

갤러킨 정식화를 사용한 무요소법의 구성과 그 특성

Formulation and Characteristics of the Element Free Galerkin Method

석 병 호*
Seog, Byung-Ho

임 장 근**
Lim, Jang-Keun

요 지

최근 요소망의 구성없이 공학적인 문제의 해석이 가능한 무요소법이 많은 학자들에 의하여 제안되고 이에 관한 집중적인 연구가 이루어지고 있다. 본 연구에서는 갤러킨 정식화에 의한 무요소법을 고체역학적인 문제에 적용하여 이의 특성을 규명하고자 하였다. 특히 일반적으로 사용되고 있는 몇가지 가중 함수를 선정하여 이들이 해석결과에 미치는 특성과 절점 배치방법 및 가중 함수의 영향 영역 변화에 따른 해의 정확도 등을 서로 비교하고 검토하였다. 연구결과로 가중 함수의 형태와 영향 영역의 크기, 기저 함수의 차수와 절점 배치 방법 등은 서로 상관관계를 갖고 해의 정확도에 크게 영향을 미침을 확인할 수 있었고 이의 적절한 선정은 무요소해석의 중요한 요건임을 알 수 있었다.

핵심용어 : 무요소법, 갤러킨 정식화를 사용한 무요소법, 이동 최소 차승법, 가중함수, 영향영역

Abstract

For the effective analysis of an engineering problem, meshless methods which require only positioning finite points without the element construction recently have been proposed and being studied extensively. In this paper, the element free Galerkin method which has been suggested by Belytschko, etc. is applied for the linear elastic analysis of solid problems and its convergence characteristics and stability are shown according to the weight function, influence domain, basis function order and the scattered points. As a result, it is found that the weight function and its influence domain have a great effect on the solution stability but the basis function order and point scattering method not significantly.

Keywords : meshless method, element free galerkin method(EFGM), moving least square method, weight function, domain of influence

1. 서 론

공학적인 문제의 해결을 위한 효과적인 도구로

널리 쓰이는 유한 요소법은 재료 자체의 변형이 매우 큰 대변형 문제나 소성 문제에서 요소 형상에 따른 오차가 크게 발생하여 신뢰성 있는 결과

* 한양대학교 대학원, 박사과정
** 정회원·한양대학교 기계공학부, 교수

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

를 얻기가 어렵다. 이런 단점을 해결하기 위하여 최근에 해석 영역에 대한 요소의 분할과 구성을 하지 않고 적절한 절점의 배치만으로 해석이 가능한 무요소법(meshless method)이 제안되어 이에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있다.

무요소법으로는 천문학적 문제의 해법을 위해서 SPH(smooth particle hydrodynamics) 방법^{1),2)}이 처음으로 사용된 이래, 이동 최소 자승법(moving least square method)을 도입한 DEM(diffuse element method)³⁾이 제안되었다. 이동 최소 자승법에 변위 경계치 문제를 라그랑지 승수법(Lagrange multiplier method)으로 처리하고 적분 방법을 개선한 EFGM(element free Galerkin method)⁴⁾이 Belytschko 등에 의해 제안되었다. 이 후 변위 경계치 문제의 처리를 위한 직접 변환법⁵⁾ 및 유한 요소와 혼용하는 혼용법^{6),7)}등이 제안되었고, 다양한 분야의 문제에 적용한 많은 연구 결과^{8)~11)}들이 발표되고 있다. 특히 EFGM을 균열 문제에 적용하여 정확하고 효율적으로 해석을 수행한 연구 결과^{12),18)}들이 발표되고 있으며 무요소법의 변위 경계치 문제의 처리를 위한 연구^{13),14)}도 활발히 진행되고 있다. 국내에서는 무요소법의 한 방법인 RKPM(reproducing kernel particle method)에 의한 대변형 초탄성 연구^{15),16)}가 최근에 발표되고 있다. 무요소법의 연구 결과에 따르면 정확도와 편리함이 입증되고 있으며, 특히 대변형 및 소성 문제에서 기존의 유한 요소법의 단점을 극복할 효과적인 방법임이 증명되고 있다.

