

체스판무늬 형성 방지책을 이용한 위상 최적설계

Topology Optimization Using the Chessboard Prevention Strategy

임 오 강*
Lim, O-Kaung

이 진 식**
Lee, Jin-Sik

요지

변위 근거 유한요소해석을 사용하는 대부분의 위상 최적화 기법은 요소의 안정성 부족으로 인하여 체스판무늬가 주기적 형태로 반복하여 설계영역 내부에 나타난다. 본 연구에서는 선형요소를 이용하면서 최적화 알고리즘의 안정성에 영향을 주지 않고 간단하게 모든 최적화 알고리즘에 이용 가능한 체스판무늬 형성 방지책을 개발하였다. 본 연구의 체스판무늬 형성 방지책에서는 먼저 각 선형요소를 구성하는 절점들의 부피분율을 설계변수로 설정하고, 요소내부의 부피분율을 설계변수로 표현하기 위한 선형 보간함수로 선형요소들의 형상함수를 선정하였다. 그리고, 설계변수와 등가 재료상수와의 상관 관계식은 평균장 근사이론을 이용하여 균질화된 재료에 벌칙인자가 도입된 관계식을 이용하였다. 또한, 본 연구에서는 순차이차계획법인 PLBA 알고리즘을 이용하여 위상 최적화문제를 해석하였다.

핵심용어 : 변위 근거 유한요소해석, 위상 최적화, 요소의 안정성, 체스판무늬

Abstract

Many topology optimization methods using displacement-based finite element method commonly have an undesirable feature that material is distributed in a periodic chessboard pattern for the lack of numerical stability. The use of higher order elements makes the computational cost prohibitively high. The stability of the optimization algorithm may be destroyed by the topology optimization method using strategy to prevent the formation of chessboard pattern in the optimum iteration process. The purpose of this paper is to obtain a strategy that should not affect the stability of optimization algorithm and must be easy to implement and remove the chessboard pattern entirely.

Keywords : displacement-based finite element method, topology optimization, numerical stability, chessboard pattern

1. 서 론

최적설계기법 중 1980년대 후반이후 폭넓은

연구가 진행되고 있는 위상 최적화기법은 경계이동법을 이용한 형상 최적화기법의 한계를 극복한 방법으로써 공간상의 모든 점에서 재료(material-

* 정회원·부산대학교 기계공학부, 기계기술연구소, 교수
** 부산대학교 기계공학과, 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

als)의 유무를 표시하는 함수를 통하여 형상을 직접적인 방법으로 표현한다. 따라서, 설계영역 내부에 구멍(holes)의 생성이나 제거와 같은 위상의 변화가 가능하다.

변위 근거 유한요소해석을 사용하는 대부분의 위상 최적화기법은 선형요소의 수치적 안정성 부족으로 인하여 설계영역 내부에 현실적으로 제작이 불가능한 체스판무늬(chessboards)가 주기적 형태로 반복하여 나타난다. 이러한 현상은 위상 최적화기법의 목적함수인 변형률에너지(strain energy)의 최소화를 만족하기 위한 결과이다¹⁾. 즉, 설계변수인 요소내부의 밀도를 상수로 가정한 경우, 하중이 크게 걸리는 요소들에서는 밀도가 '1'에 가까워지고, 하중이 거의 걸리지 않는 요소들에서는 밀도가 '0'에 가까워진다. 그러나, 하중이 중간정도 걸리는 요소들에서는 재료를 효과적으로 이용하려는 체스판무늬 형태가 나타난다.

