

접촉요소를 사용한 마찰접촉문제의 유한요소해석

Finite Element Analysis of Frictional Contact Problems Using A Contact Element

고 석*
Ko, Seok

임 장 근**
Lim, Jang-keun

요 지

접촉하는 두 물체 사이의 접촉부에서는 국부적인 응력집중현상이 발생하여 기계 구조물의 마멸이나 파손의 직접적인 원인이 된다. 기존의 방법들은 복잡한 수식 처리와 반복 계산 때문에 접촉특성에 따라서 해석하기에 어려움이 많았다. 본 논문에서는 마찰이 있는 접촉문제를 반복계산 없이 효과적으로 해석하기 위해서 선형상보성 접촉조건과 가상일의 원리로부터 접촉요소를 개발하여 이를 사용한 유한요소 해석방법을 제안하였다. 연구결과로 평면 및 곡면 접촉문제나 다물체 접촉문제를 기존의 해석방법에 비해 훨씬 편리하고 정확하게 접촉현상을 규명할 수 있었다.

핵심용어 : 유한요소해석, 접촉요소, 마찰접촉문제, 선형상보성문제

Abstract

Local stress concentrations occurring on the contact surface, the contact phenomenon becomes a direct cause to the wear and failure of mechanical structures. Most of the previous methods for analyzing these frictional contact problems generally require not only the complicated formulation but also many iterative computations. In this paper, the finite element analysis method using the contact elements and the complementary contact conditions was suggested in order to effectively analyze the frictional contact problems without any iterative calculations. Through various numerical test like as the straight, curved and multi-body contact problems, the suggested method comparatively offers the efficient and accurate analysis results.

Keywords : finite element analysis, contact element, frictional contact problem, linear complementary problem

1. 서 론

두 물체가 접촉하게 되면 접촉하는 두 물체 사

이에는 접촉 영역이 형성되고 접촉영역 내에는 접촉력에 의한 국부적인 응력집중현상이 발생하게 된다. 이러한 접촉부의 응력집중현상은 기계

* 한양대학교 대학원, 석사과정

** 정회원·한양대학교 기계공학부, 교수

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

구조물의 마멸이나 파손의 직접적인 원인이 되므로 이 부분의 접촉력과 마찰력에 대한 정확한 평가는 합리적인 기계설계를 위하여 반드시 선행되어야 한다.

이러한 접촉 문제를 해석하기 위해서 여러 가지 해석방법들이 연구되었으며 그 중 가장 일반적인 방법이 접촉상태를 조절하여 반복적으로 해를 찾는 시행오차법이 있으나 이 방법은 반복적인 알고리즘으로 수렴성과 계산시간 및 정확도에 문제가 있다.

이와는 달리 주어진 함수를 최소화함으로써 해를 찾는 수학적 프로그래밍 (mathematical programming, MP)¹⁾법이 있다. MP법에서는 접촉조건을 만족하도록 전체 또는 상보성에너지 (total or complementary energy)를 최소화시키는 문제로 간주한다. 최소화는 MP 문제로 정식화되며 LP (linear programming) 또는 QP (quadratic programming)를 이용함으로써 해를 구할 수 있다²⁾.

접촉영역에서의 힘과 변위 사이의 관계가 벌칙 함수 형태로써 표현될 때 이 방법은 마찰이 있는 접촉문제까지 확대 적용할 수 있으나 벌칙매개변수 (penalty parameters)가 존재하기 때문에 해를 찾는 것이 쉽지 않다.

본 논문에서는 접촉요소³⁾를 사용하여 접촉영역 설정에 따른 반복계산 없이 접촉문제를 해석하는 방법을 제안하고 여러가지 수치예제를 통하여 제안한 방법의 유효성과 정확도를 평가하고자 하였다. 접촉하는 두 물체는 선형탄성체로 가정하고 접촉시 발생하는 변형은 미소변형을 가정하였다. 또한 접촉 영역에서의 마찰 현상은 쿨롱의 마찰법칙을 따른다고 가정하였다.