본 연구에서는 EFGM을 고체 역학적 문제에 적용하여 이의 특성을 파악하고, 가중 함수 및 적분 영역에 따른 영향을 규명하고자 한다.

2. EFGM의 정식화

2.1 이동 최소 자승법에 의한 근사법

영역 Ω 에서의 임의 함수 $u(x)$ 의 이동 최소 자승법(moving least square method)에 의한 근사 함수(approximants) $u^h(x)$ 는 다음의 식으로 나타낼 수 있다⁴⁾.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

이때 $p_j(\mathbf{x})$ 는 공간 좌표계 $\mathbf{x}^T = [x, y, z]$ 의 단항식들로 구성된 기저 함수(basis function)이고 완전 다항식이 되도록 항수 m 을 선정한다. 예를 들면 1차원에서의 일차 기저(linear basis), 이차 기저(quadratic basis)와 삼차 기저(cubic basis)는 각각 아래와 같으며

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) &= [1, x], & m &= 2 \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, x^2], & m &= 3 \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, x^2, x^3], & m &= 4 \end{aligned} \quad (2)$$

2차원에서의 일차 기저, 이차 기저 및 삼차 기저는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y], & m &= 3 \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y, x^2, xy, y^2], & m &= 6 \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3], & m &= 10 \end{aligned} \quad (3)$$

식(1)의 계수 $a_j(\mathbf{x})$ 는 공간 좌표 \mathbf{x} 의 함수이고 오차의 L_2 크기(norm)에 가중 함수(weight function)를 곱하여 다음과 같이 정의하고 이를 최소화시켜 구할 수 있다.

$$J = \sum_i^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2 \quad (4)$$

이때 n 은 가중 함수 $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \neq 0$ 인 영향 영역(domain of influence) 또는 영향 원(circle of influence)이라 호칭하는 위치 \mathbf{x} 근방의 절점 개수를 나타내고, u_i 는 절점 위치 \mathbf{x}_i 에서의 함수 u 의 절점값을 나타낸다.

식(4)를 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 에 대하여 변분을 취하면 다음의 선형 방정식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (5)$$

식 (5)에서 각각의 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_I^n w_I(\mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \quad (6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (7)$$

$$w_I(\mathbf{x}) \equiv w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad (8)$$

$$\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_n] \quad (9)$$

식 (5)에서 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 를 구하고 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u^h(\mathbf{x}) &= \sum_I^n \sum_J^m p_J(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}))_{JI} u_I \\ &= \sum_I^n \Phi_I(\mathbf{x}) u_I \end{aligned} \quad (10)$$

따라서 형상 함수와 형상 함수의 편도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^m p_J(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}))_{JI} \quad (11)$$

$$\Phi_{I,i} = \sum_J^m \{ p_{J,i} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{JI} + p_J (\mathbf{A}_{,i}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,i})_{JI} \} \quad (12)$$

$$\mathbf{A}_{,i}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,i} \mathbf{A}^{-1} \quad (13)$$

이들 식에서, i 는 독립변수 x_i 에 의한 미분을 의미하고 이때 구한 형상 함수는 유한 요소법과는 달리 다음과 같이 Kronecker delta 조건을 만족시키지 못한다.

$$\Phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ} \quad (14)$$

이로써 보간 함수라는 용어 대신 형상 함수로 정의되며 식 (10)에서 $u^h(\mathbf{x}_I) \neq u_I$ 로 I 번째 절점에서의 근사값은 절점 I 의 영향 영역 안의 모든 절점 값의 영향을 받아 이들에 종속되고 있음을 알 수

있다. 위의 특성 때문에 유한 요소법에서와 같은 변위 경계조건의 처리 방법이 불가능하며 이의 해결을 위한 다양한 방법이 제안되었다. 본 논문에서는 라그랑지 승수법(Lagrange multiplier method)⁴⁾을 이용한 방법을 채택하였다.

2.2 가중 함수

식 (8)의 가중 함수는 절점 사이의 거리에 대한 함수로 다음과 같이 표현된다.