이러한 현상을 방지하고 보다 매끄러운 최적 밀도분포를 추출하기 위한 기법으로는 가장 기본적인 방법으로 Babuska-Brezzi 조건을 만족하는 고차요소를 사용하면 된다²⁾. 그런데, 이 방법은 유한요소해석에 필요한 선형방정식의 크기가 기하급수적으로 커져서 쓸만한 해상도를 갖는 밀도의 분포를 현실적으로 얻기가 곤란하다는 단점이 있다³⁾. 다른 방법으로는 최적화 과정 중에 발생하는 체스판무늬는 무시하고 최종적인 결과에서 체스판무늬가 형성된 부분의 밀도를 균일하게 중간값으로 할당하는 방법이 있다. 이 방법은 적용하기에는 매우 간단하지만 체스판무늬 부분의 강성이 낮게 수정되는 단점이 있다⁴⁾. 이와같은 방법들의 단점을 해소하기 위하여 선형요소를 사용하는 방지책으로는 화상처리 방법(image processing method)¹⁾, 밀도 재분배 방법(density redistribution method)³⁾, Gaussian Blur Filter⁵⁾ 등이 있다. 이 방법들은 체스판무늬 형성을 억제하여 최적의 위상으로 수렴하도록 하지만, 최적화 과정동안 체스판무늬의 형성 여부를 판단하고, 설계변수의 개선 때마다 체스판무늬 형성 방지책을 적용하기 때문에 최적화 알고리즘의 안정성에 영향을 미칠 가능성이 있다.

따라서, 본 연구에서는 각 선형요소를 구성하는 절점들의 부피분율(volume fraction)을 설계변수로 이용하고, 요소 내부의 부피분율을 설계변수로 표현하기 위한 선형 보간함수(linear interpolation function)로 각 요소의 형상함수(shape function)를 이용하여 최적화 알고리즘의 안정성에 영향을 주지 않고 간단하게 최적화 알고리즘에 이용 가능한 체스판무늬 형성 방지책을 개발한다. 그리고, 본 연구에서는 위상 최적화 문제를 어떤 시작점에서 출발해도 해에 수렴한다는 강력한 수렴성이 증명된 순차이차계획법 PLBA 알고리즘^{6), 7)}을 적용하여 해석한다.

2. 기본이론

일반적인 위상 최적화기법에서는 평면 구조물 해석시 계산의 효율성을 감안하여 설계변수인 4 절점 선형요소 내부의 밀도를 상수로 가정한다. 이와같은 경우 선형요소의 안정성 때문에 설계영역 내부에 체스판무늬가 형성된다. 본 연구에서는 체스판무늬 형성을 방지하고, 최적화 알고리즘의 안정성에 영향을 미치지 않는 기법을 개발하기 위하여 먼저 각 요소를 구성하는 절점들의 부피분율을 설계변수로 선정한다. 본 연구에서 부피분율은 밀도와 유사한 성질을 갖는다. 또한, 유한요소 해석시 이용되는 각 요소의 강성행렬을 설계변수로 표현하기 위하여 요소내부의 부피분율을 각 절점들의 부피분율로 표현한다. 이를 위한 선형 보간함수로 본 연구에서는 요소들의 형상함수를 선정하고, 요소내부의 부피분율은 요소 중심의 부피분율과 같다고 가정한다.

설계변수인 절점들의 부피분율의 초기값은 그림 1에서처럼 내부에 구멍이 없는 설계영역을 표시하기 위하여 '1'의 값을 가진다. 또한, 위상 최적화동안 절점들의 부피분율은 본 연구의 목적함수인 변형률에너지의 최소화를 만족하기 위하여 하한값 ' 10^{-4} '에서 상한값 '1'사이의 값을 갖는다. 그리고, 최적화의 결과로 얻은 최종적인 절점들의 부피분율을 형상함수를 이용하여 요소 중심의 부피분율로 표현하면 체스판무늬가 없는 위상 최적화 구조물을 얻을 수 있다.

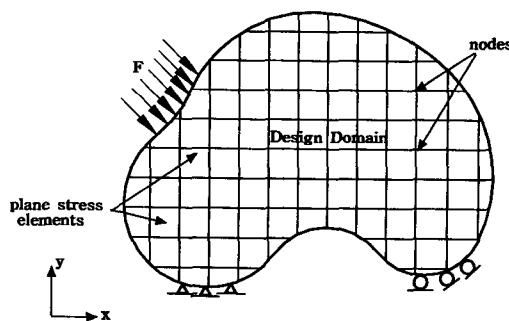


그림 1 평면 응력요소로 분할된 구조물

2. 1 유한요소법에 의한 위상 최적화 문제의 정식화

본 연구에서의 위상 최적화 문제는 그림 1에서와 같이 평면 구조물에 가해지는 외력, 경계조건 및 구조물이 차지할 체적만 알려진 상태에서 구조물 강성이 최대인 위상을 도출한다. 구조물 강성의 최대화는 평형상태에서의 구조물 변형률에너지 (strain energy) 최소화와 동일함으로 목적함수를 변형률에너지의 최소화로 설정하고, 제약함수로는 이용 가능한 최대 재료의 양으로 설정한다. 위상 최적화문제의 정식화에서 목적함수를 계산하기 위해서는 설계영역 내의 변위를 알아야 한다. 따라서, 본 연구에서는 위상 최적화문제의 정식화를 유한요소법과 관련시켜 정식화한다.

