

탄성-완전소성모델에 의한 평판의 극한내하력 산정

The Ultimate Load Capacity of Plates by Elastic-Perfectly Plastic Model

박진환*
Park, Jin-Hwan

정우성**
Jung, Woo-Sung

우광성***
Woo, Kwang-Sung

요 지

선형탄성이론을 기초로 한 구조해석의 경우 사용하중상태에서의 변형과 응력은 만족할 만한 결과를 나타내지만, 항복후의 처짐과 파괴시의 극한하중 산정의 정확한 해석이 불가능하다. 평판의 극한해석시, 상한계 이론을 바탕으로 한 항복선 이론이 널리 사용되고 있으나 이론적으로 평판의 강도를 과대평가하게 된다. 그러므로, 임의의 하중 조건과 경계조건에 대한 비선형 거동과 극한내하력을 산정할 수 있는 해석기법이 필요하다. 평판의 정확한 극한하중을 위해 p-Version 유한요소법을 제안하며, p-Version의 해석치를 범용 구조해석 프로그램인 ADINA의 결과와 문헌의 이론치와 비교하였다.

핵심용어 : 내하력, 하한계 정리, 상한계 정리, 항복선 이론, 초유한 사상, 혼합사상, 붕괴기구

Abstract

Although a structural analysis based on the linear elastic theory yields good results for deformations and stresses produced by working loads, it fails to assess the deflection and real load-carrying of the plates on the verge of yielding. In case of a limit analysis of plates, the yield line theory is widely used on the basis of the upper bound theorem and theoretically it overestimates the strength of the plate. There is, therefore, a general need for analytical methods of predicting the inelastic behavior and load-carrying capacities of plate subjected to arbitrary loadings and boundary conditions. The p-version of finite element method has been presented for determining the accurate limit load of plates. The numerical results by p-version model compares with the results obtained by the h-version software ADINA, as well as with the available analytical solutions in literatures.

Keywords : load-carrying capacity, lower bound theorem, upper bound theorem, yield-line theory, transfinite mapping, blending mapping, collapse mechanism

1. 서 론

평판구조물의 해석 및 설계는 통상 Kirchhoff

의 고전적 평판이론 또는 전단변형을 고려할 수 있는 Mindlin 평판이론에 근거를 두고 선형탄성 해석에 의존하고 있다. 그러나, 비정형 평판(ir

* 영남대학교 토목공학과, 박사과정

** 한국수자원공사 수자원연구소 구조재료팀, 연구원

*** 정회원, 영남대학교 토목공학과, 교수

• 이 논문에 대한 토론을 1999년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1999년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

regular plate)인 사각(skewness)을 갖는 평판, 개구부(opening)를 갖는 평판, 요형모서리(reentrant corner)를 갖는 손상평판, 노치(notch)나 균열을 갖는 평판 등에는 기하학적 요인에 의해 응력특이(stress singularity)가 발생된다. 이러한 응력특이가 발생하는 응력특이점의 인접 영역은 쉽게 항복에 도달하여 구조시스템을 탄소성거동으로 변환시키게 된다. 또한, 설계하중보다 과도한 하중, 특히 운하중과 같은 집중하중이 발생하는 점에서도 소성영역(plastic zone)이 발생됨을 알 수 있고 연성재료인 경우에는 초기항복 발생 후에도 응력의 재분배(stress redistribution)현상에 의한 내하력의 증가를 기대할 수 있다.

탄소성 거동을 하는 평판은 재료적 비선형(material nonlinearity)에 기인하여 두 가지점에서 선형탄성거동과 차이점을 갖게 된다. 첫째는, 항복점 이후 하중-변위곡선이 비선형이 되므로 선형탄성해석과 달리 상대적으로 큰 처짐을 유발하게 된다. 둘째는, 높은 수준의 하중이 재하되었을 때 평판은 더 이상 탄성거동을 하지 않게되며 초기 항복점을 중심으로 소성역의 전과가 발생되어 마침내 항복선(yield line)을 형성하게 된다. 다시 말하면, 파괴시의 극한하중(limit load) 또는 극한내하력(ultimate load capacity)의 정확한 해석이 가능해야만 보다 신뢰성이 있는 소성설계(plastic design)를 수행할 수 있는 것이다.

현재까지의 이론적 극한해석(limit analysis)은 사각형 평판에 등분포하중이 작용할 경우 하한계 정리(lower bound theorem)와 상한계 정리(upper bound theorem)에 대한 이론이 제시되어 왔다. 그러나, 평판구조물의 설계시 하한계정리에 의하면 다소 과다설계가 우려되며, 상한계정리를 사용할 경우 평판의 강도를 과대평가하여 다소 위험설계가 될 소지가 있다. 또한, 초기항복에서 붕괴(collapse)가 발생될 동안의 처짐값 예측이 사실상 불가능한 단점을 갖고 있다. 그리고 평판 주변의 다양한 경계조건, 임의의 기하형상, 복잡한 하중의 작용시에는 항복선이론(yield line theory)

에 기초를 둔 극한해석의 이론값이 존재하지 않기 때문에 유한요소법과 같은 수치해석법이 대안으로 제시되고 있다. 1960년대 Belytschko, Hodge, Ang^{2),3)} 등에 의해 유한요소법을 이용한 평판구조물의 극한내하력 산정이 최초로 수행되었다. 그 후 많은 연구자들은 전단변형효과를 고려한 평판요소의 개발과 기하학적 비선형성을 고려한 요소를 개발하였다^{1),8),15),17)}. 그러나, 이러한 대부분의 연구는 h-version 유한요소법에 기초를 두고 있으며, 응력특이가 발생하는 문제의 경우 그 특이점을 중심으로 많은 요소를 분포시키는 등 요소의 배치라든지 요소의 선택 등에 주의하여야 하고, 또한 특정 수렴값을 얻기 위해서는 많은 자유도와 해석시간을 요구하고 있다. 이러한 자유도나 해석시간의 문제는 비선형문제일 경우 더욱 중요한 과제로 대두된다.

