

# Element-Free Galerkin법을 이용한 혼합모드상태 균열의 균열진전해석

## Crack Propagation Analysis of Mixed Mode Crack by Element-Free Galerkin Method

이 상 호\*  
Lee, Sang-Ho

윤 영 철\*\*  
Yoon, Young-Cheol

### 요 지

본 연구에서는 요소를 사용하지 않고 절점들만을 이용하여 해석이 가능한 새로운 수치해석기법인 EFG (Element-Free Galerkin)법을 사용하여 임의의 균열의 성장과정을 해석할 수 있는 효율적인 알고리즘을 개발하고, 이를 바탕으로 균열의 성장방향과 경로를 정확히 추정하여 일련의 균열진전해석을 수행할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 균열해석에 있어서는 균열선단의 특이성과 균열면의 불연속성을 수치적으로 반영할 수 있는 기법을 도입하여 균열을 모형화하였으며, 선형탄성파괴역학이론에 근거하여 균열해석과정을 정식화하였다. 또한, EFG 형상함수가 kronecker delta 조건을 만족시키지 못함으로써 발생하는 필수경계조건의 처리문제를 penalty법을 이용하여 해결하였다. 개발된 균열진전해석 알고리즘을 정지상태와 성장하는 상태에 있는 모드 I, 모드 II 및 혼합모드상태의 대표적인 균열문제들에 적용하여 응력확대계수와 균열성장방향 및 균열의 성장경로를 추정하고 이를 이론적·실험적 결과들과 비교함으로써 그 정확성과 효율성을 검증하였다.

**핵심 용어** : EFG법, 균열진전해석, 선형탄성파괴역학, 필수경계조건, 혼합모드상태, 균열성장경로

### Abstract

In this study, a new crack propagation analysis algorithm by Element-Free Galerkin(EFG) method, in which only nodal data is required to analyze the problem, is presented, and a program which can perform consecutive crack propagation analysis is developed. In EFG crack analysis, the effects of the discontinuity of crack and the singularity of crack tip are considered by special numerical techniques, and the analysis is done based on linear elastic fracture mechanics theory. Penalty method is used to enforce the satisfaction of essential boundary condition in EFG formulation, in which shape function does not satisfy kronecker delta condition. The prediction of the direction and the path of growing crack is figured out by EFG stress analysis. The numerical results of benchmarking mode I, mode II and mixed mode crack propagation problems show that the proposed method is very efficient in modeling crack propagation problem and can guarantee the accuracy of solution.

**Keywords** : EFG method, crack propagation analysis, linear elastic fracture mechanics, essential boundary condition, mixed mode crack propagation, crack growing path

\* 정회원 · 연세대학교 토목공학과, 조교수  
\*\* 정회원 · 연세대학교 토목공학과, 박사과정

· 이 논문에 대한 토론을 1999년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2000년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

구조물에 발생한 균열은 공용기간동안 구조물의 안전성을 위협하고 사용성을 감소시키는 주요한 인자이다. 따라서 균열의 거동을 파악하고 성장과정을 예측하는 것은 구조물의 안전성과 사용성의 확보 측면에서 매우 중요하다. 그 동안 파괴역학분야에서는 취성적인 재료의 파괴거동에 대해 선형탄성파괴역학이론을 바탕으로 이론적 또는 수치해석적 방법을 사용하여 균열의 거동을 예측하고 이에 따른 구조물의 영향을 파악하기 위한 많은 연구들이 수행되었다. 이 연구결과들을 이용하면 정지상태의 균열이나 단일한 모드를 갖는 균열진전문제에 대해서는 손쉽게 해를 구할 수 있다. 그러나 한편으로는 유한요소법이나 경계요소법과 같은 기존의 수치해석적 방법들은 다양한 형상으로 존재하며 하중상태나 경계조건에 따라 임의의 경로로 성장하는 균열의 거동을 해석하는 데에 있어 적지 않은 단점들을 지니고 있다. 그 중 대표적인 문제점의 하나가 균열이 성장함에 따라 변화하는 기하학적 형상을 요소망을 재구성하여 묘사해야 하는 문제이다. 이 문제는 실질적으로 균열전파해석 자체를 불가능하게 만드는 요인이 되기도 한다.

이러한 문제점을 극복하기 위해 이동유한요소법을 이용하여 균열이 성장함에 따라 요소망을 자동적으로 재구성하는 해석방법<sup>1)</sup>이나 경계요소법을 이용하여 균열의 성장현상을 경계요소를 추가함으로써 모형화할 수 있는 방법<sup>2)</sup> 등이 제안되기도 하였다. 그러나 근본적으로 요소의 개념을 사용하는 해석방법은 요소사용으로 인해 야기되는 단점을 완전히 극복하기에는 한계가 있으며 아직까지도 균열전파해석문제에 실질적으로 적용하기에는 많은 어려움이 있다. 최근에 연구되고 있는 절점을 기반으로 해석을 수행하는 EFG(Element-Free Galerkin)법을 이용하면 유한요소법처럼 요소망을 재구성할 필요가 없으며, 경계요소법과 달리 해석대상 내부의 응력변화에 초점을 맞추어 해석할 수 있기 때문에 균열진전문제를 효과적으로 다룰 수 있다.