Minimize :

$$W = \{D\}^T [K] \{D\} = \sum_{e=1}^N \{d_e\}^T [k_e] \{d_e\} \quad (1a)$$

Subject to :

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (1b)$$

$$g = \sum_{e=1}^N \rho_e c_e v_e - Q_s \leq 0 \quad (1c)$$

$$0 < c_{\min} \leq c_e \leq c_{\max}, e = 1, \dots, N \quad (1d)$$

여기서, $\{D\}$ 와 $[K]$ 는 각각 전역변위 및 전역강성행렬이며, $\{F\}$ 는 외력을 나타낸다. 그리고, N 은 총 요소 개수를 표시하고, ρ_e 는 각 요소의 비중량을 나타내고, c_e 는 요소내부 재료의 부피분율을 표시하며, v_e 는 평면 구조물에서 요소의 면

적을 나타낸다. 또한, $[k_e]$ 는 국부강성행렬로 다음과 같다.

$$[k_e] = \int_{v_e} [B_e]^T [E_e] [B_e] dv \quad (2)$$

여기서, $[B_e]$ 는 변형률-변위의 관계를 나타내는 행렬이고, $[E_e]$ 는 응력과 변형률의 관계를 표시하는 행렬로 설계변수의 함수로 표시할 수 있다. 본 연구에서 이용한 평면응력요소의 경우에는 다음과 같다.

$$[E_e] = \frac{C_e^n}{2-C_e} \frac{E_0}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서, E_0 와 ν 는 각 요소를 구성하는 재료의 탄성계수(Young's modulus of elasticity)와 포와 송비(Poisson's ratio)를 나타낸다. 그리고, n 은 별칙인자로 '1'이상의 값을 가진다.

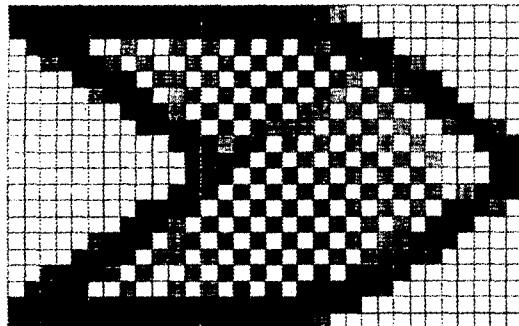
2. 2 절점의 부피분율과 요소내부 부피분율의 관계

본 연구에서 사용한 균질재료는 기지재(matrix)와 미시구멍(micro voids)으로 구성된 복합재료에 Mori-Tanaka의 평균장 근사론⁸⁾ 및 Eshelby의 등가원리⁹⁾를 적용하여 균질화시킨 재료이다. 이와같은 균질재료를 기초로 요소내부재료의 부피분율이 중간값을 갖는 것을 방지하기 위하여 별칙인자(penalty factor)를 도입한 관계식은 다음과 같다.

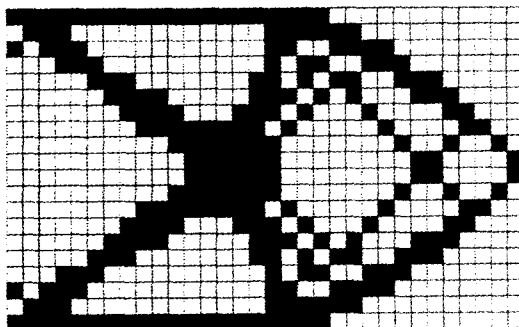
$$\frac{E}{E_0} = \frac{C_e^n}{2-C_e} \quad (4)$$

여기서, E 는 각 요소 복합재료의 등가 탄성계수를 나타낸다.