2. 접촉 조건

Fig. 1과 같이 물체 A가 외력을 받아 물체 B에 접촉하게 되면 두 물체 사이에는 접촉영역 (contact region, S_c)이 형성되고 이 접촉영역에 속한 절점과 접촉이 예상되는 영역에서 두개의 절점들끼리 짝을 지어주어 이를 접촉절점 짝 (contact nodal pair)이라 한다.

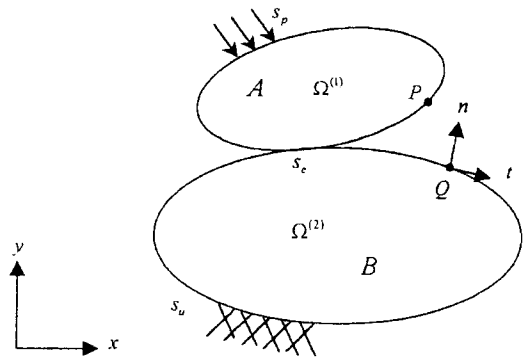


Fig. 1 Two bodies in contact

접촉절점 짝을 이루는 두 절점 사이에는 크기가 같고 방향이 반대인 접촉력과 마찰력이 작용하게 된다.

접촉영역의 크기는 접촉면에서 법선방향으로 압축력이 작용하는 영역의 크기로 결정되고 이때의 법선방향은 피접촉물체의 접촉절점 Q에서 외향 수직방향이 된다.

접촉절점 짝 P-Q의 변위와 접촉력을 $u_c^{(1)}, u_c^{(2)}$ 그리고 $P_c^{(1)}, P_c^{(2)}$ 라 하면 수직상대변위 (normal relative displacement), u_{cn} 와 접선상대변위 (tangential relative displacement), u_{ct} 는

$$u_{cn} = u_{cn}^{(1)} - u_{cn}^{(2)} + g \tag{1.1}$$

$$u_{ct} = u_{ct}^{(1)} - u_{ct}^{(2)} \tag{1.2}$$

으로 나타낼 수 있으며, 여기서 g 는 P-Q사이의 초기간극이다.

P-Q사이에 일어나는 접촉력, P_{cn} 과 접선력, P_{ct} 은

$$P_{cn} = -P_{cn}^{(1)} = P_{cn}^{(2)} \tag{2.1}$$

$$P_{ct} = -P_{ct}^{(1)} = P_{ct}^{(2)} \tag{2.2}$$

으로 나타 낼 수 있다.

여기서 접촉력은 접촉이 발생하면 압축력이 되며 접촉이 발생하지 않으면 그 크기는 0이 되므로 다음 조건을 만족한다.

$$p_{cn} \leq 0 \quad (3)$$

마찰이 작용하는 마찰접촉의 경우에 쿨롱의 마찰법칙(Coulomb's friction law)은 다음과 같이 표현된다.

$$f_r = -\mu p_{cn} \quad (4)$$

단, f_r 은 마찰력이고 μ 는 정지마찰계수를 나타낸다.

접촉이 일어나는 접촉절점 쪽에서 접선력이 마찰력보다 작다면 이 접촉절점 쪽은 고착접촉(sticking contact)을 하고 접선력이 마찰력보다 크면 이 접촉절점 쪽은 미끄럼접촉(sliding contact)이 생긴다. 이 관계는

$$|p_{ct}| \leq f_r \rightarrow u_{ct} = 0 \quad (5)$$

$$|p_{ct}| > f_r \rightarrow |p_{ct}| = f_r \rightarrow |u_{ct}| > 0 \quad (6)$$

으로 나타낼 수 있다.