1990년대 중반부터 활발히 연구가 진행되고 있는 요소의 개념을 사용하지 않는 새로운 해석방법인 무요소법(Meshless Method)은 Lucy<sup>3)</sup>가 천체물리학에의 적용을 위해 입자완화유체동역학법(SPH;

Smooth Particle Hydrodynamics)을 개발한데서부터 그 기원을 찾을 수 있다. 그 후 Libersky와 Petsch<sup>4)</sup>가 고체역학문제에 이 방법을 적용한 이후 이 분야에 대한 연구가 계속적으로 수행되어 Liu 등<sup>5)</sup>이 핵함수를 사용하여 근사변위함수를 구하는 정식화된 무요소법의 하나인 RKPM(Reproducing Kernel Particle Method)을 제안하기에 이르렀다.

다른 한편으로 Nayroles 등<sup>6)</sup>은 이동최소제곱근사법을 이용하여 Galerkin방법에 따라 근사변위함수를 도출할 수 있는 DEM(Diffuse Element Method)을 제안하였으며, Belytschko 등<sup>7)</sup>은 이를 한층 발전시켜 무요소법의 틀을 갖춘 EFG(Element-Free Galerkin)법을 개발하고 이를 고체역학문제와 균열문제에 적용하였다. Belytschko 등<sup>8)</sup>은 EFG법에 파괴역학이론을 접목하여 균열성장문제를 정적으로 해석할 수 있는 기법을 제안하였고, 더 나아가 시간영역에서 동적균열전파문제를 해석할 수 있는 기법을 제시하였다<sup>9)</sup>. 또한 Krongauz와 Belytschko<sup>10)</sup>는 유한요소법의 형상함수와 EFG형상함수를 조합하는 방법으로 EFG형상함수의 단점인 필수경계조건문제를 효과적으로 처리할 수 있는 방법을 제안하였으며, Organ 등<sup>11)</sup>은 균열선단 주변에서 해의 정도를 향상시키기 위해 EFG형상함수가 균열선단 주변에서 부드러운 연속성을 유지할 수 있는 기법을 연구하였고, Fleming 등<sup>12)</sup>은 EFG형상함수를 확장하여 균열선단주변의 응력의 특이성을 반영할 수 있는 방법을 제안하였다.

최근 들어 정식화과정에서부터 kronecker delta 조건을 만족하는 형상함수를 사용하여 EFG법을 포함한 무요소법의 단점을 보완할 수 있는 방법인 LBIE(Local Boundary Integral Equation)법이 제안되기도 하였다<sup>13)</sup>. 최근에 개발된 다양한 무요소법의 기본개요와 특징은 Belytschko 등<sup>14)</sup>과 전석기와 이상호<sup>15)</sup>에 잘 나타나 있으며, EFG법을 이용한 균열해석의 state of the art는 이상호와 김효진<sup>16)</sup>에 잘 나타나 있다.

본 연구에서는 무요소법중의 하나인 EFG법을 이용하여 혼합모드상태에서 성장하는 균열을 자동으로 모형화하여 해석할 수 있는 알고리즘을 제안하고 그 정확성을 검증하고자 한다. 무요소법의 균열문제에의 적용에 대한 이해를 도모하기 위하여 본 논문에서는 먼저 EFG법을 정식화하여 근사변위

함수를 구성하는 과정과 EFG해석에서 필요한 가중 함수와 영향영역 그리고 경계조건의 처리에 대해 간략히 서술하였다. 다음으로 균열해석을 위해 필요한 파괴역학 계수들을 결정하는 방법과 균열을 수치적으로 모형화하는 기법을 제시하였으며, 대표적인 균열문제에 적용하여 개발된 알고리즘의 정확성과 효율성을 검증하였다.

## 2. 균열해석을 위한 무요소법의 정식화

### 2.1 EFG법에 의한 근사변위함수의 도출

EFG법에서는 이동최소제곱근사법<sup>6)</sup>을 사용하여 근사변위함수를 가정하고 변위의 오차에 대한 잔여치(residual)를 계산한 후, 이를 최소화시키는 과정을 통하여 미지변위값을 결정한다. 초기에 가정하는 미지의 근사변위함수는 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) \equiv \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x) \quad (1)$$

여기서,  $\mathbf{p}(x)$ 는  $m$ 개의 항을 갖는 다항식 벡터이며 이에 대응하는 계수값  $\mathbf{a}(x)$ 는 좌표계  $x$ 의 함수이며 미지계수이다. 임의의 점  $x$ 에서의 미지계수값  $\mathbf{a}(x)$ 는  $x$ 를 기준으로 하는 일정한 거리내의 절점들인  $x_I$ 의 변위오차에 대한 가중잔여치(weighted residual)를 나타내는 식(2)를 식(3)의 조건을 이용하여 최소화시킴으로써 구할 수 있다.

$$J = \sum_{I=1}^{n_m} w(x-x_I) [\mathbf{p}^T(x_I) \mathbf{a}(x) - u_I]^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}(x)} = 0 \quad (3)$$

여기서,  $u_I$ 는  $x = x_I$ 에서의 절점변위이고  $w(x-x_I)$ 는 기준점으로부터 떨어진 거리에 대한  $x_I$ 에서의 가중치이다. 또한  $n_m$ 은  $x$ 를 중심으로 영향영역내에 포함되는 절점들의 개수를 의미한다. 식(2)를 최소화시켜 미지계수  $\mathbf{a}(x)$ 를 구하면 식(4)와 같다.