식(4)에서 제시된 관계식을 이용하여 한쪽이 고정된 외팔보의 위상 최적화 결과는 그림 2에서처럼 별칙인자의 조정만으로는 요소내부 재료의



(n=1인 경우)



(n=3인 경우)

그림 2 한쪽이 고정된 외팔보의 체스판무늬 형성

부피분율의 중간값들로 인한 체스판무늬 형성을
다소 감소시킬 수 있었으나, 완전히 방지할 수는
없었다¹⁰⁾.

그림 2에서와 같이 체스판무늬가 나타난 부분
에서는 최적의 형상을 추출하기가 곤란할 뿐만아
니라 현실적으로 제작이 불가능하다. 따라서, 본
연구에서는 4절점 선형요소를 사용하면서 각 요
소의 부피분율을 설계변수로 선택하지 않고, 요
소를 구성하는 각 절점의 부피분율을 설계변수로
선택한다. 그러면, 요소내부 재료의 부피분율은
다음과 같이 표현된다.

$$c_e = L_1 c_1 + L_2 c_2 + L_3 c_3 + L_4 c_4,$$

$$e = 1, \dots, N \quad (5)$$

여기서, $L_i (i=1 \text{ to } 4)$ 는 선형 보간함수로 각
요소의 형상함수를 표시하며, 본 연구에서는 요

소 중심에서의 형상함수 값을 사용한다. 그리고,
 $c_i (i=1 \text{ to } 4)$ 는 요소를 구성하는 절점의 부피분
율을 나타낸다.

2.3 설계 민감도 해석 (Sensitivity Analysis)

목적함수와 제약함수의 설계변수에 대한 미분
은 순차이차계획법 PLBA 알고리즘이 최적화 방
향탐색에 사용하는 정보이다. 유한요소법을 이용
하여 설계 민감도를 구하는 방법은 유한차분법과
해석적 방법이 있다. 유한차분법은 설계변수에
접근을 주어 계산하고, 해석적인 방법에는 직접
미분법과 보조변수법을 이용하는 방법이 있다.
본 연구에서는 식(5)를 식(4)에 대입하면 설계
변수와 등가 탄성계수 관계식이 명시적으로 표시
되며 때문에 단순한 이론을 사용하여 계산의 이
해가 쉽고, 프로그램의 작성이 용이한 직접미분
법을 사용한다.

식(1c)로 표시된 제약함수는 설계변수와 선형
인 관계로 직접미분법을 통한 민감도 계산이 비
선형인 목적함수에 비하여 용이하다. 따라서, 먼저
계산한 결과는 다음과 같다.

$$\frac{dg}{dc_i} = \sum_{e=1}^{N_i} L_{ie} v_e \quad (6)$$

여기서, c_i 는 설계변수로 각 절점의 부피분율이
고, N_i 는 각 절점에 인접한 요소의 개수를 나타
내고, L_{ie} 는 각 인접한 요소 중심에서의 형상함
수 값이다.

설계변수에 비선형 함수인 목적함수의 민감도
는 식(1a)로 표시된 목적함수를 먼저 요소내부
의 부피분율에 대한 민감도로 계산하여 간단한
형태로 표현한 다음 설계변수에 대한 민감도로
변환한다. 먼저, 목적함수를 요소내부의 부피분
율로 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{dW}{dc_e} = \{D\}^T \frac{\partial[K]}{\partial c_e} \{D\} + 2\{D\}^T [K] \frac{\partial[D]}{\partial c_e} \quad (7a)$$

식(7a)의 우변의 두 번째 항인 $\frac{\partial[D]}{\partial c_e}$ 관계를 식

(1b)를 요소내부의 부피분율에 대하여 미분하여 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial\{D\}}{\partial c_e} = [K]^{-1} \left(\frac{\partial\{F\}}{\partial c_e} - \frac{\partial[K]}{\partial c_e}\{D\} \right) \quad (7b)$$

식 (7b)의 관계를 식 (7a)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{dW}{dc_e} = -\{D\}^T \frac{\partial[K]}{\partial c_e} \{D\} \quad (7c)$$

식 (7c)에서 알 수 있듯이 전역강성 행렬의 설계변수에 대한 미분 정보만 계산하면 목적함수의 민감도는 간단하게 계산된다. 따라서, 전역강성 행렬의 설계변수에 대한 미분을 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial[K]}{\partial c_i} = \sum_{e=1}^N \int_{v_e} [B_e]^T \frac{\partial[E_e]}{\partial c_i} [B_e] d\nu_e = K_{i,i} \quad (8)$$