식 (5), (6)의 접선력과 접선상대변위의 조건에서 부등호를 제거하기 위하여

$$f_1 = p_{ct} + f_r \leq 0 \quad (7)$$

$$f_2 = -p_{ct} + f_r \leq 0 \quad (8)$$

로 정의하고 접선강성계수 E_t 를 도입하면 접선력과 접선상대변위 사이에 다음 관계식을 정의할 수 있다.

$$p_{ct} = E_t(u_{ct} - \lambda_t + \lambda_b) \quad (9)$$

단, 식 (9)에서 λ_t 과 λ_b 는 $f_1=0$, $f_2=0$ 이 될 때 미끄럼변위를 의미한다.

한편, 접촉력이 0이 되면 그 접촉절점 쪽에서는 접촉이 일어나지 않으며 접촉력이 압축력이 될 때 접촉을 하게 된다. 이 조건은

$$p_{cn} = 0 \rightarrow u_{cn} > 0 \quad (10)$$

$$p_{cn} < 0 \rightarrow u_{cn} = 0 \quad (11)$$

과 같이 표현할 수 있다.

식 (10), (11)의 관계를 하나의 식으로 표현하기 위하여

$$f_3 = p_{cn} \quad (12)$$

으로 놓고 수직강성계수 E_n 를 도입하여 접촉력과 수직상대변위 사이의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p_{cn} = E_n(u_{cn} - \lambda_s) \quad (13)$$

단, 식 (13)에서 λ_s 는 접촉절점 쪽이 서로 떨어질 때, 즉 $f_3=0$ 이 될 경우에 수직상대변위의 의미를 갖는다. 식 (7), (8), (9)와 식 (12), (13)을 행렬형태로 표현하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\{p_c\} = [D_c]\{u_c\} - [C]\{\lambda\} \quad (14)$$

$$\{f\} + \{\nu\} = 0 \quad (15)$$

$$\{\nu\}^T \{\lambda\} = 0, \{\nu\}, \{\lambda\} \geq 0 \quad (16)$$

단, 식 (15), (16)에서 $\{\nu\}$ 는 이완변수(slack variable) 벡터를 의미하고 $[D_c]$, $[C]$ 는 다음과 같이 표현되는 강성계수 및 상수행렬이다.

$$[D_c] = \begin{bmatrix} E_t & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

3. 접촉요소

앞 절에서 기술한 접촉조건을 효과적으로 구현하기 위하여 Fig. 2와 같이 4절점 접촉요소(contact element)를 도입한다. 이 접촉요소 내에서 상대변위벡터 $\{u_c\}$ 는 절점변위벡터 $\{d\}$ 와 초기간

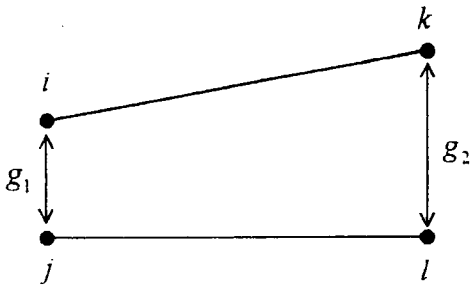


Fig. 2 4-node contact element with initial nodal gaps

극벡터 $\{g\}$ 로써 그리고 미끄럼변위벡터 $\{\lambda\}$ 는 절점치벡터 $\{\bar{\lambda}\}$ 로써 다음과 같이 보간하여 표현할 수 있다.

$$\{u_c\} = [N_c]\{d\} + [N_g]\{g\} \quad (18)$$

$$\{\lambda\} = [N_\lambda]\{\bar{\lambda}\} \quad (19)$$

단, $[N_c]$, $[N_g]$, $[N_\lambda]$ 는 보간함수행렬로써 다음과 같이 표현된다.

$$[N_c] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & -N_1 & 0 & N_2 & 0 & -N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & -N_1 & 0 & N_2 & 0 & -N_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[N_g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N_1 & N_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[N_\lambda] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (23)$$

