

---

# 층상 유한요소를 이용한 철근콘크리트 보의 처짐 해석모델

## Analytical Modeling for Reinforced Concrete Beam Deflections Using Layered Finite Elements



최 봉 섭\*

Choi, Bong-Seob



권 영 웅\*\*

Kwon, Young-Wung

---

### ABSTRACT

The use of higher strength materials with the strength method of design has resulted in more slender members and shallower sections. For this reason, it is necessary to satisfy the requirements of serviceability even though the structural safety is the most important limit state. This paper is only concerned with the control of deflections in the serviceability.

In this study, an analytical model is presented to predict the deflections of reinforced concrete beams to given loading and environmental conditions. This model is based on the finite element approach in which a finite element is generally divided into a number of layers over the depth. The model takes account into the non-linear effects such as tension stiffening effect due to cracking, creep and shrinkage. Comparisons are made with available measured deflections reported by others to assess the capability of the layered beam model. The calculated values of instantaneous and long-term deflection show good agreement with experimental results in the range of tension stiffening parameter  $\beta$  between 2.5 and 3.0.

**Keywords :** reinforced concrete beam, tension stiffening, cracking, creep, shrinkage, deflection, layered beam model

---

\* 정희원, (주)합건설방재기술단, 인천대·중앙대강사  
\*\* 정희원, 인천대학교 건축공학과 교수

·본 논문에 대한 토의를 2000년 2월 29일까지 학회로 보  
내 주시면 2000년 4월호에 토의회답을 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

일반적으로 허용응력설계법 (Working Strength Design)의 사용은 부재들의 큰 단면을 요구해왔기 때문에 사용성(Serviceability)에 대한 관심이 상대적으로 크지 않았다. 그러나 1960년대 초부터 미국이나 유럽나라들에서는 강도설계법 (Strength Design Method)의 도입과 콘크리트의 고강도화로 말미암아 구조물의 단면을 줄일 수가 있었지만 이로 인해 사용성의 문제들, 즉 과도한 처짐, 균열 및 진동 등의 부정적 요소들을 야기시키게 되었다. 또한 우리나라에서도 국제화 추세에 맞추어 극한강도설계법이 1990년도 후반기에 확정 고시되어 본격적으로 활용화되는 시기로 접어들면서, 이러한 유사 문제들을 일으킬 수 있는 소지가 상대적으로 높아지게 되었다. 이에 본 연구에서는 이런 문제들 중 특히 휨 하중을 받는 철근콘크리트 보에 대한 처짐 문제에 한하여 비교적 간단하고 정확하게 단·장기 처짐을 계산할 수 있는 해석모델을 제안하고자 한다.

이때 철근콘크리트 휨 부재의 단·장기 처짐의 해석을 위해서 유한요소법의 사용은 국부적으로 일어날 수 있는 비선형재료강성 (Nonlinear Material Stiffness)의 변이를 효과적으로 계산할 수 있는 유용한 방법중의 하나가 될 수 있다. 그래서 본 모델에서는 보의 길이 방향에 따라 각각 나뉘어진 보 요소를 다시 깊이방향으로 여러 개의 층상으로 나누어 각 층의 가운데 지점에 대한 응력, 변형률 그리고 강성상수들을 계산하고 모든 층들의 이러한 값들을 합하여 한 요소의 전체 강성 매트릭스를 구하고자 한다. 또한 재료의 비선형성에 영향을 주는 요인들로서 인장균열로 인한 인장강성(Tension Stiffening) 과 크리프, 건조수축으로 인한 장기변형 영향을 이 모델에 고려하고자 하였다.

본 연구에서는 제안된 해석모델로부터 얻어진 단·장기 처짐의 정확성을 입증하기 위해 실험으로 얻어진 등분포하중을 받는 단순보들의 처짐 값들과 비교 분석 하고자 하였다. 이러한 실험 값들은 Branson<sup>(3)</sup>, Hollington<sup>(4)</sup> 그리고 Washa and Fluck<sup>(7),(8)</sup>들의 논문에서 인용하였다.

