

Nakagami 페이딩 채널하에서 M-ary FSK 시스템의 성능분석

Performance Analysis of M-ary FSK System in Nakagami Fading Channel

김창환 · 한영열

Chang-Hwan Kim · Young-Yearl Han

요 약

본 논문에서는 주파수 비선택적 느린 Nakagami m-분포 페이딩 채널에서 비동기 M진 FSK 시스템의 비트 오류 확률을 수신 신호의 포락선 분포에 대한 확률 분포 함수로부터 구한다. 또한 동기 M진 FSK 시스템의 성능은 동일한 페이딩 채널에서 결합 한계(union bound)를 사용하여 이론적으로 해석된다. 그런 다음 M진 FSK신호에 대한 비트 오류 확률을 DPSK에 대한 오류 확률과 비교하여 시스템의 성능을 비교한다.

Abstract

In this paper the bit error probability of noncoherent M-ary FSK system is derived from the probability density function of the envelope of the received signal over a frequency-nonselective slowly m-distributed Nakagami fading channel. Also, the performance of coherent M-ary FSK system is theoretically analyzed, using union bound over the similar fading channel. Then we compare uncoded performance results for M-ary FSK and DPSK signals in Nakagami fading channel.

I. 서 론

비약적인 통신의 발달은 기존의 유선 통신이 지니고 있는 장소의 제약성을 탈피했으며, 아날로그 시스템보다 성능이 월등한 디지털 이동통신의 위상을 제고시키고 있다.

그런데 이동 통신에 있어서 잡음, 페이딩 그리고 채널 간섭등이 통신 시스템의 성능 저하를 갖게하며 특히 전파의 다중 전송로로 인한 페이딩 현상은 성능에 중대한 영향을 미친다. 페이딩 현상을 일으키는 가장 주된 원인은 다중경로(multipath) 전파에 있

다. 이러한 다중경로 전파에 의해 신호는 건물과 같은 장애물에 의해 반사 혹은 굴절 등과 같은 현상으로 파(wave)의 길이가 일정하지 않게 된다. 따라서 서로 다른 2개 이상의 파(wave)를 수신하면 각 수신파의 위상차에 의해 합성 전계강도 및 진폭, 지연 주파수 특성이 변동하여 수신전계가 변동할 뿐만 아니라 복조파형이 왜곡되고 부호간 간섭이 증대하여 부호 오류를 일으키게 된다.

이러한 페이딩 현상은 여러 확률 분포 함수로 모델화 되는데, 먼저 장구간(long-term) 페이딩은 대수 정규 분포로 모델화되며 반면 단구간(short-term) 페이딩은 레일리 분포로 모델화된다. 장구간

한양대학교 전자통신·전자전기공학부(Dept. of Electronic Communication Eng., Hanyang Univ.)

· 논문 번호 : 990624-054

· 수정완료일자 : 1999년 8월 14일

페이딩은 주로 방대한 지역의 지형에서 발생하고, 단기간 페이딩은 주택, 빌딩 등과 같은 좁은 지역의 지형에 의하여 발생한다.

수신된 신호가 다중 경로를 통한 반사파만 존재할 경우 Rayleigh 확률 분포를 주로 가정하며, 대도시 지역의 이동통신 환경에서 발생하는 페이딩을 대표한다. 그리고 직접파 및 반사파가 함께 존재할 경우에는 Rician 확률 분포를 주로 가정하며 직접파가 없는 경우에는 Rayleigh 페이딩과 동일하다. Nakagami 확률 분포 함수는 반사파만 존재하는 경우, 또는 직접파와 반사파가 동시에 존재하는 경우 모두를 표현하므로, 최근 디지털 이동 통신 시스템의 성능 분석에 일반적인 모델로 많이 사용되고 있다^[1].

Nakagami 페이딩 모델은 페이딩 지수 m 을 변화시킴으로써 다양한 분포를 표현할 수 있고, Rice 분포에 매우 근사한 표현식등 여러가지의 페이딩 모델을 표현할 수 있는 유용한 모델이다^[2].

일반적으로 페이딩이 존재하는 시스템에서 오류 확률을 구할 때에는 먼저 가우시안 잡음만이 존재할 때의 오류 확률을 구한 후, 얻어진 오류 확률식을 해당 페이딩의 확률 분포 함수로 평균을 취하여 페이딩에 대한 오류 확률을 구한다^[3].

본 논문에서는 협대역 가우시안(Gaussian)잡음과 Nakagami 페이딩이 존재하는 채널 환경에서 비동기 M진 FSK 신호에 대한 비트 오류 확률을 수신 신호의 포락선 분포를 이용하여 유도하고 직교 동기(orthogonal coherent) M진 FSK에 대한 비트 오류 확률을 결합한계(union bound)기법을 이용하여 구한 다음 DPSK에 대한 비트 오류 확률식과 비교하여 시스템의 성능을 비교한다^{[4]-[6]}.