따라서, 본 연구에서는 응력특이 문제에 상대적으로 적합한 p-version 유한요소법^{12),13)}을 이용하여 평판구조의 탄소성 해석을 하였다. 지금까지의 연구결과에 따르면 p-version 유한요소법은 탄성한도내의 많은 문제에 적용되어 그 우수성이 잘 알려져 있지만 탄소성 분야에서는 아직 연구가 시작 단계라 할 수 있다. 현재까지 조사된 바에 의하면 Holtzer¹⁹⁾, Woo²⁰⁾가 p-version 유한요소법을 이용하여 재료비선형을 고려한 평면응력 문제와 평면변형문제를 해석한 것과 Surana¹⁷⁾에 의한 적층을 갖는 평판 및 셸구조의 기하학적 비선형해석이 가장 최근에 수행된 연구로 조사되었다. 따라서, 본 연구는 탄소성 평판해석 분야에 p-version 유한요소법의 적용성 및 효율성을 입증하는데 목적을 두었다.

아울러, 해석결과의 신뢰성을 보이기 위해 문헌조사를 통한 여러 연구자의 결과와 h-version 유한요소해석 소프트웨어인 ADINA의 결과와 극한하중, 응력분포, 처짐 및 항복선 형상의 비교를 하고자 한다. 또한, 본 연구를 통해 개발된 프로그램은 향후 균열을 갖는 평판의 탄소성 파괴역학분야에도 적용될 수 있을 것이며, 평판의 두께

방향으로 소성 범위가 확장되는 직교이방성 다층 (layered) 평판요소를 개발하는 기초적 연구가 될 것으로 생각한다.

2. 항복선이론을 기초로 한 평판의 극한해석

2.1 하한계 이론

2차원 평면응력의 경우 항복조건으로 사용되는 von Mises 및 Tresca 항복규정은 σ_x , σ_y , 그리고 τ_{xy} 에 대해 정의되어 있다. 두께 h 를 갖는 평판에서 모멘트와 응력과의 관계는 식(1)과 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} M_x &= \int \sigma_x z dz \\ M_y &= \int \sigma_y z dz \\ M_{xy} &= \int \tau_{xy} z dz = M_{yx} \end{aligned} \quad (1)$$

모멘트 M_x , M_y , 그리고 M_{xy} 에 대한 항복조건은 응력 σ_x , σ_y , 그리고 τ_{xy} 에 의해 정의되는 von Mises 항복조건, $\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_o^2$ 의 양 항에 두께 h 가 모두 소성이 발생된 것으로 간주하여 $(h^2/4)^2$ 를 곱하면 식(2)와 같이 모멘트에 대한 항복조건을 얻을 수 있다.

$$M_x^2 - M_x M_y + M_y^2 + 3M_{xy}^2 = M_o^2 \quad (2)$$

유사하게, Tresca 항복조건, 즉 $\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|) = \sigma_o$ 의 모멘트에 대한 대응하는 조건도 동일한 개념에 의해 유도된다.

$$\max(|M_x|, |M_y|, |M_x - M_y|) = M_o \quad (3)$$

본 연구에서 해석된 단순지지의 경계에 등분포 하중을 받는 정방형 평판의 하한계 이론(Lower-Bound Theory)에 의한 극한하중을 유도하면 다음과 같다. 즉, 그림 1과 같은 정방형 평판을 단

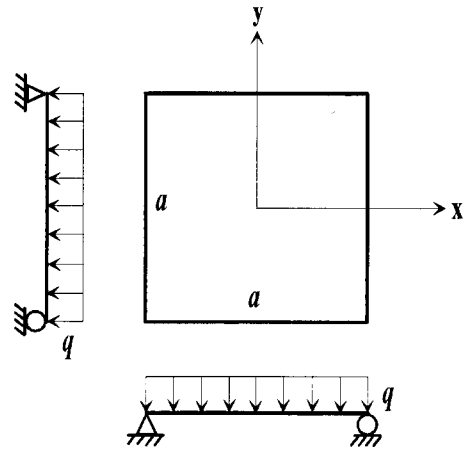


그림 1(a) 등분포하중을 받는 단순지지 정방형 평판

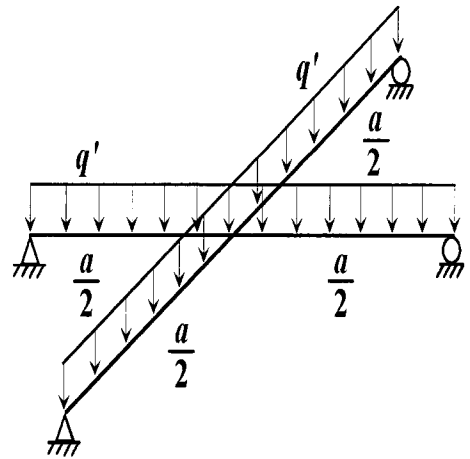


그림 1(b) 이상화된 격자모델

위 폭을 갖는 이상화된 2개의 단순지지 격자모델로 나타낼 수 있다. 이 때 평판의 중앙점에서 단순지지점까지의 모멘트 분포는 식(4)와 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} M_x &= M_o \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right] \\ M_y &= M_o \left[1 - \left(\frac{2y}{a} \right)^2 \right] \\ M_{xy} &= -\frac{M_o}{2} \left(\frac{2x}{a} \right) \left(\frac{2y}{a} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

