 성능을 볼 때 Choobineh 와 Branting(1986)의 추정량을 이용한 것보다는 나은 것을 알 수 있다. 이 이유는 Josephy와 Aczel(1993)의 추정량이 불편이고 일치성 있는 추정량이기 때문이다. 또한 표본의 크기가 커짐에 따라 모든 경우에 편의가 감소됨을 알 수 있다.

본 모의실험에서는 $\chi^2_{(3)}$ 인 분포의 경우에만 다루었지만 자유도가 커짐에 따라 대칭에 가까워지고 제안한 PCI인 C_{cpk} 에서 분모의 값이 작아짐에 따라 C_{cpk} 의 값은 커짐을 알 수가 있다. 이처럼 비대칭인 꼬리가 긴 분포에서 C_{cpk} 는 왜도에 민감하다는 특징이 있다. 또한 제품의 특성치가 목표 값으로부터 멀어지면 멀어질수록 C_{cpk} 의 값은 작아짐을 알 수 있다.

참고문헌

1. Bai, D. S. and Choi, I. S.,(1995), $\bar{x}$ and R control charts for skewed populations,"*Journal of Quality Technology*, Vol. 27, No. 2, p.p. 120-131.
2. Beazley, C. E. and Marcucci, M. O.,(1988),"Capability indices: Process performance indicators," Annual Technolgy Conference, ASQC, Dallas, Texas, 516-523
3. Boyles, R. A.(1991), "The Taguchi capability index," *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, 1-26
4. Chan, L. K., Cheng, S. W. and Spiring, F. A.,(1988a), "The robustness of the process capability index, C_p, to departures from normality," In Statistical Theory and Data Analysis Ⅱ(K. Matusita, ed.) North Holland: Amsterdam, 223-239.
5. Chan, L. K., Cheng, S. W., and Spiring, F. A.,(1988b), "New Measure of Process Capability Indices, C_{pm}," *Journal of Quality Technology*, Vol. 20, 162-175.
6. Choi, B. C. and Owen, D. B.,(1990), "A study of new process capability index," *Communication of Statistics*, Theory and Methods, Vol. 19, No. 4, 1231-1245.
7. Chou, Y.M. and Owen, D.B.,(1989), "On the distribution of the estimated process capability indices," *Communications in Statistics*, Theory and Methods, Vol. 18, 4549-4560.
8. Choobineh, F. and Ballard, J. L.,(1987), Control-limits of QC charts for skewed distributions using weighted variance. *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 36, 473-477.
9. Choobineh, F. and Ballard, J. L.,(1989), A method of confidence interval construction for simulation output analysis," *Operational Research Letters*, Vol. 8, 265-270.
10. Coobineh, F., and Branting, D.,(1986), "Simple approximation for semivariance," *European Journal of Operational Research*, Vol. 27, 364-370.
11. Choobineh, F. and Lee, H. C., (1991), "A split distribution method for constructing confidence intervals for simulation output analyses," *International Journal System Science*, Vol. 22, No. 2, 367-374.
12. Choobineh, F, and Park, D. H.,(1990), "A nonparametric small sample estimator of mean residual life," *Journal of the Korean Statistical Society*, Vol. 19, No. 1, 80-87.
13. Chou, Y. M., and Owen, D. B.,(1989), " On the distribution of the estimated process capability indices," *Communications in Statistics*, Theory and Methods, Vol. 18,

4549-4560.

14. Franklin, L. A. and Wasserman, G. S., (1992), Bootstrap lower confidence limits for capability indices," *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, No. 4, 196-210.
15. Hsiang, T. C. and Taguchi, G.,(1985), "A Tutorial on Quality Control and Assurance-The Taguchi Methods," ASA Annual Meeting, Las Vegas, NV.
16. Johnson, N. L., Kotz, S. and Pearn, W. L.,(1992), "Flexible process capability indices," Technical Report, No. 2072.
17. Josephy, N. H. and Aczel, A. D., (1993), "A statistically optimal estimator of semivariance," *European Journal of Operational Research*, Vol. 67, 267-271.
18. Kane, V. E.,(1986), " Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, 41-52.
19. Kotz, S., Pearn, W.L. and Johnson, N. L.,(1992), "Some process capability indicators are more reliable than one might think(A comment on Bissell(1990))," *Applied Statistics,* Vol. 42, 55-62.
20. Markowitz, H. M.,(1959), "Pertfolio Selection, Efficient Diversification of Investment," Cowles Foundation Monograph 16, Yale University Press.
21. Pearn, W. L., Kotz, S. and Johnson, N. L.,(1992), " Distributional and inferential properties of process capability indices, old and new," *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, 216-231.
22. Spiring, F. A.,(1997), "A Unifying Approach to PCIs," *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, No. 1, 49-58.
23. Sullivan, L. P.,(1985), "Letters," *Quality Process*, Vol. 18, 7-8.
24. Zhang, N. F., Steinbeck, G. A. and Wardrop, D. M.,(1990)," Interval estimation of process capability index C_{pk}," *Communications in Statistics*, Theory and Methods, Vol. 19, 4455-4470.