II. Nakagami 페이딩

일반적인 동기 검파기 블록도는 그림 1과 같다. 여기서

$$n(t) = n_c \cos 2\pi f_c t - n_s \sin 2\pi f_c t \quad (1)$$

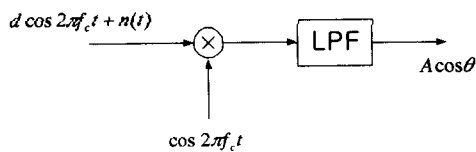


그림 1. 동기검파기 블록도

Fig. 1. Coherent detector.

이고

$$A = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (2)$$

$$x = d + n_c = A \cos \theta, y = n_s = A \sin \theta \quad (3)$$

이며, n_c 와 n_s 는 평균이 0이고 분산이 σ_n^2 인 서로 독립인 가우시안 잡음이다.

다중 경로 페이딩 채널을 통하여 수신된 신호를 통계적으로 표현하는 모델로서 자주 사용되는 모델이 Nakagami 분포이다. 신호의 진폭 d 가 Nakagami 페이딩의 영향을 받을 때, 이에 대한 확률 분포 함수는 다음과 같다.

$$f(d) = \frac{2m^m d^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} e^{-\frac{md^2}{\Omega}}, d \geq 0, m \geq \frac{1}{2} \quad (4)$$

여기서 $\Gamma(\cdot)$ 는 감마(Gamma)함수이고 $\Omega = E[d^2]$ 으로 정의된다. 그리고 m 은 페이딩의 심한 정도를 나타내는 페이딩 지수이며 다음 식과 같이 정의된다.

$$m = \frac{\Omega^2}{E[(d^2 - \Omega)^2]}, m \geq \frac{1}{2} \quad (5)$$

Nakagami m -분포의 페이딩 채널에서 $m=0.5$ 이면 이 전송 채널은 단축 가우시안 (half-Gaussian), $m=1$ 이면 레일리 페이딩 채널이 되며 $m=\infty$ 일 때는 비페이딩 채널이 된다. 그리고 m 이 1보다 작다면 이 전송 채널은 레일리 페이딩보다 심각한 페이딩 채널을 나타내며 m 이 1보다 커짐에 따라 페이딩 현상이 줄어든다.

그림 2는 $\Omega=1$ 로 고정하고 페이딩 지수 m 의

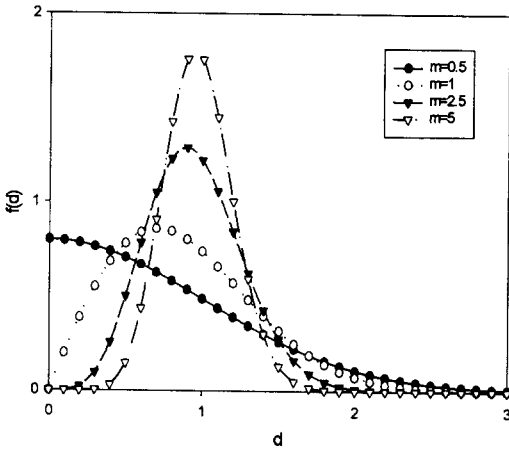


그림 2. Nakagami 확률 밀도 함수
Fig. 2. Nakagami probability density function.

여러가지 값에 대하여 Nakagami 확률 밀도 함수를 그린 것이다. m 이 1보다 작을 때에는 Rayleigh 페이딩보다 더 넓게 퍼져있고, m 이 1보다 큰 값에서 점점 더 커질수록 더 첨예하게 모여있음을 확인할 수 있다.

III. Nakagami 페이딩 하에서 DPSK의 오류확률

그림 3은 DPSK의 최적 수신기이다^[7]. 여기서 결정 변수는 다음과 같다.

$$l = x_k x_{k-1} + y_k y_{k-1} \quad (6)$$

만약 $l > 0$ 이면 수신기는 신호 시퀀스 $s_1(t)$ 를 선택하고, $l < 0$ 이면 수신기는 신호 시퀀스 $s_2(t)$ 를 선택한다.

$$s_1(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_c t + \theta), & -T \leq t \leq 0 \\ A \cos(\omega_c t + \theta), & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (7)$$

$$s_2(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_c t + \theta), & -T \leq t \leq 0 \\ -A \cos(\omega_c t + \theta), & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (8)$$

여기서 $\theta = 0$ 이라고 가정하기로 한다^[7].