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = w_I(d) \quad (15)$$

$$d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \quad (16)$$

가중 함수는 매끄러운(smooth) 것이 바람직하며 가중 함수가 C^1 연속 조건일때 형상 함수 또한 C^1 연속 조건으로 연속 조건이 가중 함수에 종속됨을 알 수 있다. 이와 같은 가중 함수 때문에 일차 기저의 사용만으로도 연속이고 매끄러운 근사값을 얻을 수 있으며 이의 선정이 해의 정확도에 매우 중요함을 예측할 수 있다. 현재 많이 사용되는 가중 함수는 다음과 같다¹⁷⁾.

(1) 지수형 가중 함수(exponential weight function) :

$$w(\bar{d}) = \begin{cases} e^{-\bar{d}/0.4\bar{d}^2}, & \bar{d} \leq 1 \\ 0, & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (17)$$

(2) 원추형 가중 함수(conical weight function) :

$$w(\bar{d}) = \begin{cases} 1 - \bar{d}^2, & \bar{d} \leq 1 \\ 0, & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (18)$$

(3) 삼차 스플라인 가중 함수(cubic spline weight function) :

$$w(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3, & \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3, & \frac{1}{2} < \bar{d} \leq 1 \\ 0, & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (19)$$

(4) 사차 스플라인 가중 함수 (quartic spline weight function) :

$$w(\bar{d}) = \begin{cases} 1 - 6\bar{d}^2 + 8\bar{d}^3 - 3\bar{d}^4, & \bar{d} \leq 1 \\ 0, & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (20)$$

이때 $\bar{d} = d/d_{max}$ 이며 d_{max} 는 영향 영역 반경의 최대 크기를 나타내고, 기저 차수를 충족시키는 만큼의 절점수를 포함하는 영역으로 절점 배치 상태에 따라 각 절점의 영향 영역이 변화하도록 절점에서 첫번째 가까운 점과의 거리인 d_m 에 수정 계수 c_f 를 곱하여 다음과 같이 정의한다.

$$d_{max} = c_f d_m \quad (21)$$

위의 식 (17) ~ (20)로 표현한 가중 함수를 같은 크기의 영향 영역에 대하여 그림으로 비교하여 보면 Fig. 1과 같다. Fig. 1에서 가중 함수는 공통적으로 연속이며 매끄러운 모양이고 동일 절점 위치에서도 사용하는 가중 함수에 따라 그 값이 달라서 결국에는 해의 정확도에도 차이가 발생함을 유추해 볼 수 있다.

3. 갤러킨 정식화

탄성체에서 경계 Γ 를 갖는 해석 영역 Ω 의 지배 방정식과 경계 조건은 다음과 같다.

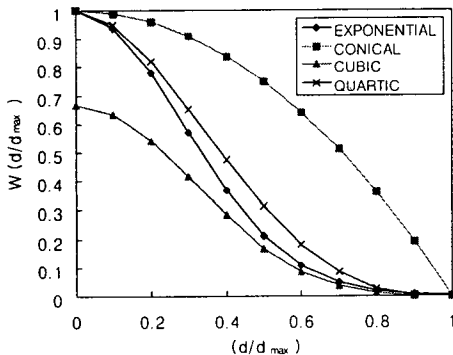


Fig. 1 Weight functions over the same influence domain

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b} = 0 \text{ in } \Omega \quad (22)$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (23)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (24)$$

이들 식에서 σ 는 응력 텐서이며, \mathbf{u} 와 \mathbf{b} 는 각각 변위 및 체력 벡터이며 \mathbf{n} 은 경계면의 외향 수직 단위벡터를 나타낸다. 위의 식에서 변위 경계 조건을 만족하도록 라그랑지 승수를 도입하여 전체 위치에너지를 수정하고 이에 변분을 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta (\nabla_s \mathbf{u}^T) : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u}^T \cdot \lambda d\Gamma = 0 \\ \forall \delta \mathbf{u} \in H^1, \delta \lambda \in H^0 \end{aligned} \quad (25)$$

식 (25)에서 λ 는 라그랑지 승수이고 이를 다음과 같이 절점치로써 보간한다.

$$\lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_I(s) \lambda_I, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (26)$$

이때 $\mathbf{N}_I(s)$ 는 라그랑지 보간 함수이며 s 는 경계면에서 취한 좌표계를 나타낸다. (25)식을 약형 (weak form)으로 정리하고 이산화 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

식 (27)에서 각각의 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega \quad (28)$$

$$\mathbf{G}_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \Phi_I N_K d\Gamma \quad (29)$$

$$\mathbf{f}_i = \int_{r_i} \Phi_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_i \mathbf{b} d\Omega \quad (30)$$

$$\mathbf{q}_\kappa = - \int_{r_u} N_\kappa \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (31)$$

이산화 방정식의 적분을 위하여 전체 영역에 절점과 무관한 적분칸(cell)이 구성되며 적분칸 내의 적분점에서 수치 적분을 수행하게 된다.