식 (8)을 이용하여 목적함수의 설계변수에 대한 민감도를 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{dW}{dc_i} = -\{D\}^T K_{i,i} \{D\} \quad (9)$$

3. 수치예제 및 고찰

본 연구의 수치예제들은 공통으로 4절점 평면응력 선형요소를 사용하였으며, 설계변수인 절점의 부피분율은 하한값으로 ‘ 10^{-4} ’, 상한값으로 ‘1’, 구조물의 구멍이 없는 초기상태를 표현하기 위하여 초기값으로 ‘1’을 주었다. 그리고, 구조물을 4절점 선형요소로 분할한 뒤 각 요소내부 재료의 탄성계수 $E_0=210$ Gpa, 프와송 비 $\nu=1/3$ 을 선택하였다.

3. 1 한쪽이 고정된 보

본 예제는 그림 3에서와 같이 고정된 영역 반대편의 중앙에서 집중하중을 받는 한쪽이 고정된

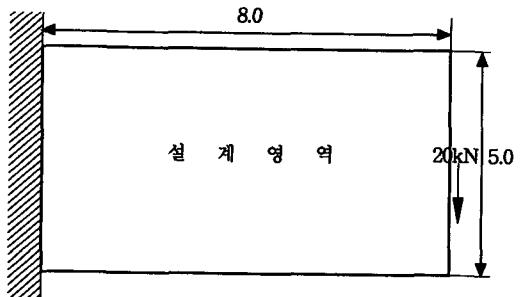


그림 3 한쪽이 고정된 보

보를 가로방향으로 32개의 요소와 세로방향으로 20개의 요소로 분할하였다. 따라서, 총 요소수는 640개이며, 총 절점의 수는 693개이다. 그리고, 제약조건으로는 전체 설계영역에서 사용하는 재료의 최대 35%만 이용하도록 하였다. 요소내부의 부피분율을 설계변수로 선택하고 별개인자가 $n=1$ 과 $n=3$ 인 경우의 위상 최적화 결과는 그림 2와 같다. 그림 2에서 나타난 체스판무늬를 제거하기 위하여 본 연구에서 제시한 방지책을 이용한 위상 최적화 결과는 그림 4와 같다.

그림 4의 결과는 위상 최적화 기법으로 균질화법(homogenization method)¹¹⁾과 밀도함수법(density method)¹²⁾을 이용하면서, 체스판무늬방지기법을 이용한 경우의 결과와 동일하다. 그리고, 본 연구에서 제시한 체스판무늬 방지책을 사용한 경우 그림 2에서 나타난 체스판무늬가 완전히 사라지고, 그림 4와 같이 구조물의 경계가 매끄러운 것을 알 수 있다.

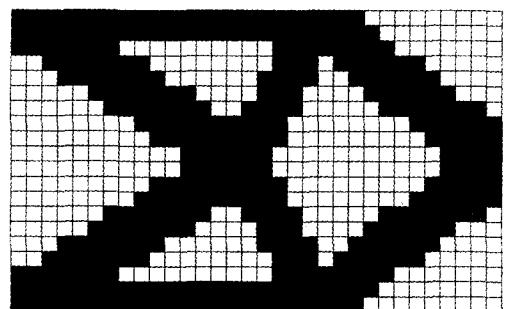


그림 4 한쪽이 고정된 보의 위상 최적설계
(체스판무늬 방지책을 사용한 경우)

3. 2 중앙에 집중하중이 작용하는 단순 지지보

본 예제는 그림 5에서와 같이 중앙에 10kN의 집중하중이 작용하는 단순 지지보를 가로방향으로 72개와 세로방향으로 14개의 요소로 분할하였다. 따라서, 총 요소수는 1008개, 총 절점의 수는 1095개이다. 그리고, 제약조건으로는 전체 설계영역에서 사용하는 재료의 최대 35%만 이용하도록 하였다. 그림 6은 요소내의 부피분율을 설계변수로 설정하고, 벌칙인자 $n=3$ 을 선택한 위상 최적화 결과이며, 그림 7은 본 연구에서 제시한 체스판무늬 방지책을 이용하고, 벌칙인자 $n=3$ 을 선택한 결과이다.