$s_1(t)$ 와 $s_2(t)$ 가 발생할 확률이 동일하다고 가정하면 오류 확률은 다음식으로부터 계산할 수 있다.

$$P(E) = P_r(x_k x_{k-1} + y_k y_{k-1} < 0 \mid s_1 \text{ sent}, \theta = 0) \quad (9)$$

$\omega_c T$ 가 2π 의 정수배라고 가정하면 시각 $t=0$ 에서 적분기의 출력은 다음과 같다.

$$x_0 = \frac{AT}{2} + n_1 \text{ and } y_0 = n_3 \quad (10)$$

여기서 $n_1 = \int_{-T}^0 n(t) \cos(\omega_c t) dt$ 이고, $n_3 = \int_{-T}^0 n(t) \sin(\omega_c t) dt$ 이다.

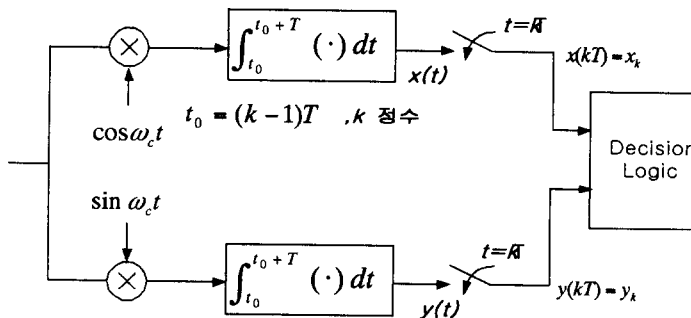


그림 3. DPSK 최적 수신기
Fig. 3. DPSK optimum receiver.

마찬가지로 시각 $t = T$ 에서 적분기의 출력은 아래식과 같이 표현된다.

$$x_1 = \frac{AT}{2} + n_2 \text{ and } y_1 = n_4 \quad (11)$$

여기서 $n_2 = \int_0^T n(t) \cos(w_c t) dt$ 이고 $n_4 = \int_0^T n(t) \sin(w_c t) dt$ 이다.

위의 출력들에서 n_1, n_2, n_3, n_4 는 평균이 0이고 분산이 $\frac{N_0 T}{4}$ 이며 서로 독립인 가우시안 랜덤 변수들이다.

이제 새로운 랜덤 변수 w_i 를 다음과 같이 정의한다.

$$w_1 = \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} \quad (12)$$

$$w_2 = \frac{n_1}{2} - \frac{n_2}{2} \quad (13)$$

$$w_3 = \frac{n_3}{2} + \frac{n_4}{2} \quad (14)$$

$$w_4 = \frac{n_3}{2} - \frac{n_4}{2} \quad (15)$$

위의 정의로부터 w_i 는 서로 독립이고 평균이 0이며 분산이 $\sigma_n^2 = \frac{N_0 T}{8}$ 인 가우시안 랜덤 변수이다. 이제 비트 오류 확률 식은 다음과 같이 표현된다^[6].

$$\begin{aligned} P_{b, \text{DPSK}}(E) &= P_r \left[\left(\frac{AT}{2} + w_1 \right)^2 + w_3^2 < w_2^2 + w_4^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+2\gamma} \right)^m \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+i)}{\Gamma(m) i! \left(2 + \frac{m}{\gamma} \right)^i} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+2\gamma} \right)^m \\ &\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(m+i-1)(m+i-2) \cdots m \Gamma(m)}{\Gamma(m) i!} \\ &\cdot \left(2 + \frac{m}{\gamma} \right)^{-i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+2\gamma} \right)^m \\ &\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (-m)(-m-1) \cdots (-m-i+1)}{i!} \\ &\cdot \left(2 + \frac{m}{\gamma} \right)^{-i} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+2\gamma} \right)^m \\ &\cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-m)(-m-1) \cdots (-m-i+1)}{i!} \\ &\cdot \left(-\frac{1}{2 + \frac{m}{\gamma}} \right)^i \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+2\gamma} \right)^m \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-m}{i} \left(-\frac{1}{2 + \frac{m}{\gamma}} \right)^i \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+2\gamma} \right)^m \left(1 - \frac{1}{2 + \frac{m}{\gamma}} \right)^{-m} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+2\gamma} \right)^m \left(\frac{\gamma+m}{2\gamma+m} \right)^{-m} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+\gamma} \right)^m \quad (16) \end{aligned}$$

여기서 $\gamma = \frac{T\Omega}{2N_0}$ 이며 비트당 SNR이며 $P_{b, \text{DPSK}}(E)$ 는 Nakagami 페이딩의 영향을 받는 경우 DP-SK의 비트 오류 확률이다.