한편, 접촉요소에서 접촉력에 따른 가상일은

$$\delta W_c^e = \int_{s_c^e} \delta\{u_c\}^T \{p_c\} ds \quad (24)$$

로 표현되고 이 식에 식 (14)를 대입하고 정리하면

$$\begin{aligned} \delta W_c^e = & \int_{s_c^e} \delta\{u_c\}^T [D_c] \{u_c\} ds \\ & - \int_{s_c^e} \delta\{u_c\}^T [D_c] [C] \{\lambda\} ds \end{aligned} \quad (25)$$

가 된다. 식 (25)에 식 (18), (19)를 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\delta W_c^e = \delta\{d\}^T ([K_c]\{d\} + \{f_g\} - [s_L]\{\bar{\lambda}\}) \quad (26)$$

단,

$$[K_c] = \int_{s_c^e} [N_c]^T [D_c] [N_c] ds \quad (27)$$

$$\{f_g\} = \int_{s_c^e} [N_c]^T [D_c] [N_g] ds \{g\} \quad (28)$$

$$[s_L] = \int_{s_c^e} [N_c]^T [D_c] [C] [N_\lambda] ds \quad (29)$$

이다. 식 (27)은 접촉요소의 강성행렬이고 식 (28)은 초기간극에 의한 벡터, 식 (29)는 접촉절점에서 미지의 미끄럼변위벡터 $\{\bar{\lambda}\}$ 의 계수행렬이 된다.

4. 선형상보성 문제와 그 해법

Fig. 1 과 같이 접촉하는 두 물체를 일반 유한요소로 분할하여 요소방정식을 구성하고 접촉영역에서는 접촉요소의 방정식을 구성한다. 이들 요소방정식을 조합하여 계의 방정식을 구성하면 다음과 같이 표현된다.

$$[K]\{d\} = \{F\} + \{S\}\{\bar{\lambda}\} \quad (30)$$

$$[B_s]\{d\} + [B_\lambda]\{\bar{\lambda}\} + [B_g]\{g\} + \{\nu\} = \{0\} \quad (31)$$

$$\{\nu\}^T \{\bar{\lambda}\} = 0, \quad \{\nu\}, \{\bar{\lambda}\} \geq 0 \quad (32)$$

단, $\{d\}$, $\{\nu\}$, $\{\bar{\lambda}\}$ 는 변위, 이완계수, 미끄럼변위의 절점치 벡터를 의미하고 $[K]$ 는 계전체의 강성행렬, $\{F\}$ 는 절점력 벡터, $[S]$ 는 미지 미끄럼변위의 상수계수 행렬이다.

계의 방정식을 선형상보성 문제로 변환하기 위해서 식 (30)으로부터 절점변위 벡터,

$$\{d\} = [K]^{-1}(\{F\} + [S]\{\bar{\lambda}\}) \quad (33)$$

로 표현할 수 있고 식 (33)을 식 (31)에 대입하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\{\nu\} - [M]\{\bar{\lambda}\} = \{q\} \quad (34)$$

단,

$$[M] = -[B_s] - [B_w][K]^{-1}[S] \quad (35)$$

$$\{q\} = -[B_w][K]^{-1}\{F\} - [B_s]\{g\} \quad (36)$$

을 나타낸다. 식 (35)의 $[M]$ 은 반정치행렬 (positive semidefinite matrix) 이기 때문에 해가 좋지 않거나 해를 구하지 못하는 경우가 많다⁴⁾. 이 경우 충분히 작은 안정화 상수 ϵ 을 $[M]$ 의 대각선 항 (diagonal term)에 첨가함으로써 이를 해결할 수 있다.

$$[M_\epsilon] = [M] + \epsilon[I] \quad (0 \leq \epsilon < 1) \quad (37)$$

식 (37)로 식 (34)의 $[M]$ 을 대치하여 대입하고 식 (32)를 다시 써보면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} \{\nu\} - [M_\epsilon]\{\bar{\lambda}\} = \{q\} \\ \{\nu\}^T \{\bar{\lambda}\} = 0, \{\nu\}, \{\bar{\lambda}\} \geq 0 \end{cases} \quad (38)$$

식 (38)과 같은 형태의 선형 상보성 문제 (linear complementarity problem, LCP)를 본 논문에서는 Lemke 알고리즘 (Lemke's algorithm)⁶⁾을 적용하여 이완계수 벡터 $\{\nu\}$ 와 미끄럼변위 벡터 $\{\bar{\lambda}\}$ 를 구하고 식 (33)에 대입하여 절점변위 벡터 $\{d\}$ 를 계산하였다.