한편, 모멘트에 대한 평형방정식은 식 (5)와 같이 정의 된다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad (5)$$

식 (4)를 식 (5)에 대입하면 식 (6)과 같은 극한하중을 얻을 수 있다.

$$q^L = 20 \frac{M_o}{a^2} \quad (6)$$

또한, 등분포하중을 받는 단순지지 장방형 평판의 경우도 유사한 방법에 의해 식 (7)과 같이 유도할 수 있다.

$$q^L = \frac{8M_o}{b^2} \left(1 + \gamma \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \right) \quad (7)$$

여기서, γ 는 사용된 항복규정에 따라 결정되는 상수이며, Tresca와 von Mises 항복규정에서 $\gamma = 1/2$ 이다. 만약, $a=b$ 이면 정방형 평판이 되어 식 (6)과 같게 된다.

2.2 상한계 이론

등분포하중을 받는 단순지지 정방형 평판의 상한계이론(Upper-Bound Theory)에 의한 극한하중을 구해 보도록 하자. 기본 개념은 1차원에서 소성힌지에 대응되는 2차원 평판에서의 항복선(yield line)이 그림 2와 같이 형성되었을 때 4개의 평판조각은 각각 강체거동(rigid body rotation)을 유발시킨다. 중앙점에서의 최대처짐을 Δ 라 하고 4개의 조각이 회전된 각을 θ_i 라 하면, 강체거동중 회전에 의해 발생하는 선속도 $\dot{\Delta}$ 는 그림 2와 같이 평판을 피라미드 형상으로 변형을 유발시킨다. 다시 말하면, 평판은 단순지지점에 대하여 각속도 $\dot{\theta}_i$ 로 강체회전에 의해 움직이는 네 개의 삼각형들로 나누어진다. 예를 들면, $\triangle ABE$ 는 단순지지점에 대해 각속도 $\dot{\theta}_1$ 으로 회전한다.

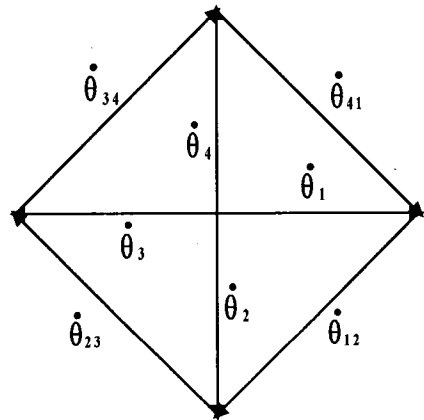
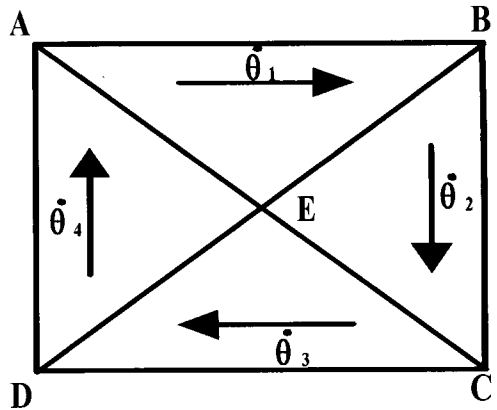


그림 2 정방형 평판의 붕괴기구

그러므로, EA, EB, EC , 그리고 ED 는 각속도 불연속의 선들이며, 소성힌지선(plastic hinge line) 또는 항복선(yield line)이라고 명칭된다. 항복선에서 단위길이당 에너지분산률 D 는 관련된 각속도의 소성모멘트의 곱에 의하여 계산된다. 예를 들면, EB 선에서 $D = M_o \cdot \dot{\theta}_{12}$, 여기서 $\dot{\theta}_{12}$ 는 $\triangle EAB$ 와 $\triangle EBC$ 의 경계에서의 회전각에 의한 각속도이다. 관련된 각속도를 평가하기 위해서는 각속도벡터의 분해를 사용할 수 있다. 따라서, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_4 = 2\dot{\Delta}/a$ 그리고 $\dot{\theta}_{12} = \dot{\theta}_{23} = \dot{\theta}_{34} = \dot{\theta}_{41} = \sqrt{2} \dot{\theta}_1 = 2\sqrt{2} \dot{\Delta}/a$ 이다. 따라서, 외적 일률을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{W}_E = \frac{1}{3} q a^2 \dot{\Delta} \quad (8)$$

수치적으로, 이것은 피라미드의 체적에 의해 곱해진 하중강도 q 와 같다. 항복선 AE, BE, CE , 그리고 DE 를 따른 내적 일률은 다음과 같다.

$$\dot{W}_I = 4M_o(2\sqrt{2}\dot{\Delta}/a)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = 8M_o\dot{\Delta} \quad (9)$$

그러므로, 상한계 이론에 의한 극한하중은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q^U = 24 \frac{M_o}{a^2} \quad (10)$$

장방형 평판의 경우도 유사한 방법에 의해 구할 수 있으며, 식(11)과 같다.

$$q^U = 12M_o\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{12M_o}{b^2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \quad (11)$$