## 2. 층상 보 모델의 제안

인장균열로 인한 인장강성, 크리프와 건조수축들과 같은 비선형 영향들은 부재의 전 길이에서 재료강성의 변화를 가져온다. 그래서 제안된 층상 보 모델(Layered Beam Model)은 인장균열로 인한 인장강성 영향을 고려하기 위해 균열이 일어난 후 인장응력-변형률 관계를 선형적으로 감소한다고 가정하고, 크리프 변형을 위해서는 재령 고려 유효탄성계수(Age-Adjusted Effective Modulus)를, 또한 건조수축 변형에 대해서는 등가 인장력(Equivalent Tensile Force)을 도입하였다. 이때 장기 하중 하에서의 인장강도는 시간에 따라 감소된다고 가정할 수 있다.

### 2.1 인장 강성 효과

콘크리트의 인장응력이 극한인장강도에 도달했을 때 첫 번째 균열들은 부재에 일정한 간격을 두고 발생한다. 가해진 하중은 철근에 의해 균열들을 가로질러 전달된다. 그리고 철근과 콘크리트의 부착으로인해 균열들 사이에 있는 콘크리트들은 계속해서 인장응력을 받아들일 수가 있다. 또한 계속해서 하중이 증가한다면 보다 많은 부가적인 균열이 형성되고 따라서 콘크리트에 의해서 전달되는 하중의 비율은 점차 감소하게 된다. 이러한 인장강성 효과를 설명한 응력-변형률 관계는 Scanlon and Murray<sup>(5)</sup>가 제시하였고, 이후 많은 연구자들에 의해 인용되고 있다.

본 연구에서는 Fig. 1에서 보여주는 바와 같이 모델링의 간편성을 위해 인장균열 후의 콘크리트 인장거동을 선형적으로 감소되는 것으로 가정하였다. 그리고 본 논문에서는 이것을 선형계단식 모델이라고 지칭하였다.  $\beta = \epsilon_{tu} / \epsilon_{ti}$  로서 나타내는 인장 강성 파라미터(Tension Stiffening Parameter)  $\beta$ 는 균열 후 최대 응력-변형률 관계를 설명하기 위해 사용된다. 이때 위에서 언급되어진 개념을 해석모델에 적용하기 위해서는 아래 설명된 반복적인 절차를 통하여 균열로 인한 콘크리트 층들의 감소된 탄성계수 값들 계산이 필요하게 된다.

- ① 인장부분의 탄성계수  $E_t$  는 Fig.1에서 보여주는 바와 같이 인장응력이 콘크리트파괴계수,  $f_t$  에 도달 할때까지는 압축부분의 탄성계수와 같다 (단계 1).
- ② 만약 인장응력이 정해진 극한인장강도를 초과하면 인장부분의 탄성계수  $E_t$ 는 보다 감소된 탄성계수  $E_{t1}$ 으로 수정된다(단계 2).
- ③ 다른 콘크리트의 층들도 위의 단계를 반복한다.
- ④ 다음단계로서 인장응력이 다음 낮은  $f_{t1}$ 을 초과하지 않는다면 이전에 얻어진  $E_{t1}$ 은 수정될 필요가 없는 것으로 가정한다 (단계 3).
- ⑤ 만약  $f_{t1}$ 을 초과한다면  $E_{t1}$ 은 다음 낮은  $E_{t2}$ 로 수정된다 (단계 4).
- ⑥ 이러한 반복을 응력이 적절한 수렴 범위 안에 들때까지 계속 반복한다.