4. 수치 예제 및 검토

본 논문의 수치 예제에서는 일차원, 이차원 문제에서 기저 차수(basis order)와 가중 함수의 변화에 따른 영향을 파악하고 이차원의 인장 하중을 받는 구멍을 갖는 무한 평판 및 균열 해석에 적용하여 해의 정확도 및 유용성을 검토하고자 한다.

4.1 일차원 문제

Fig. 2와 같이 체력(body force)이 선형적으로 작용하는 경우 Fig. 3과 같은 세가지 절점 배치 방법에 대하여 기저 차수(basis order)와 식(17)~(20)로 표현한 가중 함수를 변화시켰고 이때

식(21)의 수정 계수 C_I 를 변화시켜 영향 영역 d_{max} 를 넓히면서 해석을 행하였다. 해석의 결과로 얻은 선단의 최대변위를 엄밀해로 정규화하여 이를 도표로 나타내면 다음의 Tables 1~3과 같다.

이들 표에서 지수형 가중 함수와 삼차 스플라인 가중 함수가 각 절점 배치방법에 대하여 기저 차수(basis order)와 영향 영역의 변화에 관계없이 비교적 안정적인 결과를 나타내고 있음을 알 수 있고, 이차 기저(quadratic basis)나 삼차 기저(cubic basis)와 같이 기저 함수의 차수가 높아지면 가중 함수의 영향 영역을 크게 잡아야 한다. 또한 기저 함수의 차수를 높게 잡는 것이 해

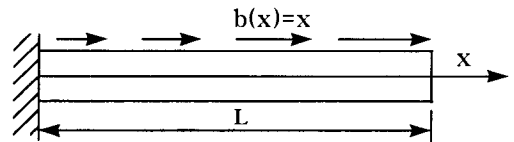


Fig. 2 One-dimensional problem

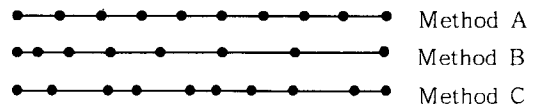


Fig. 3 Some types of node arrangement for the one-dimensional problem

Table 1 Displacement ratio at end node using node arrangement A

Basis	Weight Function	C_I						
		1.1	1.6	2.1	2.6	3.1	3.6	4.1
Linear	Exponential	0.998	0.998	0.998	0.997	0.998	0.999	1.005
	Conical	0.998	0.995	1.075	1.708	4.417	23.857	1.011
	Cubic Spline	0.998	0.998	0.997	0.997	1.003	1.031	1.077
	Quartic Spline	0.998	6.006	4.761	20.181	305.020	6.806	936.099
Quadratic	Exponential	-	-	0.999	0.997	0.998	1.001	1.008
	Conical	-	-	1.081	1.766	1.290	6.150	32.564
	Cubic Spline	-	-	0.999	0.998	1.003	1.015	1.0756
	Quartic Spline	-	-	1.056	248.371	132.850	3702.17	1459082.
Cubic	Exponential	-	-	-	-	0.999	1.006	1.013
	Conical	-	-	-	-	29.010	27.234	1.237
	Cubic Spline	-	-	-	-	1.000	1.004	1.481
	Quartic Spline	-	-	-	-	186.114	3.069	179.964