3. 유한요소 정식화

3.1 탄소성 평판이론

평판의 단면은 휨모멘트가 소성모멘트 M_o 에 도달할 때를 기준으로 소성의 한계를 정의한다. 여기서, 항복함수 \hat{F} 는 휨모멘트 함수 $\hat{\sigma}_I = [M_x, M_y, M_{xy}]^T$ 와 전단력 함수 $\hat{\sigma}_s = [Q_x, Q_y]^T$ 의 합으로 표현되나 항복기준을 휨에 대해 고려하므로 전단력의 영향은 무시한다. 또한, 항복함수 \hat{F} 는 일경화재료 (work-hardening material)를 고려할 경우 경화변수 \hat{H} 의 함수이기도 하다. 항복이 어떤 점에서 일어나는 동안, 추가적인 재하(re-loading) 또는 제하(unloading)가 없다면 응력함수는 항복면에 존재하기 때문에 항복함수는 아래 식과 같다.

$$\hat{F}(\hat{\sigma}_I, \hat{H}) = 0 \quad (12)$$

$$\hat{F}(\hat{\sigma}_I, \hat{H}) = \int_{-l/2}^{l/2} F(\sigma_I, H) dz \quad (13)$$

여기서, 식(12)를 두께에 대해 식(13)과 같이 적분하게 되면 평면응력에서 $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ 로 표현되는 응력함수는 평판문제에서 휨응력과 대응되는 $\hat{\sigma}_I = [M_x, M_y, M_{xy}]^T$ 와 같은 모멘트함수로 치환되고, 일축응력시의 항복응력인 σ_o 도 $M_o = \sigma_o h^2/4$ 로 바꿀 수 있다. 한편, 증분소성이론 (incremental theory of plasticity)에 의한 증분응력-변형률 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} d\hat{\sigma}_I \\ d\hat{\sigma}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\hat{D}_{ep}]_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{D}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\hat{\epsilon}_I \\ d\hat{\epsilon}_s \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서, \hat{D}_{ep} 는 휨에 대한 탄소성상태의 재료상수이다.

$$[\hat{D}_{ep}]_I = \hat{D}_I - \frac{\hat{d}_b \hat{d}_b^T}{\hat{A} + \hat{d}_b^T \hat{a}} \quad (15)$$

$$\hat{a} = \left[\frac{\partial \hat{F}}{\partial M_x}, \frac{\partial \hat{F}}{\partial M_y}, \frac{\partial \hat{F}}{\partial M_{xy}} \right]^T \quad (16)$$

여기서, \hat{a} 는 소성류벡터 (flow vector)를 나타낸다.

$$\hat{d}_b = \hat{D}_I \hat{a} \quad (17)$$

$$\hat{A} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{H}} d\hat{H} \quad (18)$$

여기서, λ 는 비례상수이다. 그리고

$$\hat{D}_I = \int_{-l/2}^{l/2} D_I' z dz \quad (19)$$

또한

$$\hat{D}_s = \int_{-l/2}^{l/2} D_s' dz \quad (20)$$

여기서, D_I' 과 D_s' 는 식(21)과 같이 정의된다.

$$\begin{bmatrix} D'_f & 0 \\ 0 & D'_s \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

한편, 임의의 반복단계에서의 증분평형방정식은 식 (22)와 같다.

$$\Psi(d^p) + K_T(d^p)\Delta d^p = 0 \quad (22)$$

여기서, Ψ 는 이산화과정에서 얻어지며 잔류력 벡터(residual force vector)이고, $K_T(d^p)$ 는 접선 강성도 매트릭스이며 아래 식으로 구할 수 있다.

$$K_T(d^p) = \int_A \{ [B_r]^T [D_{ep}] B_r + [B_s]^T D_s B_s \} dA \quad (23)$$

3.2 초유한 사상기법

원형평판의 해석을 하기 위해서는 원형곡선경계를 정확히 사상(mapping)할 수 있는 기법이 필요하다. 즉, Babuska의 역설(paradox)에 의하면 곡선경계를 여러 개의 분할된 직선으로 사상할 경우 이에 관련된 이산화오차(discretization error)가 발생됨을 알 수 있다. 특히, 본 연구에서 사각형 또는 원형평판해석을 위해 1개의 요소로 모델링하고 있는 p-version 유한요소법의 경우 곡선경계를 정확히 사상할 수 있는 기법이 절실이 필요하게 된다.

이 초유한 사상기법(transfinite mapping technique)은 Gordon과 Hall에 의해 최초로 제안되었다^{4),6)}. 한편, s-t 평면에서의 해석영역 L은 그림 3과 같으며 t=0과 t=h일 때 곡선을 정의하는 함수가 각각 f(s,0)과 f(s,h)라 하면 2개의 함수를 보간하는 초유한 보간자(transfinite interpolator)는 식 (24)와 같이 정의된다. 즉,

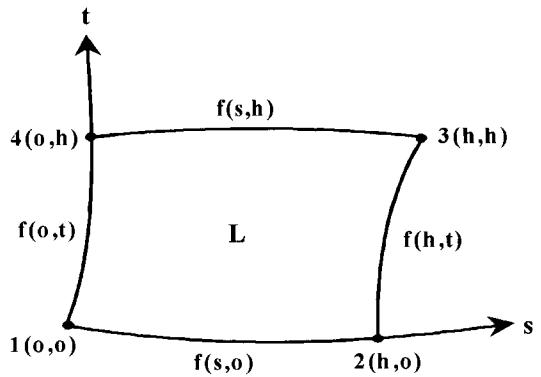


그림 3 s-t 좌표계에서 정의되는 해석영역 L

$$P_s[f] = (1-s/h) \cdot f(0, t) + (s/h) \cdot f(h, t) \quad (24)$$

이 식을 보간함수를 사용하여 일반적으로 표현하면 아래 식과 같이 표현된다.