IV. Nakagami 페이딩하에서 비동기 MFSK의 오류 확률

M진 FSK는 M진 심벌에 의해서 M개의 다른 주파수를 할당하는 방식이다. 수신은 M개의 필터에 의해 되어진다. M개 필터의 출력중 M-1개는 전력 σ_n^2 의 가우시안 잡음만 포함된다고 가정한다.

출력의 포락선이 임계값(threshold value) r 을 넘길 확률은

$$f_M(r) = \int_r^{\infty} \frac{x}{\sigma_n^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}} dx = e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} \quad (17)$$

이다.

모든 출력은 독립적이므로 어느 출력 포락선도 r 을 넘지 않는 확률은

$$[1 - f_N(r)]^{M-1} \quad (18)$$

이다. 그러므로 하나 또는 그 이상의 출력이 임계값 r 을 넘을 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} g(r) &= 1 - [1 - f_N(r)]^{M-1} \\ &= 1 - [1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}}]^{M-1} \\ &= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} e^{-\frac{nr^2}{2\sigma_n^2}} \end{aligned} \quad (19)$$

Nakagami 페이딩에 의한 수신신호의 포락선 분포는

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{r}{\sigma_n^2} \left[\frac{m}{k\Omega} \right]^m e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} {}_1F_1\left(m; 1; \frac{r^2}{4k\sigma_n^4}\right), \\ &r \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

으로 주어진다[6].

여기서,

$$K = \frac{m}{\Omega} + \frac{1}{2\sigma_n^2} \quad (21)$$

이다.

그리고 ${}_1F_1(\alpha; \beta; x)$ 는 초기하(hypergeometric) 함수로서 다음과 같이 정의된다[8].

$${}_1F_1(\alpha; \beta; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+n)x^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+n)n!} \quad (22)$$

그러므로 포락선의 확률 밀도 함수를 이용한 비동기 FSK의 심벌 오류 확률은 다음과 같다.

$$P_s = \int_0^{\infty} f(r)g(r)dr$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} \int_0^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} \\ &\cdot \left[\frac{m}{K\Omega} \right]^m e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} {}_1F_1\left(m, 1; \frac{r^2}{4K\sigma_n^4}\right) \\ &\cdot e^{-\frac{nr^2}{2\sigma_n^2}} dr \\ &= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} \left(\frac{m}{K\Omega} \right)^m \frac{1}{\sigma_n^2} \\ &\cdot \int_0^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} {}_1F_1\left(m, 1; \frac{r^2}{4K\sigma_n^4}\right) \\ &\cdot e^{-\frac{nr^2}{2\sigma_n^2}} dr \\ &= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} \left(\frac{m}{K\Omega} \right)^m \frac{1}{\sigma_n^2} \\ &\cdot \int_0^{\infty} re^{-\frac{(1+n)r^2}{2\sigma_n^2}} {}_1F_1\left(m, 1; \frac{r^2}{4K\sigma_n^4}\right) dr \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)에서 적분항을 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h(r) &= \int_0^{\infty} re^{-\frac{(1+n)r^2}{2\sigma_n^2}} {}_1F_1\left(m, 1; \frac{r^2}{4K\sigma_n^4}\right) dr \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{(1+n)a}{2\sigma_n^2}} {}_1F_1\left(m, 1; \frac{a}{4K\sigma_n^4}\right) da \\ &= \frac{1}{2} \frac{2\sigma_n^2}{1+n} {}_2F_1\left(1, m; 1; \frac{2\sigma_n^2}{1+n} \frac{1}{4K\sigma_n^4}\right) \\ &= \frac{\sigma_n^2}{1+n} {}_2F_1\left(1, m; 1; \frac{1}{2K(n+1)} \frac{1}{\sigma_n^2}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서

$$r^2 = a, \quad 2rdr = da \quad (25)$$

이며 적분 테이블에서

$$\int_0^{\infty} e^{-st} {}_pF_q(a_1 \cdots a_p; b_1 \cdots b_q; t) dt$$

$$= \frac{1}{s} {}_{p+1}F_q \left(1, a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; \frac{1}{s} \right),$$

$$p \leq q \quad (26)$$

의 관계식을 이용한다^[8].

그러므로,

$$P_s = \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} \left(\frac{m}{K\Omega} \right)^m$$

$$\cdot \frac{1}{\sigma_n^2} \frac{\sigma_n^2}{1+n} {}_2F_1 \left(1, m; 1; \frac{1}{2K(n+1)} \frac{1}{\sigma_n^2} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} \left(\frac{m}{K\Omega} \right)^m$$

$$\cdot \frac{1}{1+n} {}_2F_1 \left(1, m; 1; \frac{1}{2K(n+1)} \frac{1}{\sigma_n^2} \right) \quad (27)$$

이다.