Table 2 Displacement ratio at end node using node arrangement B

Basis	Weight Function	C_f						
		1.1	1.6	2.1	2.6	3.1	3.6	4.1
Linear	Exponential	0.997	0.992	0.990	0.993	0.996	1.032	2.823
	Conical	1.013	24178.8	151.778	10.982	1.722	3.178	3.163
	Cubic Spline	0.996	0.987	0.992	0.997	1.057	34.109	27.057
	Quartic Spline	1.054	17.897	20291.83	5.509	6.128	83.174	4.174
Quadratic	Exponential	-	-	0.999	0.996	0.998	1.007	1.252
	Conical	-	-	1.199	2.867	27.593	1.783	94.091
	Cubic Spline	-	-	1.001	0.997	1.004	1.210	14.787
	Quartic Spline	-	-	16.806	3.952	70.233	38.239	24.143
Cubic	Exponential	-	-	-	-	1.008	1.009	1.173
	Conical	-	-	-	-	518.698	1.241	1059.03
	Cubic Spline	-	-	-	-	1.012	1.017	1.022
	Quartic Spline	-	-	-	-	-	19.245	3.378

Table 3 Displacement ratio at end node using node arrangement C

Basis	Weight Function	C_f						
		1.1	1.6	2.1	2.6	3.1	3.6	4.1
Linear	Exponential	1.003	1.008	1.000	0.995	0.994	0.999	1.002
	Conical	1.701	15.375	1.418	1.094	244.209	2.897	2.946
	Cubic Spline	1.002	1.024	1.001	0.996	1.006	3.302	1.102
	Quartic Spline	1.003	4.395	372.658	2.064	562.915	425.159	253.319
Quadratic	Exponential	-	-	1.023	1.001	1.000	1.012	1.011
	Conical	-	-	1.184	3.201	2.295	1.093	1.348
	Cubic Spline	-	-	1.050	1.010	1.018	1.091	1.153
	Quartic Spline	-	-	2.063	110.306	15.874	679.478	6.013
Cubic	Exponential	-	-	-	-	0.998	1.023	1.069
	Conical	-	-	-	-	2.613	7.254	23.998
	Cubic Spline	-	-	-	-	1.014	2.415	16.222
	Quartic Spline	-	-	-	-	7.573	10.623	14.977

석결과의 정확도에 기여하지 못하고 오히려 안정성을 저해함⁴⁾을 알 수 있다.

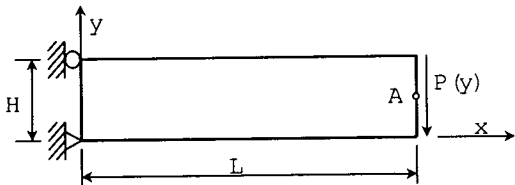
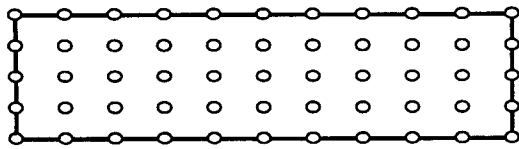


Fig. 4 Cantilever beam under end traction

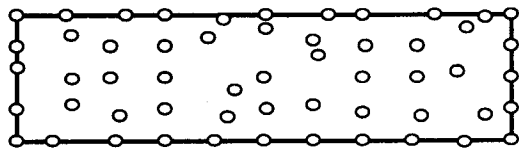
4.2 이차원 문제

4.2.1 외팔보 문제

평면 변형을 상태로 A점에서의 처짐을 Fig. 5의 절점 배치방법에 대하여 일차원과 같이 기저



(a) Regular node arrangement



(b) Irregular node arrangement

Fig. 5 Node arrangement for cantilever beam

차수와 식 (17) ~ (20)로 표현한 가중 함수를 변화시키면서 해석을 수행하였고 이 때 영향 영역 d_{max} 는 d_m 을 첫번째 가까운 점으로 고정하고 수

정 계수 c_j 만을 변화시켰다. 적분은 x, y 각 방향으로 각각 10등분, 4등분한 적분칸을 사용하였으며 적분점은 각 방향에 대해 4개를 사용하였다. 그 결과를 엄밀해로 정규화하면 다음의 Table 4와 같다.

Table 4에서 지수형 가중함수, 원추형 가중함수 그리고 사차 스플라인 가중함수를 사용한 경우 각 기저 차수에서 절점의 배치상태, 영향 영역에 관계없이 해가 안정함을 알 수 있었고 이차 기저 (quadratic basis)와 삼차 기저 (cubic basis)를 사용하는 해석에서는 그 기저의 고차화에 따라 일차 기저 (linear basis)에 대하여 비교적 가중 함수의 영향 영역이 넓어질 때 정확한 해가 산출됨을 보여주고 있다.