$$P_s[f] = \sum_{i=0}^m f(S_i, t) \cdot \Phi_i(s) \quad (25)$$

여기서, $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = h$. 그리고, 보간을 위해 사용되는 라그랑지 보간함수(Lagrange interpolation)은 식 (26)과 같다.

$$\Phi_i(s) = \prod_{j \neq i} (s - s_j) / \prod_{j \neq i} (s_i - s_j), \quad 0 \leq i \leq m \quad (26)$$

유사한 방법으로, s=0과 s=h인 곡선경계를 나타내는 초유한 보간자는 식 (27)과 같이 정의할 수 있다.

$$P_t[f] = \sum_{i=0}^n f(s, t_i) \cdot \Psi_i(t) \quad (27)$$

여기서, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = h$. 그리고, 라그랑지 보간함수도 동일한 개념으로 식 (28)과 같이 표현된다.

식 (27) 과 식 (28) 을 이용하여 혼합사상 (blending mapping) 을 사용하여 두 식을 더한 값에서 중첩된 부분을 제외하게 되면 식 (29) 와 같이 유도된다.

$$P_i \oplus P_t \equiv P_s + P_t - P_s \cdot P_t \quad (29)$$

4. 수치해석 예제

4.1 등분포하중을 받는 사각형 평판 해석

본 연구에서는 평판의 탄소성상태의 거동을 비교·분석하기 위하여 평판을 단순지지의 경우와 사변고정된 경우에 대하여 해석하였다. 항복조건으로는 Tresca의 항복규준을 사용하고, 탄성-완전소성재료 (elastic-perfectly plastic material) 로 가정하였으며, p-version 해석값은 1개의 요소만을 사용하여 수렴성을 조사한 후 수렴구간에 있는 최소의 차수인 5차 형상함수로 고정하였다. 한편, h-version 소프트웨어인 ADINA의 경우도 역시 수렴성 조사 후, 3절점 삼각형 평판요소 196개를 사용하여 해석하였다. 해석대상인 평판은 2축 대칭상태이므로 대칭성을 고려하여 1/4 만을 모델링하였다.

<단순지지인 경우>

표 1과 그림 5는 평판의 변장비 (a/b ratio) 의 변화에 따른 극한하중 (limit load) 또는 극한내하력 (ultimate load-carrying capacity) 을 나타내었으며, Chen과 Han¹⁰⁾의 극한해석에 의해 제시된 이론값과 비교한 결과, 정방형 평판의 경우에

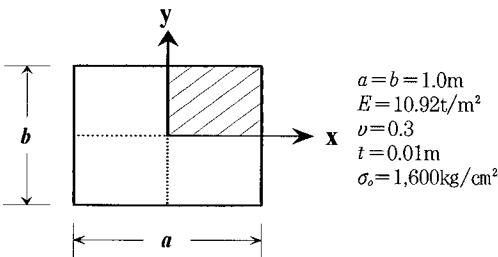


그림 4 정방형 평판의 기하적 및 재료적 제원

표 1 등분포 하중을 받는 단순지지 장방형 평판의 극한하중 비교

a/b	Limit Load			
	Limit Analysis ⁶⁾		p-version	
	Lower bound	Upper bound	Initial yield	Final yield
1	0.800	0.960	0.642	0.911
2	0.480	0.600	0.393	0.533
3	0.409	0.533	0.336	0.445
4	0.380	0.510	0.321	0.407
5	0.365	0.499	0.313	0.390

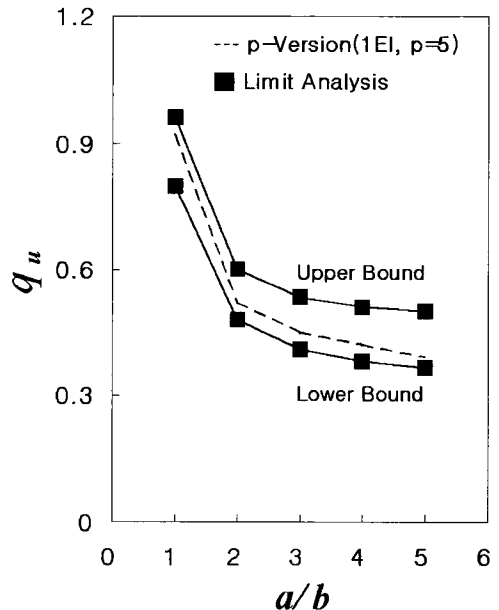


그림 5 단순지지 사각형 평판의 변장비에 따른 극한하중

는 상한계의 이론값에 근접하며 변장비가 커짐에 따라 하한계의 이론값에 가까운 것으로 해석되었다. 또한, 변장비에 따른 극한하중을 도시한 그림 5에 의하면, 변장비가 2배로 증가할 때의 극한하중은 급격히 감소하지만 그 이후에서는 변장비의 증가에 따라 완만하게 줄어드는 것을 알 수 있었다. 해석 결과로부터 초기항복 (initial yield)

시의 극한하중에 비해 항복선이 형성되는 최종항복 (final yield) 시의 극한하중은 장방형일 때 약 25%에서, 정방형 평판일 때 약 42%까지 차이를 보임을 알 수 있었으며, 초기항복이후에도 붕괴 시까지는 상당한 여유력을 확보하고 있는 것으로 평가되었다.