여기서,

$$K\Omega = \Omega \left(\frac{m}{\Omega} + \frac{1}{2\sigma_n^2} \right) = m + \gamma \quad (28)$$

$$\gamma = \frac{\Omega}{2\sigma_n^2} \quad (29)$$

그리고

$$K\sigma_n^2 = \sigma_n^2 \left(\frac{m}{\Omega} + \frac{1}{2\sigma_n^2} \right)$$

$$= m \frac{\sigma_n^2}{\Omega} + \frac{1}{2} \quad (30)$$

$$= \frac{m}{2\gamma} + \frac{1}{2}$$

이다.

그러므로,

$$P_s = \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} \left(\frac{m}{\gamma+m} \right)^m$$

$$\cdot \frac{1}{1+n} {}_2F_1 \left(1, m; 1; \frac{1}{2(n+1)} \frac{2}{1+m/\gamma} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} \left(\frac{m}{\gamma+m} \right)^m$$

$$\cdot \frac{1}{1+n} {}_2F_1 \left(1, m; 1; \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{1+m/\gamma} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} \left(\frac{m}{\gamma+m} \right)^m$$

$$\cdot \frac{1}{1+n} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n+1} \frac{1}{1+m/\gamma} \right)^m}$$

$$= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n} \frac{1}{1+n}$$

$$\cdot \left[\frac{m}{\gamma+m} \frac{(n+1)(\gamma+m)}{(n+1)(\gamma+m)-\gamma} \right]^m$$

$$= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n}$$

$$\cdot \frac{1}{1+n} \left[\frac{m(n+1)}{n\gamma+m(n+1)} \right]^m \quad (31)$$

으로 된다.

비트당 오류 확률을 $P_b(E)$ 라고 하면,

$$P_b(E) = \frac{M}{2(M-1)} P_s \quad (32)$$

$$\gamma_b = \frac{1}{\log_2 M} \gamma \quad (33)$$

가 된다^[5]. 여기서 $\gamma = \frac{\Omega}{2\sigma_n^2}$ 이며 심벌당 SNR을 말한다.

그러므로, 위 식 (31)을 비트 오류 확률식으로 변환하면 다음과 같으며 그 결과를 그림 4에 보였다.

$$P_{b,MFSK}(E)$$

$$= \frac{M}{2(M-1)} \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n-1} \binom{M-1}{n}$$

$$\cdot \frac{1}{1+n} \left[\frac{m(n+1)}{n\gamma_b \log_2 M + m(n+1)} \right]^m \quad (34)$$

여기서 $P_{b,MFSK}(E)$ 는 직교 비동기 M진 FSK의 비트 오류 확률이다.

위 식 (34)은 수신신호의 포락선 분포를 이용하여 유도한 식이지만 Nakagami 페이딩 채널에서 Crepeau에 의해 유도된 비동기 M-ary FSK일 때의

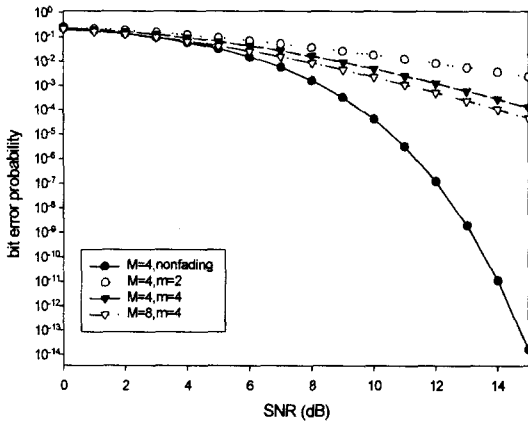


그림 4. M, m 의 변화에 따른 비동기 MFSK의 비트 오류 확률

Fig. 4. Bit error probability of noncoherent MFSK according to the change of M, m .

비트 오류 확률식과 일치함을 확인할 수 있다^[5].

V. Nakagami 페이딩채널하에서 동기 M진 FSK의 오류확률

5-1 결합한계(union bound)기법

심벌 s_i 가 전송되었을 경우, 관측 벡터 z 가 신호 벡터 s_i 보다 다른 신호 벡터 s_k 에 더 가까운 사건을 $A_{ik}, i, k=1, 2, \dots, M$ 으로 표시하기로 하자. 심벌 s_i 가 전송되었을 경우의 조건부 심벌 오차 확률 $P(z \notin B_i | s_i)$ 는 사건 $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{i(i-1)}, A_{i(i+1)}, \dots, A_{iM}$ 들의 합 사건의 확률과 같다. 이때 다음과 같은 확률의 공리를 이용하자.

$$P(A+B) \leq P(A) + P(B) \tag{35}$$

위 식 (35)가 의미하는 바는 사건들의 유한 합에 대한 확률이 각각의 사건들의 확률의 합보다 같거나 작다는 것이며, 이러한 성질을 이용하면, 다음과 같은 식이 성립한다.