각 접촉절점 쪽에서의 $\bar{\lambda}_n$ 는 양의 방향으로의 미끄럼 변위, $\bar{\lambda}_t$ 는 음의 방향으로의 미끄럼 변위를 나타내고 $\bar{\lambda}_s$ 는 수직상대변위를 나타낸다. 또한

각 접촉절점 쪽에서의 ν_1, ν_2 는 접선력과 마찰력과의 차이를 나타냄으로써 고착접촉과 미끄럼접촉 여부를 쉽게 평가할 수 있으며 ν_3 는 접촉력을 나타내므로 접촉력을 다시 계산할 필요가 없다.

5. 수치 계산 및 검토

본 논문에서는 세 개의 수치예제를 해석하고 그 결과를 검토함으로써 제안한 해석방법의 정확도와 유용성을 평가하였다.

5.1 윙클러 기초

Fig. 3은 윙클러 기초 (Winkler foundation) 위에 놓인 탄성평판이 분포하중, p 를 받는 경우로서 대칭성을 고려하여 1/2모델링을 한 그림이다. 평판의 탄성계수와 포아송 비는 각각 $E=1000, \nu=0.3$, 으로 하고 윙클러 기초의 수직강성과 접선강성은 $E_n=E, E_t=10^2E$ 로 각각 가정하였으며 마찰계수 $\mu=0, 1.0$ 에 대하여 수치계산을 수행하였다.

해석결과로 마찰계수 μ 에 대한 각 끝 단에서의 변위는 Fig. 4와 같이 계산되었으며 Zhu 등¹⁾의 결과와 비교하였을 때 왼쪽의 물힘변위는 비

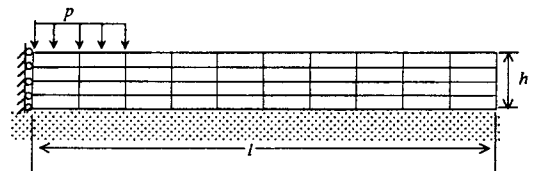


Fig. 3 Slab on Winkler foundation

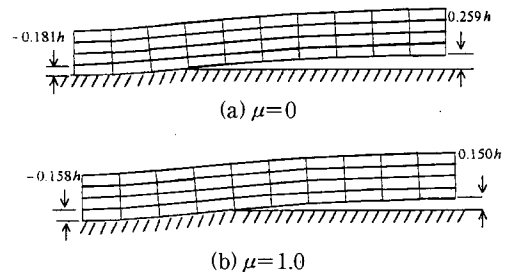


Fig. 4 Deformed shape for slab on Winkler foundation

교적 잘 일치하지만 오른쪽 끝 단에서의 들림변위가 다소 적게 계산된다. 이는 Lemke 해법의 수렴성의 영향으로 생각되며 접촉력에는 Fig. 5와 같이 거의 무관한 결과를 준다.

따라서 Fig. 5와 같이 접촉수직력, 접선력 그리고 접촉영역은 Zhu 등¹⁾의 결과와 잘 일치하고 있는 것을 알 수가 있다.

5.2 탄성 실린더 접촉

본 예제는 전형적인 Hertz 접촉문제로서 Fig. 6과 같이 강체평판 (rigid flat body) 위에 탄성 실린더가 힘을 받고 있는 형태로써 이 실린더가 충분히 길다면 평면변형률 상태로 고려할 수 있다.