그림 6과 그림 7에서 체스판무늬가 사라지고, 구조물의 경계가 매끄러운 것을 알 수 있다. 그리고, 그림 7의 결과는 Sigmund가 위상 최적화기법으로는 밀도함수법을 이용하고 체스판무늬 방지책으로는 화상처리기법을 이용한 결과¹⁾와 동일하다.

3. 3 양 끝에 분포하중을 받는 구조물

본 예제는 그림 8과 같이 정사각형 구조물의 왼쪽에 크기가 1035N의 분포하중 및 오른쪽 중

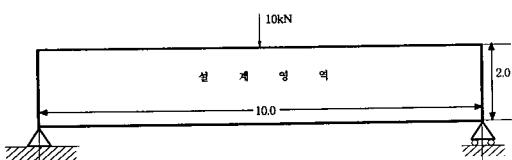


그림 5 중앙에 집중하중을 받는 단순 지지보

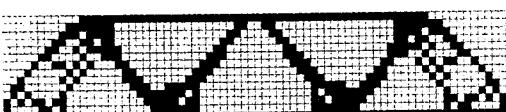


그림 6 단순 지지보의 위상 최적설계
(체스판무늬 방지책을 사용하지 않은 경우)

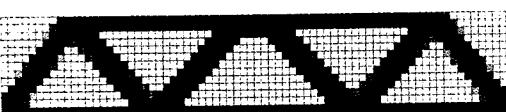


그림 7 단순 지지보의 위상 최적설계
(체스판무늬 방지책을 사용한 경우)

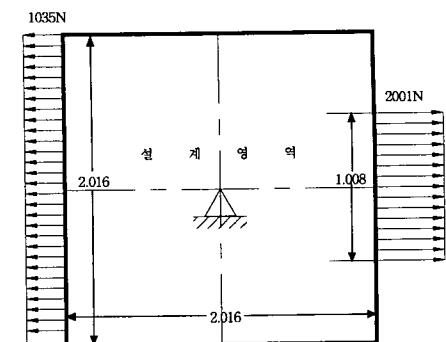


그림 8 양 끝에 분포하중을 받는 정사각형 구조물

앙에 크기가 2001N의 분포하중을 작용시키고, 유한요소 해석의 경계조건으로는 구조물 중앙의 절점에 x축과 y축의 변위를 구속시켰다. 그리고, 요소를 가로방향으로 28개, 세로방향으로 28개로 분할하여 총 요소수는 784개이며, 총 절점의 수는 841개이다. 또한, 위상 최적화의 제약조건으로는 전체 설계영역에서 사용하는 재료의 최대 35%만 이용하도록 하였다.

그림 9는 요소내의 부피분율을 설계변수로 설정하고, 벌칙인자 $n=3$ 을 선택한 위상 최적화 결과이며, 그림 10은 본 연구에서 제시한 체스판무늬 방지책을 이용하고, 벌칙인자 $n=3$ 을 선택한

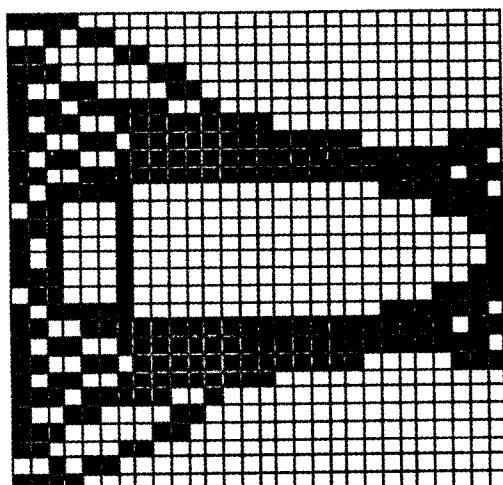


그림 9 정사각형 구조물의 위상 최적설계
(체스판무늬 방지책을 사용하지 않은 경우)