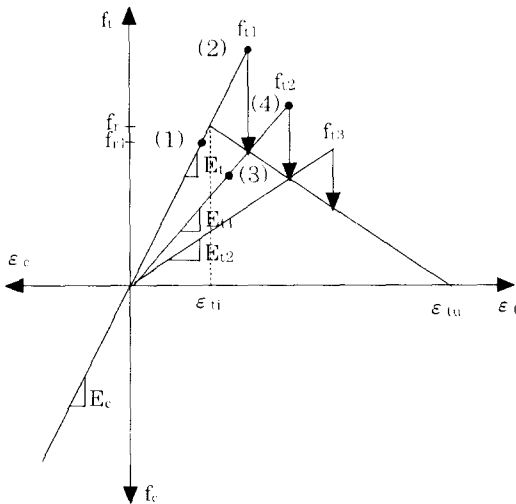


Fig. 1 Linear Stepped Model for Tension Stiffening

## 2.2 크리프와 건조수축에 대한 ACI 제안식

주어진 하중과 환경조건하에서 철근콘크리트 보의 장기처짐을 예상하기 위해서는 재료의 특성을 알아야 하고 나아가 장기거동을 대변 할 수 있는수학적 모델이 필요하다. 어떤 환경조건하에

있는 콘크리트의 크리프와 건조수축의 반응을 예측하기 위한 몇몇 모델들이 제안되어왔다. 그 중에서도 본 연구에서는 ACI Committee Report 209R-92<sup>(1)</sup>에 의해서 권장하는 제안식들을 인용하였다.

크리프 영향에 대해서는 Trost<sup>(6)</sup>에 의해서 처음으로 제안되었고, Bazant<sup>(2)</sup>에 의해서 수정보완된 재령 고려 유효탄성계수(Age-Adjusted Effective Modulus)를 인용하였다. 이 재령 고려 유효탄성계수는 식 (1)과 같고 수정된 탄성계수를 갖는 탄성해석으로 이루어져 있다.

$$E_{ca} = \frac{E_{ci}}{1 + \chi \phi_t} \quad (1)$$

$E_{ci}$ 는 초기 탄성계수이고 Bazant<sup>(2)</sup>에 의해서 제시된 노화계수 (Aging Coefficient)  $\chi$  값은 하중이 가해진 시간  $t_{ia}$ 과 하중기간  $t_a - t_{ia}$  그리고 초기변형률에 대한 크리프 변형률의 비로서 나타내는 극한 크리프 계수(Ultimate Creep Coefficient),  $\phi_u$ 에 좌우된다.  $t_d$ 는 콘크리트를 타설한 후의 일정기간을 나타낸다. 노화계수들의 값들은 ACI Committee Report 209R-92<sup>(1)</sup>의 Table 5.5.1에서 찾아 볼 수 가 있다. 또한 재하기간  $t$  동안의 크리프 계수  $\phi_t$ 는 표준조건인 경우 식 (2)에 의해서 계산될 수 있다. 그리고,

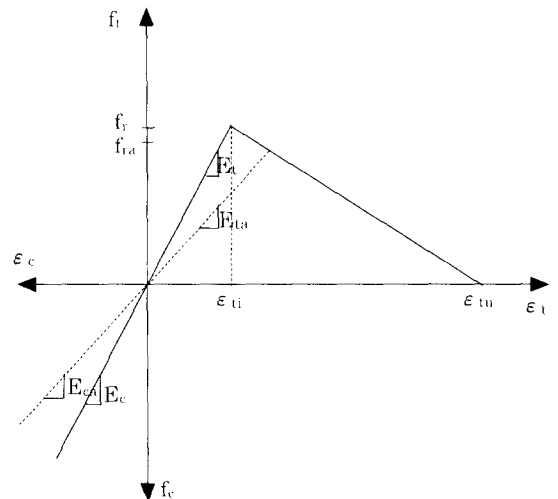


Fig. 2 Linear Uniaxial Stress-Strain Relationship for Creep Effect

$$\phi_t = \frac{t^{0.6}}{10 + t^{0.6}} \phi_u \quad (2)$$

표준조건 이외의 경우 또한 제안된 보정계수식들을 이용하여 크리프 계수값들을 얻을수 있다.