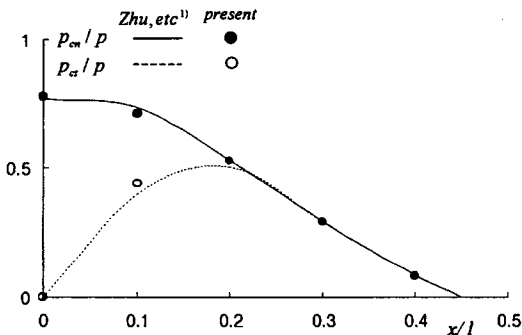


Fig. 5 Contact pressure for slab on Winkler foundation

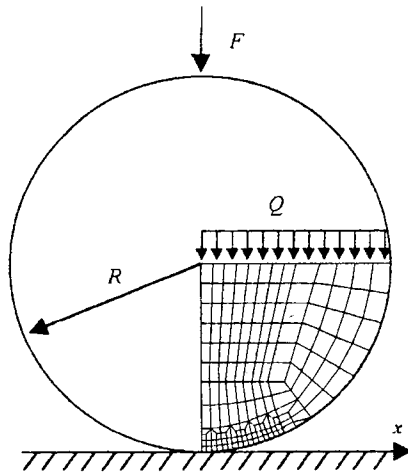
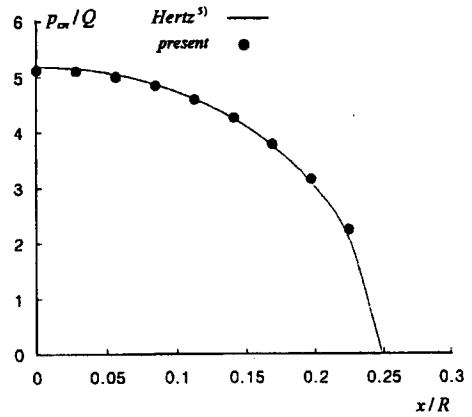


Fig. 6 Contact model of an elastic cylinder

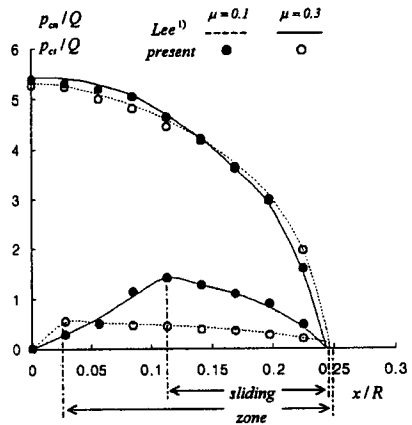
모델링을 단순화하기 위해서 Fig. 6과 같이 1/4모델링을 하였으며 힘 F 는 1/4원에서 분포하중 Q 로써 대체하여 해석을 실시하였다. 또한 $\mu=0, 0.1, 0.3$ 등의 마찰계수 변화에 따른 접촉력, 접선력 그리고 접촉영역의 변화를 평가하였다.

마찰이 없는 경우에는 Fig. 7(a)에서와 같이 Hertz의 실린더 접촉문제의 해⁹⁾와 접촉력 및 접촉영역이 잘 일치하는 것을 볼 수가 있다.

마찰이 존재하는 경우에는 Fig. 7(b)에서와 같이 마찰이 증가함에 따라 마찰력의 저항에 의해서 접촉영역이 줄어드는 것을 알 수가 있으며 이로 인해서 최대 접촉력이 증가하게 된다. 그리고



(a) $\mu=0$



(b) $\mu=0.1, 0.3$

Fig. 7 Contact pressure for the cylinder

마끄럼접촉영역은 마찰력의 저항에 의해서 줄어들고 고착접촉영역이 늘어나는 것을 알 수가 있다.

5.3 겹판 스프링

5개의 겹판으로 구성된 겹판 스프링(leaf spring)이 중심에서 y 방향으로 하중, F 를 받는 경우⁷⁾에 겹판의 대칭성을 고려하여 1/2모델링을 하였고 평면 변형을 상태로 해석을 수행하였다.