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{C}(x) \mathbf{u} \quad (4)$$

여기서,

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{I=1}^{n_m} w(x-x_I) \mathbf{p}(x_I) \mathbf{p}^T(x_I) \quad (5)$$

$$\mathbf{C}(x) = [w(x-x_1) \mathbf{p}(x_1), \dots, w(x-x_{n_m}) \mathbf{p}(x_{n_m})] \quad (6)$$

따라서, EFG법에서 근사변위함수는 식 (4)를 식 (1)에 대입하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u^h(x) &= \sum_{I=1}^{n_m} \sum_J^m p_J(x) (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{C}(x))_{JI} u_I \\ &= \sum_{I=1}^{n_m} \Phi_I(x) u_I \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)에서 기준점  $x$ 를 중심으로 일정한 크기의 영향영역내에 위치하는 임의의  $I$ 번째 절점의 형상함수  $\Phi_I(x)$ 는 식 (8)과 같이 정의된다.

$$\Phi_I(x) = \sum_J^m p_J(x) (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{C}(x))_{JI} \quad (8)$$

### 2.2 가중함수와 영향영역의 설정

EFG법을 이용하여 수치해를 구할 때, 해의 정도를 좌우하는 중요한 요소 중의 하나는 가중함수(weight function)를 결정하는 일이다. 가중함수  $w(x-x_I)$ 는 기준점  $x$ 를 중심으로 일정한 크기의 영향영역내에 포함된 임의의 절점  $x_I$ 가 갖게 되는 거리에 따른 가중치를 결정해 주는 함수이다. EFG법에서는 compact support 형태를 지닌 표 1에 나타난 형태의 함수들을 가중함수로 널리 사용한다.

적절한 가중함수의 선택과 더불어 해의 정도를 좌우하는 또 하나의 중요한 요소는 이동최소제곱법에 의해 근사해를 도출할 때, 몇 개의 주변 절점들을 이용하여 기준점의 변위함수를 구성할 것인지를 결정하는 영향영역의 선택이다. 영향영역은 2차원 문제일 경우에 일반적으로 일정한 크기의 사각형 또는 원의 형태를 취한다. 영향영역내에 적절한 갯수의 절점이 포함되도록 해야 수치 해의 정도가 보장되는 동시에 빠른 계산을 수행할 수 있다. 그림 1은 2차원 대상영역에서 각 절점들의 원형 영향영역을 선택한 예를 보여주고 있다.

표 1 가중함수의 종류와 형태

가중함수의 종류별 형태	
Gaussian :	
$w(d_i) = \begin{cases} \frac{\exp(-(d_i/c)^2) - \exp(-(d_{mi}/c)^2)}{1 - \exp(-(d_{mi}/c)^2)} & d_i \leq d_{mi} \\ 0 & d_i > d_{mi} \end{cases}$	
Cubic spline :	
$w(d_i) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4(\frac{d_i}{d_{mi}})^2 + 4(\frac{d_i}{d_{mi}})^3 & d_i \leq \frac{d_{mi}}{2} \\ \frac{4}{3} - 4(\frac{d_i}{d_{mi}}) + 4(\frac{d_i}{d_{mi}})^2 - \frac{4}{3}(\frac{d_i}{d_{mi}})^3 & \frac{d_{mi}}{2} < d_i \leq d_{mi} \\ 0 & d_i > d_{mi} \end{cases}$	
Quartic spline :	
$w(d_i) = \begin{cases} 1 - 6(\frac{d_i}{d_{mi}})^2 + 8(\frac{d_i}{d_{mi}})^3 - 3(\frac{d_i}{d_{mi}})^4 & d_i \leq d_{mi} \\ 0 & d_i > d_{mi} \end{cases}$	

$d_i = \|x - x_j\|$ ,  $d_{mi}$ 는 임의의 점의 영향영역의 크기,  $C$ 는 Gaussian가중함수에서 가중함수의 팽창을 조절하는 파라메타

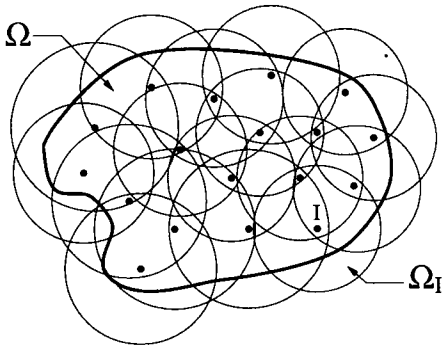


그림 1 2차원 원형 영향영역

### 2.3 경계조건의 처리

EFG법에서는 유한요소법과 달리 형상함수가 kronecker delta 조건,  $\phi_I(x_j) = \delta_{IJ}$ , 을 만족시키지 못하기 때문에 특별한 처리가 요구된다. 즉, 유한요소법에서는 필수경계상에 있지 않은 절점들의 형상함수는 경계에서 자동적으로 0이 되어 사라지지만 EFG법에서는 경계상에 있지 않은 절점의 형상함수를 계산할 때 그 영향영역내에 필수경계상의 절점이 포함되게 되면 경계상의 절점도 어떤 값을 갖게 되므로 구속조건이나 미리 정의된 경계조건이 완전

하게 반영되지 못한다. 비슷한 원리로 자연경계조건에서도 어떤 절점들에 가해진 하중은 이 절점의 형상함수를 구성하면서 그 영향이 주변의 다른 절점으로 전이되게 된다.