그러므로 크리프를 고려할 때 초기 탄성계수  $E_{ci}$ 는 감소된 탄성계수  $E_{ca}$ 로 수정된다. 그래서 본 해석모델에서는 Fig.2에서와 같은 선형-변형률 관계를 적용하였다. 다시 말해서 단·장기 처짐의 해석을 위해 같은 2차(Post-Peak) 응력-변형률 관계를 사용하므로써 장기응력 하에서 인장강도는 시간이 흐름에 따라 감소하는 것으로 가정하였다.

철근과 편심률이 전 공간에 걸쳐 일정하고 연속보의 정(+).부(-)모멘트 지역에서 일정한(uniform)보들에 대한 건조수축 처짐은 식(3)에 의해서 계산될 수 있다.

$$\Delta_{sh} = \xi_w \kappa_{sh} l^2 \quad (3)$$

$\xi_w$ 는 지지조건들을 나타내기 위해 ACI Committee Report 209R-92<sup>(1)</sup>의 Table 4.2.1 에서 보여준 처짐계수이고  $\kappa_{sh}$ 는 건조수축 비틀림(Shrinkage Warping)으로 인한 곡률이다. 곡률은 Branson<sup>(3)</sup>에 의해서 수정된 등가인장 강도법(Equivalent Tensile Force Method)을 인용하여 식(4)에 의해 계산하였다.

$$\kappa_{sh} = \frac{T_s e_g}{E_c I_g} \quad (4)$$

$$T_s = (A_s + A'_s) \epsilon_{sh} E_s$$

$A_s$  = 압축 철근의 단면적

$A'_s$  = 인장 철근의 단면적

$e_g$  = 전체 콘크리트 단면적의 도심축과 철근까지의 거리

$I_g$  = 도심축에 대한 등가단면 2차 모멘트

위에서 언급된 균열해석을 위한 반복적인 절차와 크리프 처짐식을 위한 2차 응력-변형률 관계와 건조수축 처짐을 위한 ACI Committee 209 처짐식들을 본 프로그램에 응용하였다.

본 해석프로그램은 Fig.3의 프로그램 흐름도(Program Outline)로부터 제안되었다.

### 3. 해석 결과의 고찰

제안된 해석 모델로부터 얻어진 처짐값들은 10개의 단기처짐과 6개의 장기처짐 단순보 시험 결과에서 얻어진 시험값들과 비교하였다. 이때 실험체들의 재료특성과 단면치수들은 Table 1, Table 2와 같다. 그리고 단·장기 처짐값들의 계산은 하강인장(Post-tensile) 균열거동이 인장강성과파라미터  $\beta$  값들에 의해 민감하기 때문에 1.5~3.5 사이의 4개의 값들을 선택하여 수행하였다.

단기 처짐값들의 성향을 보여주는 Fig.4는 실험에서 측정된 처짐값들에 대한 계산된 처짐값들의 비율로 나타내고 있고, 또한 각각의  $\beta$  값에 대한 비율값들의 평균값을 직선으로 연결하여 보여주고 있다. 일반적으로 2.5 와 3.0 사이의  $\beta$  값에서 계산된 처짐 값들은 실험 값들과 근접한 일치를 보여주고 있다. 즉, 이러한 비율값들의 평균

Table 1 Beam Details and Concrete Section Properties for Simple Span Test Beams

Reference	Designation	W (plf)	$f'_c$ (psi)	$f_r$ (psi)	l (in)	b (in)	h (in)	$A_{st}$ (in <sup>2</sup> )	$A_{sb}$ (in <sup>2</sup> )
Washa and Fluck	B1.B4	107.0	3.020	413	240	6	8	0.62	0.62
	B2.B5	107.0	3.020	413	240	6	8	0.31	0.62
	B3.B6	107.0	3.020	413	240	6	8	-	0.62
	D1.D4	229.0	2.920	405	150	12	5	0.8	0.8
	D2.D5	229.0	2.920	405	150	12	5	0.4	0.8
Hollington	D3.D6	229.0	2.920	405	150	12	5	-	0.8
	#61~63	234.0	5.460	495	240	18	9	-	1.06
Branson	#73~75	234.0	5.460	495	240	18	8	-	1.06
	SB1	62.4	5.130	539	108	4	5	-	0.11
	SB3	135.2	5.130	539	108	4	5	-	0.33