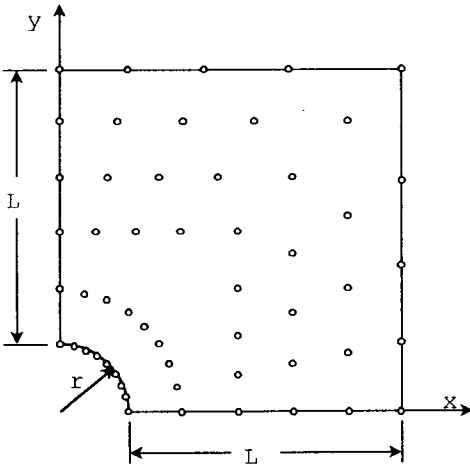
4. 2. 2 구멍을 갖는 무한 평판 문제

x 방향의 인장 응력(σ_∞)을 받는 무한 평판에 구멍이 존재하는 경우의 해석으로 역시 식 (17)

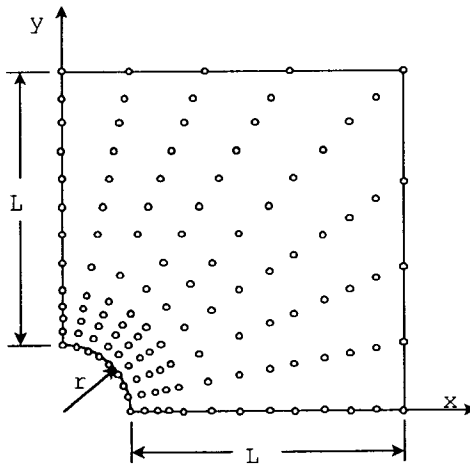
Table 4 Tip deflection ratio at point A

Basis	C_j	Exponential		Conical		Cubic Spline		Quartic Spline	
		Regular	Irregular	Regular	Irregular	Regular	Irregular	Regular	Irregular
Linear	2	-	-	-	-	-	-	-	-
	4	0.841	0.693	1.094	0.762	1.209	0.781	0.839	0.715
	6	0.992	0.936	0.828	0.839	1.906	2.002	0.999	0.962
	8	1.012	0.994	0.792	0.888	2.992	4.292	1.007	0.989
	10	1.018	1.015	0.853	1.061	5.182	6.335	1.010	1.003
	12	1.017	1.018	0.782	0.998	7.049	9.666	1.011	1.005
Quadratic	2	-	-	-	-	-	-	-	-
	4	0.000	-	0.000	-	0.000	-	0.000	-
	6	0.000	1.007	0.000	1.043	0.000	1.148	0.000	1.008
	8	1.012	1.009	1.038	1.041	1.059	1.394	1.011	1.008
	10	1.012	1.011	0.981	1.007	1.054	1.802	1.011	1.010
	12	1.012	1.019	0.979	1.039	1.061	2.343	1.011	1.010
Cubic	2	-	-	-	-	-	-	-	-
	4	0.000	-	0.000	-	0.000	-	0.000	-
	6	0.000	1.041	0.000	1.099	0.000	1.063	0.000	1.051
	8	0.000	1.014	0.000	1.063	0.000	1.133	0.000	1.015
	10	1.012	1.013	1.011	1.049	1.191	1.246	1.011	1.012
	12	1.012	1.024	1.014	1.082	1.212	1.419	1.011	1.013

의 지수형 가중 함수를 사용하고 d_{max} 는 d_m 을 첫 번째 가까운 점, $c_r=3.4$ 의 값을 가질 때 y 축을 따라 나타나는 x 방향 응력 상태를 해석하였고 그 결과는 Fig. 7과 같다. 해석 결과로부터 절점 수의 증가로 응력 집중부의 집중 현상을 잘 표현하고 전체적인 응력 분포 또한 정확해짐⁴⁾을 알 수 있었다. 적분은 절점을 기준한 적분칸을 사용하였고 각 방향 4개의 적분점을 사용하였다.