또한, 그림 6과 그림 7에는 단순지지된 평판의 중앙점에서의 하중-최대처짐 곡선과 중앙점에서 단순지지점의 위치변화에 따른 휨모멘트 M_{yy} 의 분포를 나타내었다. 그림 7의 $M_{yy}(q_u)$ 와 $M_{yy}(q_u')$ 는 각각 초기항복하중과 붕괴시의 극한하중이 작용할 때 y 축에 대한 모멘트를 나타내며, M_p 는 붕괴시의 소성모멘트를 나타낸다. 그림의 결과로부터 제안된 p-version 모델은 ADINA의 해석결과와 잘 일치하는 것을 볼 수 있으며, 극한해석 결과는 상·하한계 이론에 의해 극한값이 이원화되는 반면 유한요소해석은 비교적 정확한 유일해 (unique solution)를 갖게 되어 설계 시 과다 또는 과소 설계되는 오류를 피할 수 있다.

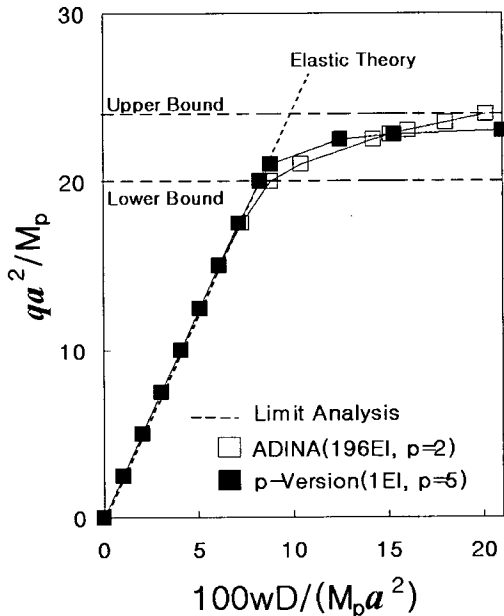


그림 6 등분포하중을 받는 단순지지 정방형 평판의 하중-최대처짐 곡선

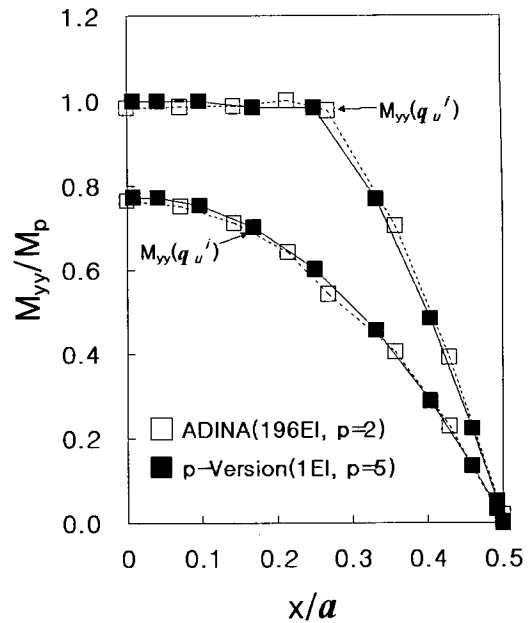
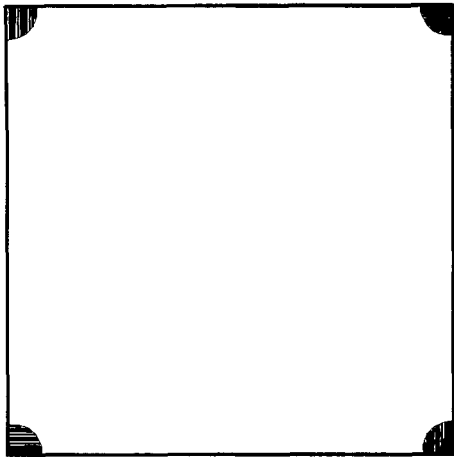


그림 7 등분포하중을 받는 단순지지 정방형 평판의 휨모멘트 M_{yy} 의 분포

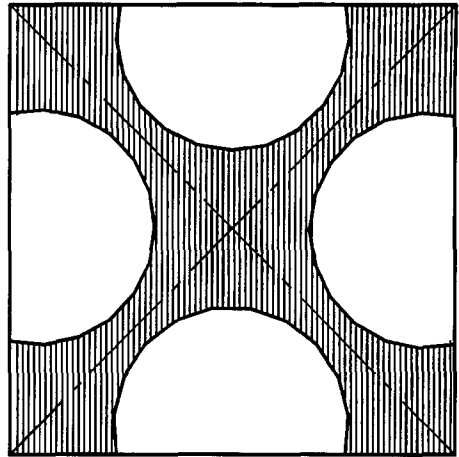
정방형 평판의 초기항복시와 항복선이 형성되는 최종항복시의 소성역 (plastic zone)이 그림 8에 나타나 있는데 모서리에서 처음 소성이 진행되어 하중 증가에 따라 평판의 중앙부로 진전이 되는 결과를 보여주었다. 소성이 점차적으로 진행되면서 붕괴기구 (collapse mechanism)에 도달할 때는 소성역이 모서리에서 대각선방향으로 X모양의 띠를 형성하게 된다. 더 나아가, p-version의 형상함수 차수를 증가시킬수록 소성역의 띠 (band)의 폭이 줄어들어 보다 선명한 결과를 보여주었다.