$$P(z \notin B_i | s_i) \leq \sum_{k=1, k \neq i}^M P(A_{ik}), \tag{36}$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

$$P(z \notin B_i | s_i) \leq \sum_{k=1, k \neq i}^M P_2(s_i, s_k), \tag{37}$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

이때 $P_2(s_i, s_k)$ 는 다음으로 정의된다.

$$P_2(s_i, s_k) = P(s_i \text{가 전송되었을 경우, } z \text{가 } s_i \text{보다 } s_k \text{에 가깝다.}) \tag{38}$$

이때, 벡터 s_i 와 s_k 로 표현되는 발생 확률이 동일한 두 개의 메시지를 사용하는 간단한 디지털 통신 시스템을 고려해 보자. 협대역 가우시안 잡음은 모든 직교축을 따라 이상적으로 분포되어 있으므로, 일단, 직교축들 중 점 s_i 와 s_k 사이를 통과하는 하나의 축을 고려하기로 한다. 이 경우에 대한 결정 경계선은 점 s_i 와 s_k 를 잇는 선을 수직 이등분하는 선이다. 따라서 심벌 s_i 가 전송되었다고 할 때, 관측 벡터 z 가 이등분선의 s_k 쪽에 위치하게 되면 오차가 발생한다. 이 사건의 확률은 다음과 같이 주어진다.

$$P_2(s_i, s_k) = P(s_i \text{가 전송되었을 경우, } z \text{가 } s_i \text{보다 } s_k \text{에 가까울 사건}) \tag{39}$$

$$= \int_{d_{ik}/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{u^2}{N_0}\right) du$$

여기서 d_{ik} 는 s_i 와 s_k 간의 유클리디안 거리이다. 즉, 다음으로 정의된다.

$$d_{ik} = \|s_i - s_k\| \tag{40}$$

상보 오차함수 (complementary error function)의 정의로부터

$$\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty \exp(-z^2) dz \quad (41)$$

이고, 여기서, z 를 $\frac{u}{\sqrt{N_0}}$ 로 놓으면, 식 (39)는

$$P_2(s_i, s_k) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{ik}}{2\sqrt{N_0}}\right) \quad (42)$$

이다.

상보 오차 함수는 함수의 독립 변수에 대해 단조 감소 함수이므로, 신호점 s_i 와 s_k 사이의 거리가 증가할수록 오차 확률은 감소함을 알 수 있다.

식 (42)를 식 (37)에 대입하여 다음의 관계식을 얻는다.

$$P(z \notin B_i | s_i) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1, k \neq i}^M \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{ik}}{2\sqrt{N_0}}\right), \quad i=1, 2, \dots, M \quad (43)$$

5-2 비트 오류 확률

송신단에서 심벌 $s_i(t)$ 가 Nakagami 페이딩을 받을 경우 오류 확률은

$$P(E) = \int_0^\infty f_d(d_{ik}) \cdot \left[\int_{\frac{d_{ik}}{2}}^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{u^2}{N_0}\right) du \right] dd_{ik} \quad (44)$$

이다^[7].

여기서 괄호안의 적분을 계산하면 식 (42)이므로 이 값을 식 (44)에 대입하면 다음 식처럼 표현된다.

$$P(E) = \int_0^\infty \frac{2m^m}{\Gamma(m)} \frac{d_{ik}^{2m-1}}{\Omega^m} e^{-\frac{md_{ik}^2}{\Omega}} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{ik}}{2\sqrt{N_0}}\right) dd_{ik} \\ = \frac{1}{2} \frac{2m^m}{\Gamma(m)} \frac{1}{\Omega^m} \int_0^\infty d_{ik}^{2m-1} e^{-\frac{md_{ik}^2}{\Omega}}$$

$$\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{ik}}{2\sqrt{N_0}}\right) dd_{ik} \quad (45)$$

적분테이블^[8]에서

$$\int_0^\infty [1 - \operatorname{erf}(\beta x)] x^{\nu-1} e^{-\mu^2 x^2} dx \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\beta^\nu} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}; \frac{\nu}{2}+1; \frac{\mu^2}{\beta^2}\right) \quad (46)$$

의 관계식을 이용하면 식 (45)는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$P(E) = \frac{1}{2} \frac{2m^m}{\Gamma(m)} \frac{1}{\Omega^m} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi 2m}} \cdot (4N_0)^m {}_2F_1\left(m, m+\frac{1}{2}; m+1; -\frac{4N_0 m}{\Omega}\right) \quad (47)$$

여기서 ${}_2F_1(a, \beta, \alpha, z)$ 는 다음 식으로 표현된다.