#### 2.3.1 자연경계조건의 처리

EFG형상함수의 구성특성상 하중이 가해지는 자연경계조건은 다음과 같은 단계로 처리할 수 있다. 먼저, 자연경계조건이 부여된 경계면 상에 존재하는 일련의 절점들로 경계면을 구성하고, 이 경계면상에 Gauss 적분점을 설정하여 절점들에 가해진 하중을 적분점으로 적절하게 분배해준다. 다음으로, Gauss 적분점별로 영향영역을 설정하고 영역내에 들어온 절점들에 이 하중들을 다시 분배하여 주므로써 하중을 처리한다. 이 과정에서도 적절한 형상함수가 구성될 수 있도록 적당한 영향영역과 가중치를 사용해야 하며 이를 적절히 수행하지 못하면 오차의 요인이 될 수도 있으므로 주의해야 한다.

#### 2.3.2 필수경계조건의 처리

경계  $\Gamma$ 에 의해 경계지어지는 영역  $\Omega$ 에서의 평행방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \text{ on } \Omega \tag{9}$$

여기서,  $\sigma$ 는 변위장  $u$ 에서의 응력텐서이고  $b$ 는 체적력을 나타낸다. 전술한 바와 같이 EFG법의 형상함수는 형상함수가 지녀야 하는 기본조건 즉, kronecker delta 조건을 완전히 만족시키지 못하므로 근사변위함수가 필수경계조건을 만족시키도록 하기 위하여 Bubnov-Galerkin법에 의해 식 (9)를 weak form으로 바꾸면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta W = \int_{\Omega} \nabla_s \delta u : \sigma - \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u \cdot \bar{t} d\Gamma$$

$$-\delta W_u(u) = 0 \quad \forall \delta u \in H^1 \tag{10}$$

여기서,  $\nabla_s$ 는 대칭인 미분연산자이고  $\delta u$ 는 Sobolev 공간  $H^1$ 에서의 임의의 test function이며  $\delta W_u(u)$ 는 필수경계조건을 만족시키기 위한 추가적인 항이

다.

EFG법은 Galerkin방법에 따라 선형의 계 방정식을 유도해 내지만 필수경계조건의 처리를 위해 추가의 구속조건식이 첨가되기 때문에 최종 계방정식의 구성은 조금 다른 양상을 띄게 된다. EFG법에서 필수경계조건을 만족시키기 위해 구속조건식  $\delta W_u(u)$ 항을 고려하기 위해 사용할 수 있는 방법들은 Lagrange multiplier 방법, 수정변분원리의 사용, penalty 방법, 기존 수치해석기법과의 조합 방법 등이 있다. 본 연구에서는 penalty법을 이용하여 필수경계조건을 만족시키도록 하였다.

### 3. EFG법을 이용한 자동화된 균열진전해석 기법

#### 3.1 응력확대계수와 균열성장방향의 결정

본 연구에서는 응력확대계수를 구하기 위해 J적분을 면적분의 형태로 발전시킨 교차적분법<sup>17)</sup>을 이용하였다. 교차적분의 수치적 수행방법은 다음과 같다. 먼저, 균열선단을 기준으로 적분영역을 결정하고 이 영역을 적절하게 나누어 적분점을 설정한다. 이때 결정된 적분영역내에서는 해석대상체내의 타 적분영역에 비해 고차의 quadrature rule을 사용하는 것이 좋다. 다음으로, 적분영역내의 각 적분점에 대해 식 (11)과 같은 교차적분식을 계산하고 Gauss 적분법에 따라 적분점들에 대한 값을 모두 합산한다. 이때 모드에 따라 보조영역을 각각 선택하여  $M^{(1,2)}$ 값을 구해야 한다. 끝으로  $M^{(1,2)}$ 값을 이용하여 모드 I과 모드 II에 대한 응력확대계수를 계산한다.

$$M^{(1,2)} = \int_A [\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u^{(2)}_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u^{(1)}_i}{\partial x_j} - W^{(1,2)} \delta_{ij}] \frac{\partial a}{\partial x_j} dA \quad (11)$$

한편, 균열진전을 모형화 하려면 균열의 성장방향을 예측해야 하는데 본 연구에서는 균열은 최대 hoop 응력 ( $\sigma_{\theta\theta}$ )에 직각인 방향으로 진전하는 것으로 가정하는 최대주응력한계론<sup>18)</sup>을 사용하였다. 이 이론에 따르면, 일반적인 혼합모드의 경우, 균열선단주변에서 응력은 식 (12)와 같이 표현되며 최대

hoop 응력의 방향은 전단응력이 0이 되는 방향으로써 식 (13)를 이용하여 계산할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \times \begin{bmatrix} K_I(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} + K_{II}(\frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2})) \\ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \\ \frac{1}{2} K_I \sin \theta + \frac{1}{2} K_{II}(3 \cos \theta - 1) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$K_I \sin \theta_m + K_{II}(3 \cos \theta_m - 1) = 0 \quad (13)$$