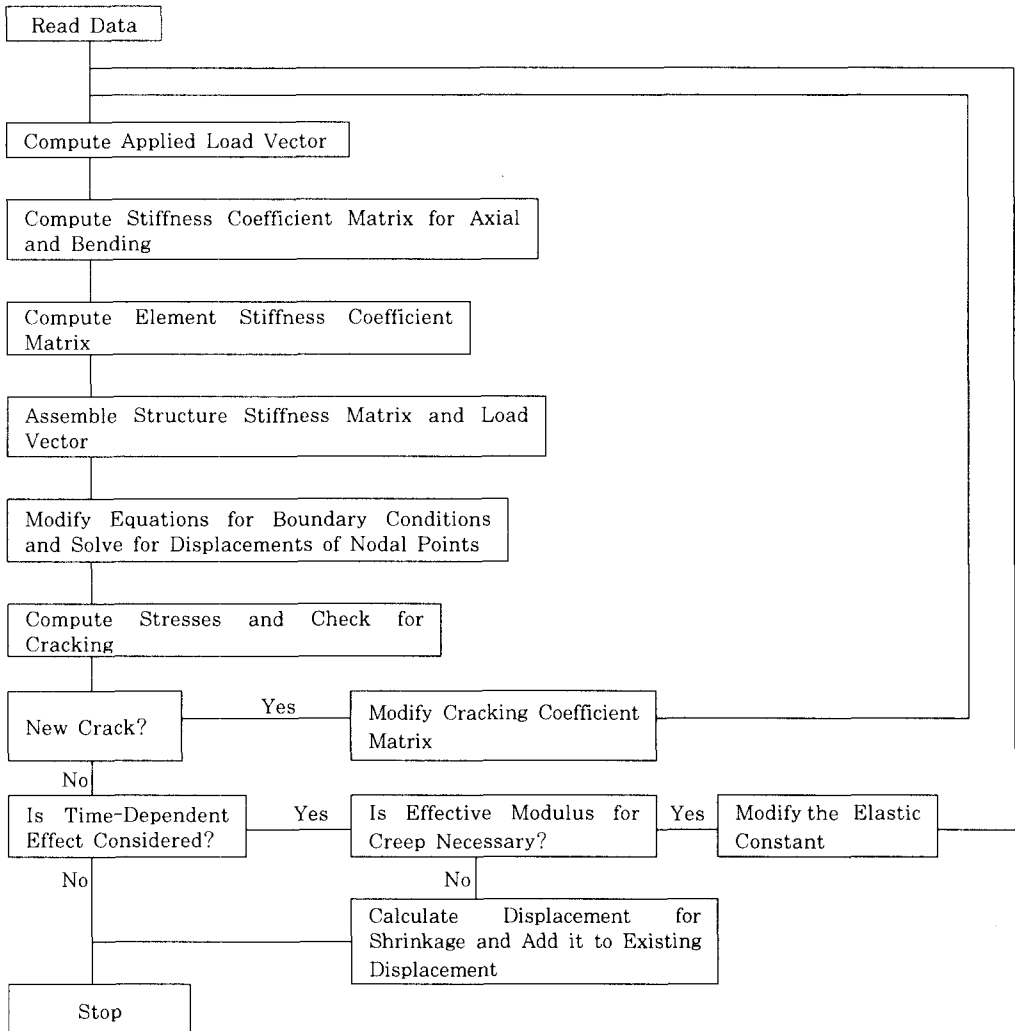


Fig.3 Program Outline of Deterministic Layered Beam Model

Table 2 Concrete Section Properties for Long-Term Deflection of Simple Span Test Beams