$${}_2F_1(a, \beta, \alpha, z) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(a+k)} \frac{z^k}{k!} \quad (48)$$

심벌당 평균 SN비를 $\gamma = \frac{\Omega}{2N_0}$ 라고 하면,

$$P(E) = \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \frac{1}{2\sqrt{\pi m}} \left(\frac{2m}{\gamma}\right)^m \cdot {}_2F_1\left(m, m+\frac{1}{2}; m+1; -\frac{2m}{\gamma}\right) \quad (49)$$

가 된다. 발생 확률이 동일한 M 개의 전송 메시지에 대해 결합 한계(union bound)를 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(E) \leq \frac{M-1}{2} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \frac{1}{2\sqrt{\pi m}}$$

$$\cdot \left(\frac{2m}{\gamma}\right)^m {}_2F_1\left(m, m + \frac{1}{2}; m + 1; -\frac{2m}{\gamma}\right) \quad (50)$$

비트 오류 확률은 다음과 같이 표현할 수 있다^[5].

$$P_{b, MFSK}(E) \leq \frac{M}{4} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \frac{1}{2\sqrt{\pi m}} \left(\frac{2m}{\gamma_b \log_2 M}\right)^m \cdot {}_2F_1\left(m, m + \frac{1}{2}; m + 1; -\frac{2m}{\gamma_b \log_2 M}\right) \leq -\frac{M}{4} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \frac{1}{2\sqrt{\pi m}} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i}{i + \frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(m-i)} \cdot \left[\left(\frac{2m}{\gamma_b \log_2 M} + 1\right)^{-i - \frac{1}{2}} - 1\right] \quad (51)$$

여기서 $P_{b, MFSK}(E)$ 는 직교 동기 M진 FSK의 비트 오류 확률이며 그림 5에서 그 결과를 볼 수 있다.

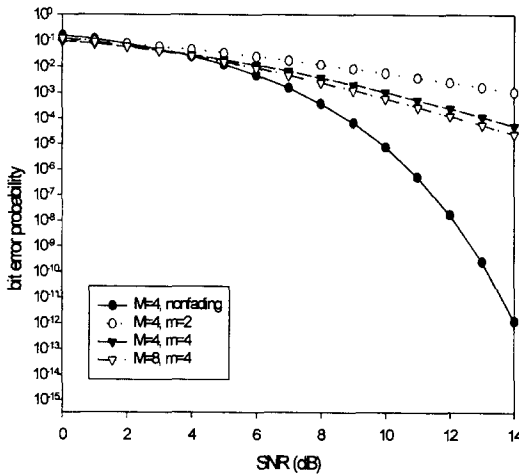


그림 5. M, m 의 변화에 따른 동기 MFSK의 비트 오류 확률

Fig. 5. Bit error probability of coherent MFSK according to the change of M, m .

VI. 수치해석 및 고찰

이 논문에서는 수신신호의 포락선에 대한 확률 분포 함수를 이용하여 Nakagami 페이딩 환경에서 구한 M진 비동기 FSK와 DPSK의 오류확률이 이미 유도된 식과 일치함을 보였다^[5]. 그리고 동일한 페이딩이 존재하는 환경에서 동기 M진 FSK의 오류 확률을 결합한계(union bound)를 사용하여 구하였다. 그림 4, 5에서 SNR값이 일정한 경우에는 m 의 값이 커질수록 성능이 개선되는 것을 확인할 수 있다.

심벌, $M=2$ 그리고 페이딩 지수, $m=2$ 에서 DP-SK가 비동기 M진 FSK보다는 성능이 좋지만 동기 M진 FSK에 비해 성능이 약화되는 것을 그림 6으로부터 알 수 있다. 그리고 그림 7에서 M 값이 커질수록 동기 M진 FSK의 성능이 점차 나빠지고 있으며 비동기 M진 FSK는 성능이 개선되고 있음을 확인할 수 있었다.

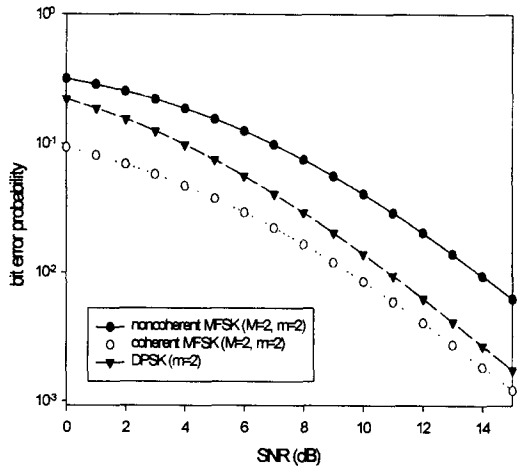


그림 6. $M=2, m=2$ 인 경우 M진 FSK와 DPSK의 비트 오류확률

Fig. 6. Bit error probability of M-ary FSK and DP-SK according to $M=2, m=2$.