여기서,  $\theta_m$ 은 균열진전각을 나타낸다. 이  $\theta_m$ 의 방향에 대해  $\sigma_{\theta\theta}$ 는 주응력이므로 혼합모드 응력확대계수 대신에 등가의 모드 I의 응력확대계수,  $K_{Ieq}$ 를 사용하여 식(14)와 같이 나타낼 수 있다. 등가의 모드 I 응력확대계수를 이용하면 혼합모드상태의 문제에 있어서 하나의 변수로 혼합상태의 응력장을 나타낼 수 있고 혼합모드상태의 하중조건하의 균열 성장방향을 간단하게 계산할 수 있다.

$$K_{Ieq} = K_I \cos^3 \frac{\theta_m}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta_m}{2} \sin \frac{\theta_m}{2} \quad (14)$$

#### 3.2 균열의 모형화와 균열진전해석 알고리즘

EFG법에 의한 균열의 해석에 있어서는 균열의 불연속성과 특이성을 효율적으로 표현하는 것이 중요하며 균열이 성장하는 경우에는 균열의 성장경로를 따라 가면서 균열의 위치를 수치적으로 표현하고 인식할 수 있어야 한다. EFG법에서 균열의 불연속성을 묘사하기 위해서는 균열의 기하학적인 형상을 표현할 수 있도록 절점을 배치하고 이와는 별도로 균열의 위치를 규정하기 위해 연속적인 선분들을 이용하여 표현한다. 이때 균열을 수치적으로 인식하기 위해 선분의 양쪽에 매우 가까운 거리로 복절점을 배치하는데 이 복절점들은 균열의 반대편에 서로 위치하고 있기 때문에 서로 간에 영향을 미치지 않아야 하며 영향영역도 균열의 불연속성을 반영하여 결정되어야 한다.

균열진전해석에 있어서는 균열이 성장하게 되면

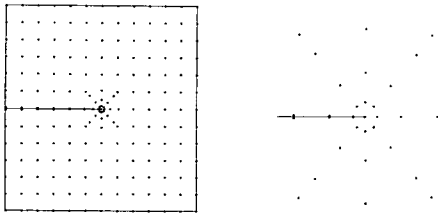


그림 2 균열의 모형을 위한 절점배치와 균열 선단세부의 추가 절점배치의 예

매 단계마다 새롭게 계산된 균열선단이 새로이 한 개의 절점으로 생성되고 이전 단계의 균열선단은 균열면을 중심으로 균열면과 직각방향으로 매우 작은 거리를 두고 2개의 절점으로 분리되어 새롭게 배치된다. 만약 균열성장의 폭이 큰 경우에는 새로운 균열선단과 전 단계의 균열선단 사이에 추가의 절점들을 삽입함으로써 균열선단주위에 적절한 간격으로 절점들이 분포될 수 있도록 해 주어야 해의 정도를 향상시킬 수 있다.

균열선단 주변에서의 수치해의 정도를 향상시키기 위한 방법으로 적절한 개수의 절점을 균등하게 추가하여 자유도를 증가시키는 기법이 사용될 수 있는데 균열선단을 중심으로 여러 개의 동심원에 대해 각각의 원상에 절점을 배치하는 방법을 사용하는 것이 편리하다(그림 2 참조). 또 다른 방법으로는 서론에서 언급하였듯이 Fleming 등<sup>12)</sup>이 제안한 확장함수를 사용하여 균열선단의 특이성을 반영 시켜줄 수 있다. 요소의 사용 없이 절점들만을 이용하여 해석을 수행하는 EFG법에서는 균열의 성장에 따른 단계별 해석이 절점 추가를 통한 간단한 조작에 의해 균열형상을 새로이 묘사해줌으로써 가능하기 때문에 연속적인 균열전파현상을 초기해석모형을 이용하여 자동적으로 해석하는 것이 가능하다.

본 연구에서는 정지상태의 균열문제와 성장하는 균열문제를 해석하기 위해 EFG법의 기본이론에 선형탄성파괴역학이론을 근거로한 균열해석에 필요한 수치기법들을 집목하여 일반적인 혼합모드상대 균열의 성장에 따른 단계별 해석을 자동화하여 균열진전현상을 해석할 수 있는 알고리즘을 제안하였다. 본 연구에서 제안한 자동화된 균열진전해석 알고리즘의 흐름도는 그림 3과 같다.