<사변고정의 경우>

등분포하중을 받는 사변고정 평판의 경우 수렴성조사 후 4개의 요소를 사용하여 해석하였으며, ADINA의 경우는 196개의 2차 삼각형요소를 사용하였다. 그림 9에는 평판의 중앙점에서의 하중-최대처짐 곡선을, 그림 10에는 중앙점에서 고정단까지 위치가 변화함에 따른 휨모멘트 M_{yy} 를 도시하였다. 처짐값에서는 ADINA와 거의 일치된



(a) 초기항복시



(b) 최종항복시

그림 8 등분포하중을 받는 단순지지 정방형 평판의 소성형상

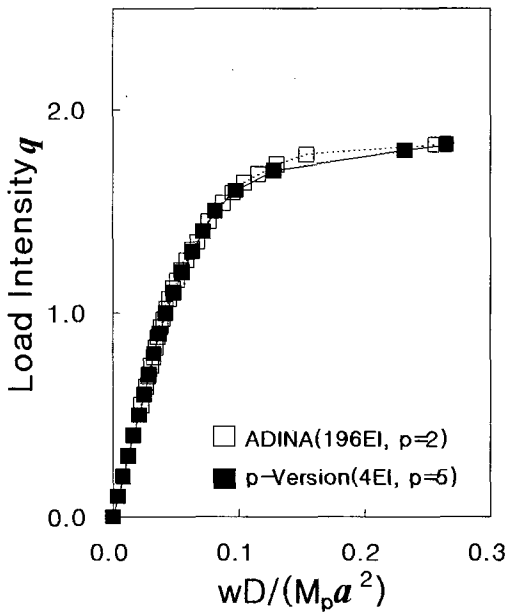


그림 9 등분포 하중을 받는 고정지지 정방형 평판의 하중-최대처짐 곡선

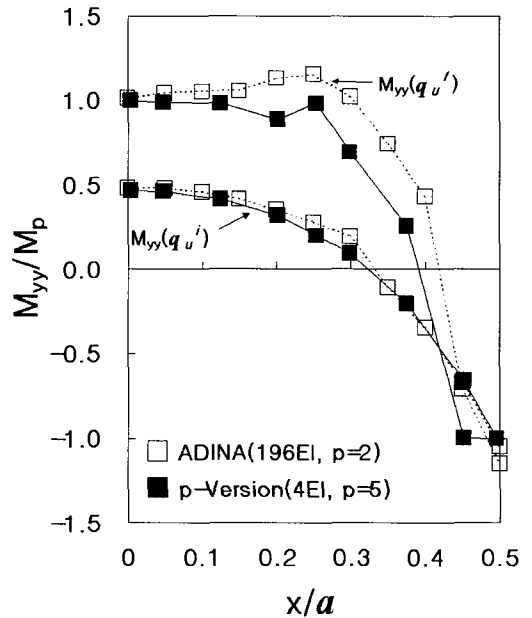
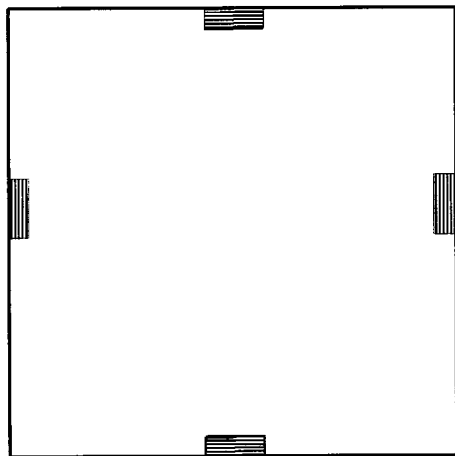


그림 10 등분포하중을 받는 고정지지 정방형 평판의 휨모멘트 M_{yy} 의 분포

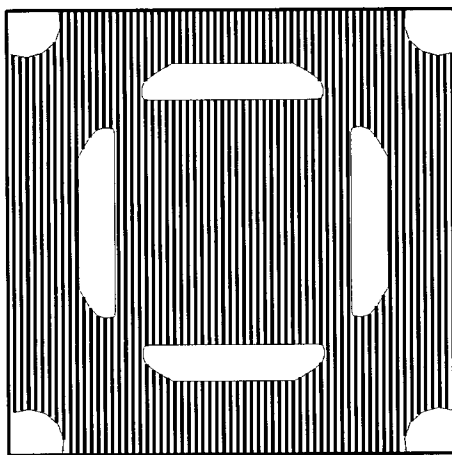
해석결과를 확인할 수 있었다. 휨모멘트 M_{yy} 의 해석결과는 초기항복 하중일 때는 거의 동일한 해석결과를 나타내었으나 붕괴시의 최종항복 하중에서는 두 해석 결과에 다소간의 편차를 보여

주고 있다. 그 이유는 단순지지 경우 모멘트의 분포가 중앙점에서 최대가 되며 지점부에서 영(zero)이 되는 단순한 경향을 보여 주는 반면, 고정지지 경우는 지점부의 부모멘트와 중앙부

의 정모멘트가 동시에 소성을 이루는 까닭에 이 중간에서의 변화양상이 복잡한 것에 기인한다고 판단된다. 그림 11에 초기항복시와 붕괴기구가 형성될 때의 최종항복시 소성역의 분포를 나타내고 있는데, 이 경우 소성역의 양상은 정모멘트는 물론 부모멘트에 의한 부항복선(negative yield line)이 형성된다는 점이 단순지지와 다르다고 지적할 수 있다. 또한, 이 결과는 항복선 이론에 의해 예측된 소성역과 거의 일치하는 결과를 보여 주고 있으며, 단순지지경우와는 달리 초기항



(a) 초기항복시



(b) 최종항복시

그림 11 등분포하중을 받는 고정지지 정방향 평판의 소성형상

복시 모서리부분에서 먼저 소성이 발생되지 않고, 소성역이 변의 중앙에서 발생하여 중앙으로 진전되고 있는데, 이는 통상 모서리주변에서 국부적 반력의 분산효과인 모서리효과(corner effect)에 의한 것으로 분석된다^{2), 3), 10)}.