(a) Node arrangement using 54 points



(b) Node arrangement using 121 points

Fig. 6 Node arrangement for an infinite plate with hole

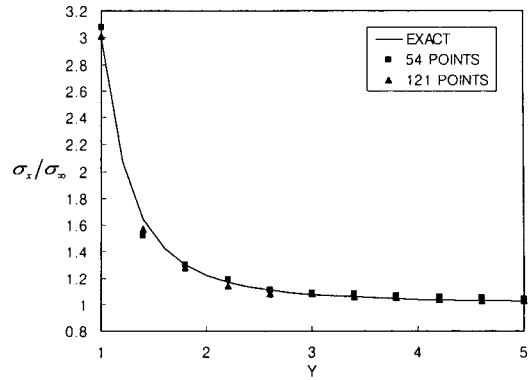


Fig. 7 Comparison the EFG results with the exact solution

4. 2. 3 이차원 균열 문제

Fig. 8과 같은 평판에 균열이 존재하는 경우에 J 적분을 통해 응력 확대 계수를 구하는 해석을 수행하였다. 이 때 해석을 위한 모델은 Fig. 9와 같고 식 (17) ~ (20)로 표현한 가중 함수를 각각 사용하여 해석하였다. 이 때 적분을 위하여 x, y 각방향으로 10개의 적분칸 (cell)을 사용하였으며 보다 정확한 해석을 위하여 균열 선단의 적분칸에서는 일반 적분칸에서 보다 많은 적분점을 사용하였다.

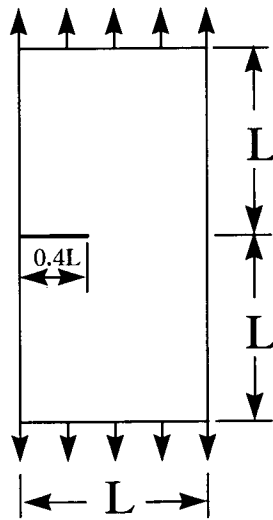


Fig. 8 Plate with an edge crack under uniaxial stress

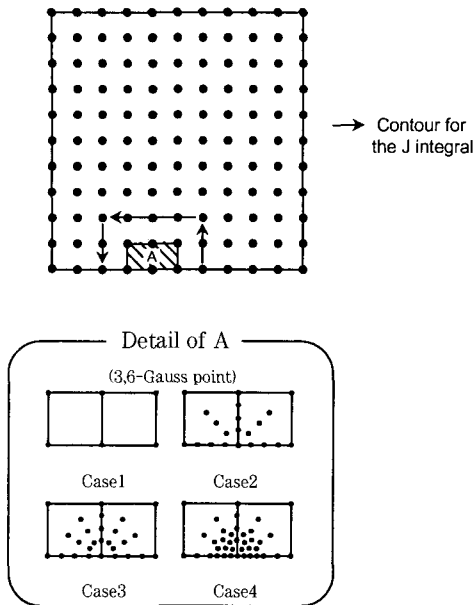


Fig. 9 Node arrangements and J-integral path for the crack problem

해석 모델에서 영향 영역 d_{max} 는 d_m 을 첫번째 가까운 점, $c_f=3.1$ 의 값을 가질 경우의 해석이다. 해석 결과는 Table 5와 같고 일반적으로 각 가중 함수는 절점을 균열 선단에 추가함에 따라 더 정확한 해를 산출함을 알 수 있고 가중 함수는 적용한 영향 영역에 따라 해의 정확도에 차이가 나타남을 알 수 있다. 균열 해석을 통하여 선단에 절점만을 추가함으로써 더 정확한 해를 얻을 수 있는 장점과 편리함^{4),15)}을 발견할 수 있었다.

Table 5 Comparison of EFG results with respect to exact solution

Weight Function	K/K_{EXACT}			
	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
Exponential	0.8831	0.8839	0.8907	0.9509
Conical	0.8837	0.8771	1.0389	1.0391
Cubic Spline	0.8894	1.0056	1.0217	1.1721
Quartic Spline	0.8709	0.8966	0.9060	0.9546

5. 결 론

무요소법인 EFGM을 일차원 및 이차원의 고체 역학적인 문제에 적용하여 해석을 수행하였다. 일차원 문제와 이차원 문제에서 절점 배치, 기저 차수 그리고 가중 함수의 변화에 따른 영향을 검토하였고 이차원의 구멍을 갖는 무한 평판 및 균열 문제에 적용하여 해의 정확도와 효율성을 검토하였다. 연구 결과로 다음의 결론을 얻었다.