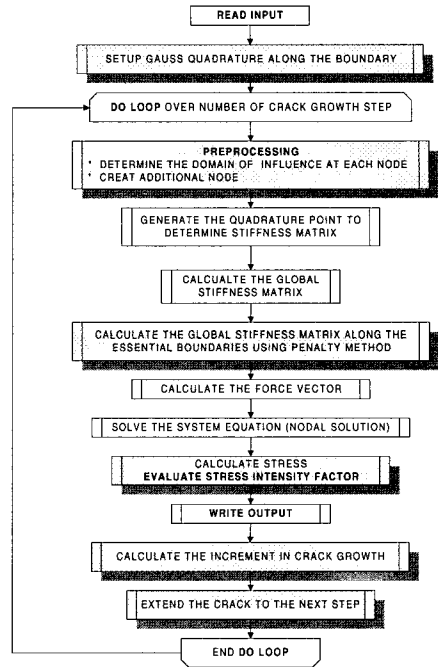


그림 3 균열진전해석을 위한 알고리즘

#### 4. 대표적인 균열문제의 해석 및 검증

##### 4.1 인장하중을 받는 편측균열 문제

개발된 균열진전해석 알고리즘의 검증을 위해 수형한 편측균열을 갖고 하단의 수직변위가 구속되어 있는 평판에  $1 \text{ psi}(7.0 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^2)$ 의 인장하중이 작용하는 문제를 해석하였다. 그림 4에는 해석을 위한 절점의 배치와 부재의 형상과 치수, 응력확대계수를 구하기 위한 교차적분영역이 도시되어 있다. 본 해석에서 탄성계수  $E$ 는  $3 \times 10^6 \text{ psi}(42.6 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2)$ , 이고 포아송비  $\nu$ 는 0.3을 사용하였으며, 근사변위함수 도출을 위해 선형의 다항식을 사용하였다. 그림 5에는 균열의 성장에 따른 모드 I 응력확대계수값의 이론해와 본 연구의 해석결과를 비교하여 나타냈다. 수치적 방법에 의해 산정된 응력확대계수가 충분한 정확성을 유지하고 있는 것을 확인할 수 있다. 그림 6은 자동화된 균열진전해석의 결과를 바탕으로 균열진전에 따른 수직응력( $\sigma_y$ )의 분포상태를 나타낸 것이다.

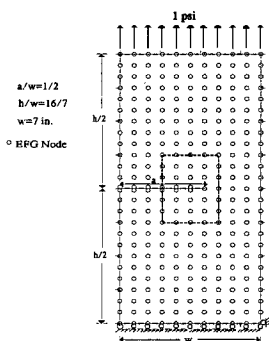


그림 4 인장하중을 받는 편축균열 모형

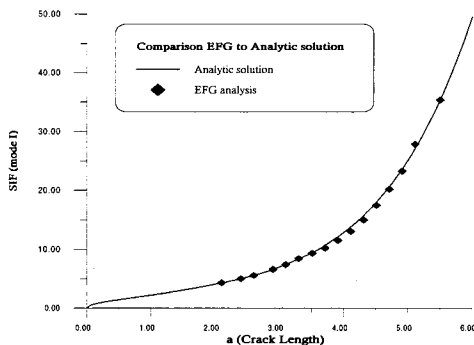
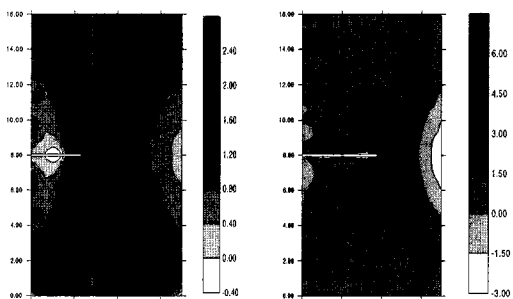
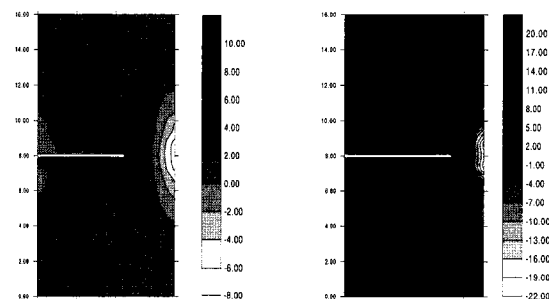


그림 5 균열의 성장에 따른 응력확대계수 ( $K_I$ )



(a) 초기단계

(b) 6단계 해석 후



(c) 11 단계 해석 후

(d) 15 단계 해석 후

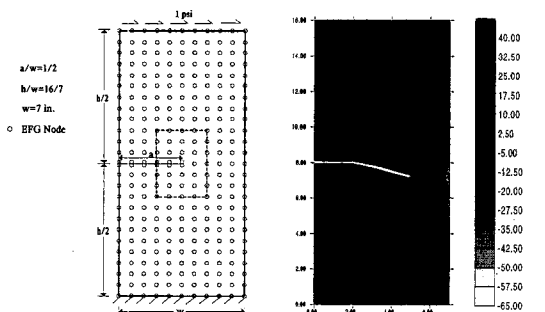
그림 6 균열의 성장에 따른 수직응력분포 (단위:  $psi$ )

### 4.2 전단응력을 받는 편축균열 문제

본 절에서는 혼합모드상태의 균열문제를 다루었으며 재료상수와 부재의 치수는 앞 절의 예제와 같다. 그림 7(a)와 같이 하단이 고정되고 상단에  $1\psi$

( $7.0 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^3$ )의 전단응력이 작용하는 경우에 대해 균열의 진전해석을 수행하였다. 그림 7(b)는 해석의 종료단계에서의 수직응력의 분포도를 나타낸 것인데 균열이 혼합모드를 유발하는 전단응력에 의해서 꺾이면서 성장한 것과 함께 균열선단에 응력이 집중되는 현상과 균열이 진전하면서 균열의 앞쪽에 큰 압축응력을 유발하고 있는 현상을 확인할 수 있다.