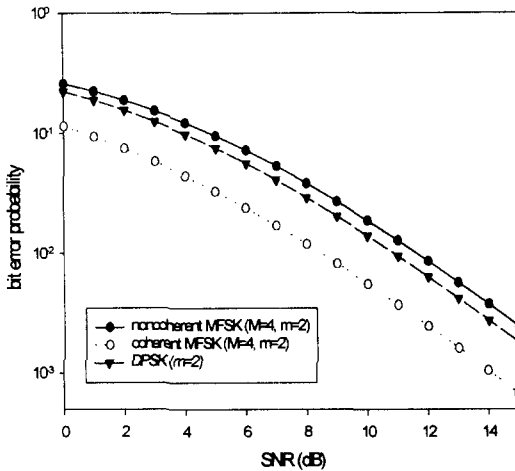


그림 7. $M=4, m=2$ 인 경우 M진 FSK와 DPSK의 비트 오류확률

Fig. 7. Bit error probability of M-ary FSK and DPSK according to $M=4, m=2$.

Ⅶ. 결 론

디지털 이동 통신이 더욱 발달하고 보편함에 따라 더 다양한 통신 환경이 제공되고 있다. 이동 통신의 여러 가지 문제점중에서도 특히 페이딩 현상이 아주 중요한 문제가 되고 있는데, 이 논문에서는 도심 무선 다중 경로 채널에 가장 적합한 분포를 가지고 있는 것으로 알려진 Nakagami 페이딩 채널에서 M진 FSK의 오류 확률을 구하였다. 특히 비동기 M진 FSK에서 수신 신호의 포락선 분포를 이용하여 유도한 비트오류확률이 이미 나와있는 비트 오류확률식과 일치함을 확인했다^[5]. 그리고 M값이 커질수록 비동기 M진 FSK의 성능이 개선되나 동기 M진 FSK의 성능은 그 반대인 것을 알 수 있었다. 앞으

로 M진 FSK와 PSK시스템에서 다양한 페이딩 현상을 충분히 반영하는 관련 분야에 대한 더 넓은 연구가 반드시 필요할 줄로 생각한다.

참 고 문 헌

- [1] H. Suzuki, "A Statistical Model for Urban Multi-path Channels with Random Delay," *IEEE Trans., Comm.*, vol. COM-25, pp. 673-680, July, 1977.
- [2] M. Nakagami, "The m-distribution-A general formula of intensity distribution of rapid fading," in *Statistical methods in radio wave propagation*, W. G. Hoffman, Ed., Oxford, England: Pergamon Press, pp. 3-36, 1960.
- [3] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill Inc., 1995.
- [4] 강창연, 디지털 통신 시스템, 복두출판사, 1998.
- [5] P. J. Crepeau, "Uncoded and Coded Performance of MFSK and DPSK in Nakagami Fading Channels," *IEEE Trans. Comm.* vol. COM-40, no. 3, pp. 487-793, Mar., 1992.
- [6] 임채현, "Nakagami 페이딩 채널에서 수신 신호의 포락선 분포," 한양대학교 석사논문, 1998.
- [7] R. E. Ziemer and W. H. Tranter, *Principles of Communications, Systems, Modulations, and Noise*, Houghton Mifflin, 1995.
- [8] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integral, Series and Products*, Academic Press, Inc. 1965.

김 창 환



1981년: 건국대학교 전자공학과(공학사)
1983년: 한양대학교 전자통신공학과(공학석사)
1986년~1989년: 현대전자 이동통신 단말기 개발
1991년~1997년: 한국정보통신공사

협회

1996년: 전기통신기술사 취득
1997년~현재: 한양대학교 전자통신공학과 통신시스템 전공(박사과정)

한 영 열



1938년 6월 10일 생
1960년 2월: 서울대학교 전자공학과(공학사)
1976년 5월: Univ. of Missouri 통신공학(공학석사)
1979년 5월: Univ. of Missouri 통신공학(공학박사)

1985년~1987년: 전자통신에 관한 국제기구 국내 연구단 (운영위원)

1998년~1987년: 미국 콜로라도 주립대(교환교수)
1991년~1994년: 체신부 전파 육성 협의회(운영위원)
1981년~1995년: 한국통신학회(이사, 상임이사, 부회장)
1995년~1996년: 미국 오레곤 주립대학(교환교수)
1997년~현재: 한국통신학회(감사)
1993년~현재: 특허청(객원심사위원)
1980년~현재: 한양대학교 전기전자공학부 교수
[주 관심분야] 확률/통계통신, 디지털 통신이론, 이동통신 통신 시스템