- 1) 가중 함수는 영향 영역의 선정에 따라서 해의 정확도와 안정성에 영향을 미치며 지수형 가중 함수가 비교적 안정된 해석 결과를 준다.
- 2) 기저 함수가 고차일수록 가중 함수의 영향 영역은 넓어야 하고 기저 함수의 차수가 해의 정확도에 크게 기여하지 못한다.
- 3) 응력 집중이 크지 않은 일차원 및 이차원 문제에서 절점 배치방법은 해의 정확도에 크게 영향을 주지 않으며 균열 문제와 같이 요소 구성이 어려운 해석에서는 절점만을 추가함으로써 보다 정확한 해를 얻을 수 있다.

감사의 글

본 연구는 1998년도 한국과학재단의 핵심전문 연구과제 (과제번호 : 981-1012-072-2)의 일부로 수행되었으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Lucy, L. B., "A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis," *The Astronomical Journal* 82, 1977, pp.1013 ~ 1024
2. Monaghan, J. J., "Why Particle Methods Work," *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*. 3, 1982, pp.422 ~ 433
3. Nayroles, B., Touzot, G. and Villon P., "Generalizing the Finite Element Method : Diffuse Approximation and Diffuse Eleme-

- nts," *Computational Mechanics* 10, 1992, pp. 307~318
4. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu L., "Element-Free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37, 1994, pp.229~256
 5. Lu, Y. Y., Belytschko, T. and Gu, L., "A New Implementation of the Element-Free Galerkin Method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 113, 1994, pp.397~414
 6. Belytschko, T., Organ, D. J. and Krongauz, Y., "A Coupled Finite Element-Element-Free Galerkin Method," *Computational Mechanics* 17, 1995, pp.186~195
 7. Krongauz, Y. and Belytschko, T., "Enforcement of Essential Boundary Conditions in Meshless Approximations using Finite Elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 131, 1996, pp. 133~145
 8. Krysl, P. and Belytschko, T., "Analysis of Thin Plates by the Element-Free Galerkin Methods," *Computational Mechanics* 17, 1996, pp.26~35
 9. Krysl, P. and Belytschko, T., "Analysis of Thin Shells by the Element-Free Galerkin Methods," *Int. J. Solids and Structures* 33, 1996, pp.3057~3080
 10. Krysl, P. and Belytschko, T., "Element-Free Galerkin Method : Convergence of the Continuous and Discontinuous Shape Functions," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 148, 1996, pp. 257~277
 11. Belytschko, T., Krysl, P. and Krongauz, Y., "A Three Dimensional Explicit Element-Free Galerkin Method," *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 24, 1997, pp.1253~1270
 12. Belytschko, T. and Tabbara, M., "Dynamic Fracture using Element-Free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39, 1996, pp. 923~938
 13. Gosz, J. and Liu W. K., "Admissible Approximations for Essential Boundary Conditions in the Reproducing Kernel Particle Method," *Computational Mechanics* 19, 1996, pp.120~135
 14. Gunther, F. C. and Liu W. K., "Implementation of Boundary Conditions for Meshless Methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, submitted for publication, 1997
 15. 전석기, 정동원, "대변형 초탄성 재료의 해석을 위한 무요소 적용 기법", 대한 정밀 공학회 '97년도 추계 학술 대회 논문집, pp.736~739
 16. 전석기, 정동원, "무요소 해석법에 의한 초탄성 재료의 변형에 관한 연구", 대한 정밀 공학회 '97년도 추계 학술 대회 논문집, pp. 732~735
 17. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., and Krysl, P., "Meshless Methods : An Overview and Recent Developments," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139, 1996, pp.3~47
 18. Fleming, M., "The Element-Free Galerkin Method for Fatigue and Quasi-static Fracture," PhD. Thesis, Northwestern University, 1997

(접수일자 : 1998. 8. 24)