표 2는 초기상태의 균열에 대한 모드 I과 모드 II의 응력확대계수값을 비교한 것이다. 혼합모드상



(a) 전단응력하의 편축균열 문제 (b) 균열성장 후의 수직응력 분포(단위:  $psi$ )

그림 7 전단응력을 받는 혼합모드균열 문제

표2 혼합모드상태 균열의 응력확대계수 오차

(단위 :  $psi\sqrt{in}$ )

	$K_I$	$K_{II}$
이론해*	34.00	4.55
수치해	34.01	4.62
에러(%)	0.03	1.54

\* 이론해: Wilson<sup>19)</sup>이 계산한 이론해

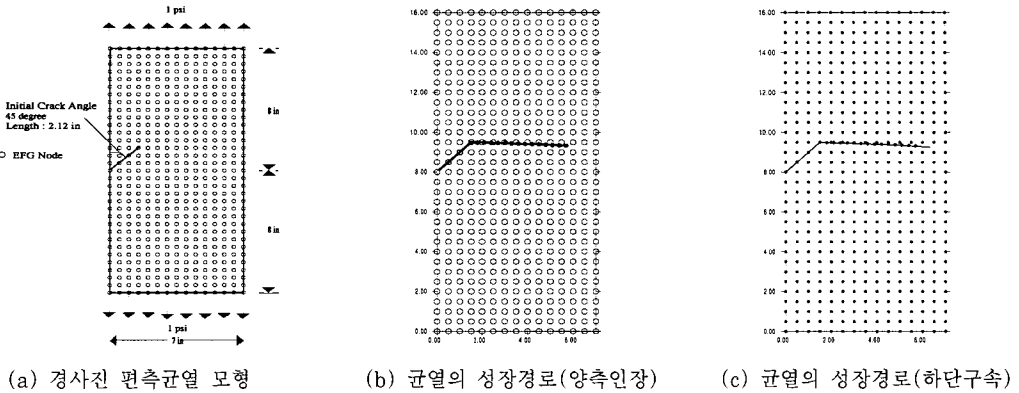


그림 8 혼합모드상태의 경사진 편축균열 문제

태에서도 본 연구의 해석결과는 좋은 정확도를 유지하고 있음을 알 수 있다.

### 4.3 혼합모드상태의 경사진 편축균열 문제

본 절에서는 부재의 한쪽에 경사진 균열이 존재하고 부재의 상단과 하단에 인장응력이 동시에 작용하는 혼합모드상태의 경사진 편축균열문제를 다루었다. 이 부재의 초기균열은 45°의 각도로 경사져 있으며 부재의 탄성계수는  $3 \times 10^6 \text{ psi}$  ( $42.6 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ), 포아송비는 0.3이고 작용하는 인장하중의 크기는  $1 \text{ psi}$  ( $7.0 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^3$ )이다. 본 문제의 초기균열상태에서 균열성장방향에 대해 Erdogan과 Sih<sup>18)</sup>가 제시한 이론해는 초기균열로부터 44°이고, Maccagno와 Knott<sup>20)</sup>가 실험에 의해 통계적으로 제시한 균열성장각은 44°~55°이다. 본 연구의 해석결과 초기단계에서의 균열성장방향이 초기균열로부터 시계방향으로 47.9° 꺾어져 성장하는 것으로 계산되었고 그림 8(b)과 같이 대체로 이 값을 유지하면서 균열이 성장하는 것을 확인할 수 있다.

동일한 문제에 대해 경계조건에 변화를 주어서 상단에는 인장하중을 작용시키고 하단의 수직방향 변위를 구속하여 해석을 수행하였다. 해석결과는 그림 8(c)에 나타나 있는데 앞의 해석결과와 거의 동일한(초기단계 균열성장방향은 47.4°) 결과를 나타내고 있어 본 연구에서 사용한 penalty method를 이용한 필수경계처리조건이 잘 적용하고 있는 것을 확인할 수 있다.

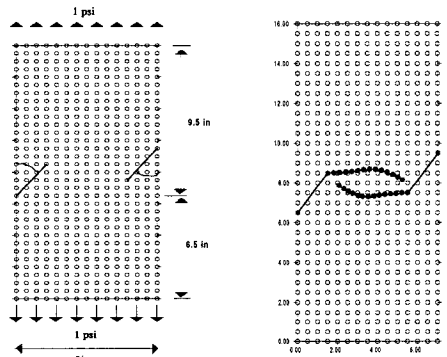


그림 9 임의의 경사를 갖는 양축균열 문제

### 4.4 임의의 경사를 갖는 양축균열 문제

본 절에서는 그림 9(a)와 같이 부재의 양측에 임의의 경사각을 갖는 초기균열이 존재하는 문제를 다루었다. 상단과 하단에 인장하중이  $1 \text{ psi}$  ( $7.0 \times 10^{-2} \text{ kgf/cm}^3$ )로 일정하게 작용하고, 초기균열의 경사각도( $\theta$ )는 각각  $\pm 53.27^\circ$ 이다. 그림 9(b)에는 자동화된 균열진전해석을 통하여 얻어진 균열의 성장경로를 도시하였는데 해석결과를 보면 양쪽의 균열이 진전할 때 균열의 선단이 서로 만나지 않고 피하면서 꺾어지는 것을 볼 수 있다. 이것은 균열선단의 상호작용에 의한 것으로 참고문헌<sup>21)</sup>을 통하여 실험적인 근거와 이론적인 근거를 확인할 수 있으며 본 연구에서 제안한 해석기법에 의해 복수균열