Reference	Designation	Age at Loading (Days)	Duration of Test(Days)	Ultimate Creep Coefficient ( $\phi_u$ )	Creep Coefficient ( $\phi_t$ )	Aging Coefficient ( $\chi$ )	$\epsilon_{sh} \times 10^{-6}$ (in/in)
Washa and Fluck	D2,D5	14	913	4.92	4.22	0.85	750
	D3,D6	14	913	4.92	4.22	0.85	750
Hollington	#61~63	28	706	1.30	1.08	0.731	477
	#73~75	28	482	1.08	0.867	0.695	467
Branson	SB1	28	60	1.80	0.97	0.775	245
	SB3	28	60	1.80	0.97	0.775	245

값들은 5%이내의 오차를 보이고 있다. 특히  $\beta = 3.0$ 일 경우에는 평균값이 1.016 이고, 변동계수 (Coefficient of Variation)가 제일 낮은 0.11로 나타나고 있다.

또한 Fig.5에서 보여주는 바와 같이 총 장기 처짐 값들의 흐름도 위에서 언급된 단기처짐의 경향과 비슷하였다.  $\beta = 3.0$ 인 경우에서, 실험에서 측정된 처짐 값들에 대한 계산된 처짐 값들의 비율들의 평균값은 1.011 이고, 변동계수 (Coefficient of Variation) 는 4가지 경우에서 제일 낮은 0.1 이었다.

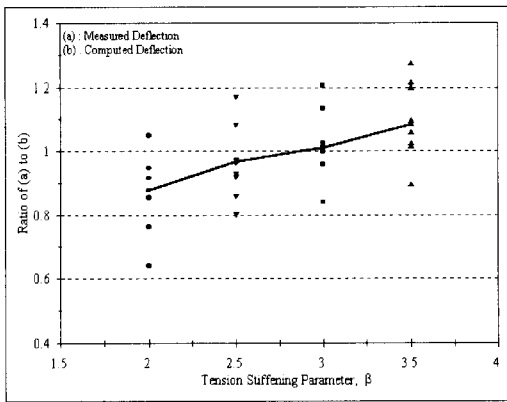


Fig. 4 Variation of Ratio of Measured Instantaneous Deflections to Computed Instantaneous Deflections with Tension Stiffening Parameter,  $\beta$

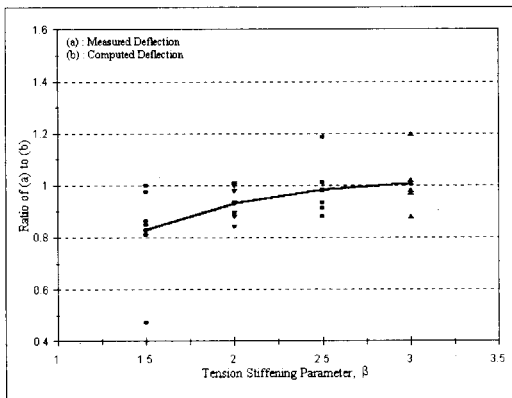


Fig. 5 Variation of Ratio of Measured Long-Term Deflections to Computed Long-Term Deflections with Tension Stiffening Parameter,  $\beta$

## 4. 결론

본 연구에서는 휨하중을 받는 처짐 문제에 한하여 층상 유한요소를 이용하여 단·장기 처짐을 계산할 수 있는 해석모델을 제안하였다. 제안된 해석모델에서는 인장 균열로 인한 인장강성 영향, 크리프와 건조수축들과 같은 비선형 영향등을 고려하였고, 또한 얻어진 단·장기 처짐값들을 실험으로 얻어진 등분포하중을 받는 단순보들의 처짐 값들과 비교하여 철근콘크리트 보나 일방향 슬래브의 단·장기 처짐 해석이 가능하다는 것을 다음의 결론을 통해서 보여 주었다.