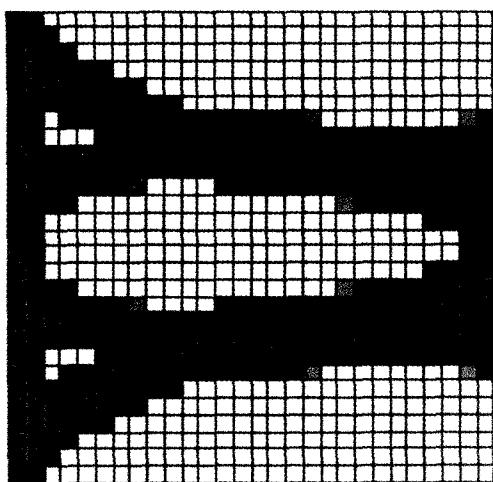


그림 10 정사각형 구조물의 위상 최적설계
(체스판무늬 방지책을 사용한 경우)

결과이다. 그림 9와 그림 10을 비교해 보면 체스판무늬가 완전히 사라지고 경계가 매끄러운 것을 알수 있으며, 그림 10의 결과는 Youn과 Park이 위상 최적화 기법으로 Hashin-Shtrikman의 기법을 이용한 균질재료를 이용하고, 체스판무늬 방지책으로는 밀도 재분배 알고리즘을 이용한 결과³⁾와 동일하다.

4. 결 론

본 연구에서는 일반적인 위상 최적화 문제에서 나타나는 체스판무늬를 방지하고, 최적화 알고리즘의 안정성에 영향을 미치지 않는 기법을 먼저 설계변수로 각 요소를 구성하는 절점들의 부피분율로 선정하고, 요소내의 부피분율을 절점의 부피분율로 표현하기 위하여 선형 보간함수로 형상 함수를 선정하여 개발하였다. 그리고, 개발한 기법을 기지재와 미시구멍으로 구성된 복합재료를 균질화시킨 재료와 결합하여 여러 가지의 수치예제를 해석하였다. 수치예제의 해석결과는 체스판무늬 방지책으로 화상처리기법과 밀도 재분배 알고리즘을 이용한 결과와 동일하였다. 따라서, 일반적인 최적화 알고리즘에 본 연구에서 제시한 체스판무늬 방지기법을 적용하여 위상 최적화 문

제를 해석함으로써 체스판무늬가 효율적으로 억제되고, 경계가 매끄러운 형상을 얻을 수 있을것으로 판단된다.

참 고 문 헌

- Ole Sigmund, "Design of Material Structures Using Topology Optimization", Ph.D. Thesis, Technical University of Denmark, 1994, pp.118
- C. S. Jog, R. B. Haber and M .P .Bendsoe, *Topology Design of Structures*, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1993, pp. 219~238
- S. K. Youn and S. H. Park, "A Study on The Shape Extraction Process in The Structural Topology Optimization Using Homogenized Material", *Computers & Structures*, Vol. 62, No. 3, 1997, pp.527~538
- L. V. Berlyand and S. M. Kozlov, "Asymptotics of Homogenized Moduli for The Elastic Chess Board Composite", *Arch.Rational Mech. Anal.*, 118, 1992, pp.95~112
- E. C. N. Silva, J. S. O. Fonsca and N. Kikuchi, "Optimal Design of Periodic Piezo composites", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.159, 1998, pp. 49~77
- O. K. Lim, "An RQP Algorithm with Active Set Strategy for Optimum Design", Ph.D. Thesis, The University of Iowa, 1985, pp. 192
- J. S. Arora, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill, New York, 1989, pp. 625
- T. Mori and K. Tanaka, "Average Stress in Matrix and Average Energy of Materials with Misfitting Inclusions", *Acta Metall.*, Vol.21, 1973, pp.571~574
- J. D. Eshelby, The Determination of The Elastic Field of An Ellipsoidal Inclusion,

- and Related Problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376~396
10. 임오강, 이진식, 균질재료와 벌침인자를 이용한 위상 최적설계, 가을 학술발표회, 한국전산구조공학회, 제11권 제2집, 1998, pp.3~10
11. M. P. Bendsoe and N. Kikuchi, "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using A Homogenization Method", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.106, 1993, pp.1~26
- Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.71, 1988, pp. 197~224
12. H.P.Mlejnek and R.Schirrmacher, "An Engineer's Approach to Optimal Material Distribution and Shape Finding", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.106, 1993, pp.1~26

(접수일자 : 1998. 12. 17)