의 성장문제 또한 정확히 다룰 수 있음을 보여준다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 EFG법을 이용하여 균열진전문제를 효율적으로 해석할 수 있는 알고리즘을 개발하고 이를 정지상태와 성장상태에 있는 대표적인 균열문제에 적용해 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 기존의 수치해석적 방법으로는 해결이 용이하지 않은 균열진전해석문제를 EFG법을 이용하여 자동적으로 균열성장단계별 해석을 수행할 수 있는 알고리즘을 개발하였다.

2) 본 연구에서 개발된 균열진전해석 알고리즘의 정확성 및 효율성을 검증하기 위하여 대표적인 모드 I, 모드 II 및 혼합모드상태의 균열진전문제에 적용해 본 결과 파괴역학계수들과 균열이 성장하는 경로를 높은 정확도를 유지하면서 손쉽게 예측할 수 있음을 확인하였다.

3) EFG법에서 문제가 되는 필수경계조건의 불만족문제를 penalty법을 사용하여 해결하였으며 해석예제를 통해 그 적용성을 검증하였다.

## 참 고 문 헌

- Koh, H. M., Lee, H. S. and Jeong U. Y., An Incremental Formulation of the Moving-grid Finite Element Method of the Prediction of Dynamic Crack Propagation, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 158, 1995, pp.295~309
- Saleh, A. L. and Aliabadi, M. H., Crack Growth Analysis in Reinforced Concrete Using BEM, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.124, 1998, pp.949~958
- Lucy, L. B., A Numerical Approach to Testing of the Fission Hypothesis, *The Astronomical Journal*, Vol. 82, 1977, pp.1013~1024
- Libersky, L. D. and Petsch, A. G., Smooth Particle Hydrodynamics with Strength of Materials, *Advances in the Free-Lagrange Method, Lecture Notes in Physics*, Vol. 395, 1990, pp.248~257
- Liu, W. K., Jun, S. and Zhang Y. F., Reproducing Kernel Particle Methods, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, 1995, pp.1081~1106
- Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P., Generalizing the Finite Element Method : Diffuse Approximation and Diffuse Elements, *Computational Mechanics*, Vol. 10, 1992, pp.307~318
- Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Element-free Galerkin Methods", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1994, pp.229~256
- Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., Crack Propagation by Element-Free Galerkin Methods, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 51, No. 2, 1995, pp.295~315
- Belytschko, T. and Tabbara, M., Dynamic Fracture Using Element-Free Galerkin Methods, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, 1996, pp.923~938
- Krongauz, Y. and Belytschko, T., Enforcement of Essential Boundary Conditions in Meshless Approximation Using Finite Elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 131, 1996, pp.133~145
- Organ, D., Fleming, M., Terry, T. and Belytschko, T., Continuous Meshless Approximations for Nonconvex Bodies by Diffraction and Transparency, *Computational Mechanics*, Vol. 18, 1996, pp.225~235
- Fleming, M. and Chu, Y. A., Moran, B. and Belytschko, T., Enriched Element-Free Galerkin Methods for Crack Tip

- Fields, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, 1997, pp.1483~1504
13. Atluri, S. N., Zhu, T. L. and Zhang, J., A Local Boundary Integral Equation Method in Computational Mechanics and a Meshless Discretization Approach, *Computational Mechanics*, Vol. 21, 1998, pp.223~235
  14. Belytschko, T. Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P., Meshless Methods: An Overview and Recent Developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, 1996, pp.3~47
  15. 전석기, 이상호, "무요소법 개론", 전산구조공학, 제11권 제3호, 1998, pp.11~28
  16. 이상호, 김효진, "Element-Free Galerkin Method를 이용한 균열진전해석", 전산구조공학 제11권 제3호, 1998, pp.44~54
  17. Moran, B. and Shih C. F., Crack Tip and Associated Domain Integrals from Momentum and Energy Balance, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27(6), 1987, pp.615~641
  18. Erdogan, F. and Sih, G. C., On the Crack Extension in Plates under Loading and Transverse Shear, *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, 1963, pp. 519~527
  19. Wilson, W. K., Combined-Mode Fracture Mechanics, Ph. D. thesis, University of Pittsburgh. 1969
  20. Maccagno, T. M. and Knott, J.F., Brittle Fracture under Mixed Modes I and II Loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 29, 1985, pp.49~57
  21. Melin, S., Why Do Cracks Avoid Each Other?, *International Journal of Fracture*, Vol. 23, 1982, pp.37~45
- (접수일자 : 1999. 5. 26)