- (1) 단기처짐에 대한 실험값들과의 비교에서는 일반적으로 인장강성 파라메터  $\beta$  값 2.5와 3.0 사이에서 실험값에 대한 계산값의 비율들의 평균 값들은 5% 이내에서 근접한 일치를 보여 주고 있다. 특히  $\beta$  값이 3.0일 경우에는 평균값이 1.016이고 변동계수는 제일 낮은 0.11로 나타나고 있다.
- (2) 장기처짐에 대한 실험값들과의 비교에서 전반적인 흐름은 단기처짐의 경향과 비슷하였다. 2.5와 3.0사이의  $\beta$  값에서 계산된 처짐값들은 실험값들과 근사한 일치를 나타내고 있는데, 특히  $\beta$  값이 3.0인 경우에서 비율들의 평균값은 1.011이고 변동계수 또한 제일 낮은 0.1을 보여주고 있다.

## 참고문헌

1. ACI Committee 209, "Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures", ACI Manual of Concrete Practice, Part 1, 1992, pp.209R1-209R47.
2. Bazant, B.P. "Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method", ACI Journal, Proceedings V.69, No.4, April 1972, pp.212-217.
3. Branson, B.E., "Instantaneous and Time-Dependent Deflections of Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams",

HPR Publication 7, Part 1, 1-78, Alabama Highway Department, Bureau of Public Roads, August, 1963.

4. Hollington, H.R., "A Series of Long-Term Tests to Investigate the Deflection of Representative Precast Concrete Floor Component", Technical Report TRA 442, Cement and Concrete Association, London SBN 21004369, 1970.
5. Scanlon, Andrew, and Murray, David W., "Time Dependent Reinforced Concrete Slab Deflections", Proceedings, ASCE, V. 100, ST9, September, 1974, pp. 1911-1924.
6. Trost, H., "Implications of the Superposition principle in Creep and Relaxation Problems for Concrete and Prestressed Concrete", Beton and Stahlbetonbau (West Berlin), V. 62, 1967, pp. 230-238, 261-269.
7. Washa, G.W., and Fluck, P.G., "Effect of Compressive Reinforcement on the Plastic Flow of Reinforced Concrete Beams", ACI Journal, Proceedings V. 49, No. 8, October, 1952, pp. 89-108.
8. Washa, G.W., and Fluck, P.G., "Plastic Flow(Creep) of Reinforced Concrete Continuous Beams", ACI Journal, Proceedings V. 52, No. 5, January, 1956, pp. 549-561.

### 요 약

고강도 재료들의 사용과 함께 강도설계법의 사용은 구조물의 단면들을 줄일수가 있지만 이로인한 사용성의 문제들 즉 과도한 처짐, 균열 및 진동등을 초래하게 할 수 있다. 물론 건축구조물의 디자인에 있어서 구조물의 안전성이 제일 중요한 고려사항일지라도 사용성의 문제들 또한 신중한 검토가 필요하다. 따라서 본 논문에서는 휨하중을 받는 철근콘크리트의 보와 일방향 슬래브의 처짐을 예상하기 위한 해석모델을 개발하여 제안하였다. 이 해석모델은 길이방향에 따라 나누어진 하나의 유한요소를 다시 깊이방향으로 여러개층으로 나누어진 층상 유한요소법을 이용하였고, 균열이 발생한 후 고려할 수 있는 인장강성 영향, 그리고 크리프와 건조수축의 영향들과 같은 비선형 영향을 고려하였다. 제안된 해석모델의 적용가능성을 평가하기 위해 다른 연구자들이 수행한 실험값들과 비교하였다. 비교결과에 의하면, 계산된 단·장기 처짐값들은 인장강성 파라미터  $\beta$  값에 대해 민감하였고, 일반적으로 2.5와 3.0사이의  $\beta$  값에서 실험값들과 근접한 일치를 나타내므로써, 제안된 해석모델은 보나 일방향 슬래브의 단·장기 처짐해석이 가능하다는 것을 보여주었다.

(접수일자 : 1999. 10. 14)