Fig. 8은 접촉을 하는 접촉절점 짝 그리고 변형 전과 변형 후의 겹판 스프링을 나타낸 것으로 중심과 끝단에서 절점 짝이 형성되는 것을 볼 수가 있으며 이때 최대 변위, δ_{max} 는 28.9로 근사이론⁷⁾으로 계산한 최대 변위 27.44와 비교하면 5.32%의 오차가 생긴다. 이는 겹판 스프링의 근사 계산식이 접촉을 고려한 유한요소 해석법에 비하여 강성을 과대 평가함을 알 수 있다.

Fig. 9는 중심과 끝단에서의 접촉력을 하중으로 무차원화하여 도시한 것으로 중심부에서는 하판에서 상판으로 갈수록 접촉력이 줄어드는 것을 볼 수가 있고 반대로 끝단에서는 접촉력이 증가하는 것을 알 수 있다.

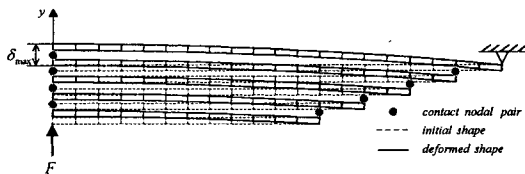


Fig. 8 Contact nodal pairs of the leaf spring under loading

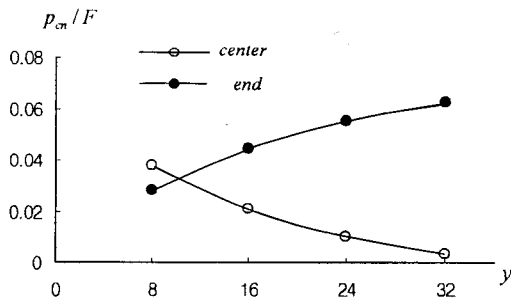


Fig. 9 Contact force for the leaf spring

6. 결 론

마찰이 있는 접촉문제의 효과적인 해석을 위해서 선형상보성 접촉조건과 가상일의 원리로부터 접촉요소를 개발하였으며 이를 사용한 유한요소 해석방법은 기존의 해석방법들이 가지고 있던 프로그래밍의 복잡성과 반복계산과정을 피할 수 있다. 제안한 해석방법의 정확도와 유효성을 검증하기 위하여 세가지 유형의 접촉문제를 해석하고 그 결과를 검토하여 다음 결론을 얻었다.

1) 반정칙 행렬에 안정화 상수를 도입하고 그 크기를 조정함으로써 안정되고 일관성 있는 해석 결과를 얻을 수 있었다.

2) 접촉요소에 초기간극을 도입함으로써 평면 및 곡면 접촉문제를 효과적으로 해석할 수 있었다.

참 고 문 헌

- Zhu, C. and Jin, Y., "The Solution of Frictional Contact Problems Using A Finite Element-Mathematical Programming Method", *Computers & Structures*, Vol. 52, 1994, pp.149~155
- Lee, S. S., "A Computational Method for Frictional Contact Problem Using Finite Element Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering.*, Vol. 37, 1994, pp.217~228
- Sharma, K. G. and Desai, C. S., "Analysis and Implementation of Thin-Layer Element for Interfaces and Joints", *ASCE Journal (EM)*, Vol. 118, No. 12, 1992, pp.2442~2461
- Reklaitis, G. V., Ravindran, A. and Mragdsell, K., *Engineering Optimization, Method and Application*, John Wiley, New York, 1983
- Hills, D. A., Nowell, D. and Sackfield, A., *Mechanics of Elastic Contacts*, Butterworth-Heinemann, 1993
- Lavindran, A., "A Computer Routine for Quadratic and Linear Programming Problems", *Communications of the ACM*, Vol. 15, No. 9, 1972, pp.818~820
- Zahavi, E., *The Finite Element Method in Machine Design*, Prentice Hall, 1992

(접수일자 : 1998. 8. 1)