그림 12에는 등분포하중을 받는 단순지지 정방향 평판의 하중증가에 따른 휨모멘트 M_{yy} 의 해석결과를 나타내었다.

4.2 집중하중을 받는 사각형 평판해석

집중하중을 받는 사각형 평판 해석의 경우에는 탄성-완전소성 재료인 강재 SWS 400를 해석대상으로 하여 기하형상 및 재료특성에 관한 제원은 $a=b=1m$, $E=2.1 \times 10^6 kg/cm^2$, $\nu=0.3$, $t=2cm$, $\sigma_o=2400kg/cm^2$ 로 가정하였다. 해석시의 항복규정으로는 Tresca의 항복규정을 가정하였다. p-version의 해석값은 수렴성을 검토한 후 수렴구간에 있는 최소의 차수인 5차 형상함수를 사용하여, 해석대상인 평판은 2축 대칭상태이므로 4개의 요소로 1/4만을 모델링을 하였다. 그리고,

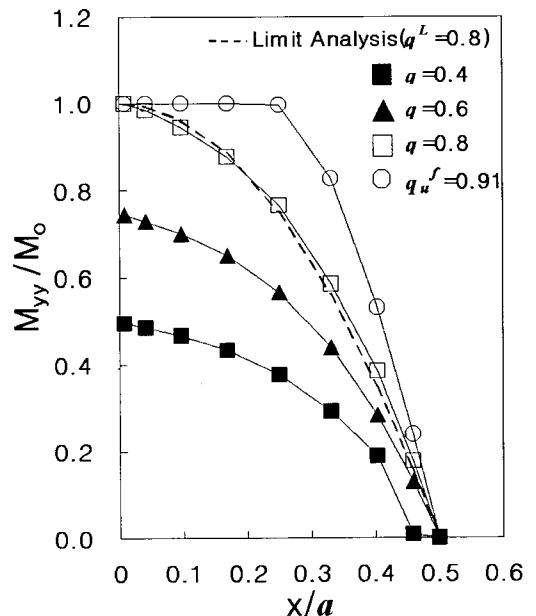


그림 12 등분포하중을 받는 단순지지 평판의 하중증가에 따른 휨모멘트 M_{yy} 의 분포

상용 소프트웨어인 ADINA를 사용하여 2차 삼각형 요소 400개로 해석한 결과를 비교하였다. 집중하중을 받는 단순지지된 평판의 중앙점에서의 하중-최대처짐곡선을 그림 13에 나타내었는데 Sobotka¹⁴⁾에 의한 극한해석치와 ADINA의 해석결과와 비교하였다. 결과에서 보듯이 h-version 및 p-version의 해석결과는 초기항복시의 극한하중은 동일하나 붕괴기구가 형성될 때의 최종항복시 극한하중은 p-version 해석결과가 ADINA에 비해 Sobotka의 이론값에 더 근접하는 것을 알 수 있었다. 한편, 수렴성조사후에 채택된 h-version 모델은 400개 요소에 자유도수가 620인 반면, 본 연구에서 제안하고 있는 p-version 모델은 4개 요소($p=5$)에 자유도수는 불과 146이므로 훨씬 경제적이라 할 수 있다.

소성역의 진전에서는 등분포하중의 재하때와는 달리 집중하중을 받는 평판에서는 단순지지와 고정지지의 경우에 중앙점에서 소성이 제일 먼저 발생하여 소성역이 모서리방향으로 진전되었으며, 고정지지의 경우에는 등분포하중 시와 유사하게 지점부 주위로 부항복선(negative yield

line)이 발생되었다.

그림 14에서는 집중하중을 받는 단순지지 정방형 평판의 두께의 변화에 따른 중앙점의 최대 처짐을 ADINA의 해석결과와 Sobotka의 극한해석 결과와 비교하였다.

모든 경우에 있어서 ADINA의 해석결과보다는 p-version의 해석결과가 적은 요소수와 자유도에서 Sobotka의 극한해석결과에 근접한 결과를 나타내었다. 그림 15는 집중하중을 받는 단순지지 정방형 평판의 변장비에 따른 중앙점에서의 최대 처짐을 비교·분석하였다. 본 해석결과에서는 변장비가 크게 됨에 따라 ADINA의 해석치가 p-version의 해석결과보다는 낮게 평가되었고, 초기 항복시의 극한하중은 거의 비슷하게 해석되었다.

4.3 집중하중을 받는 원형 평판 해석

집중하중을 받는 원형 평판의 해석모델은 그림 16에 나타나 있다. Teng과 Rotter¹¹⁾에 의한 결과와 비교하기 위해 동일한 재원을 사용하였다. Teng과 Rotter의 경우에는 10개의 3차 Hermite 형상함수에 기초를 둔 C^1 -축대칭 요소로 모델링

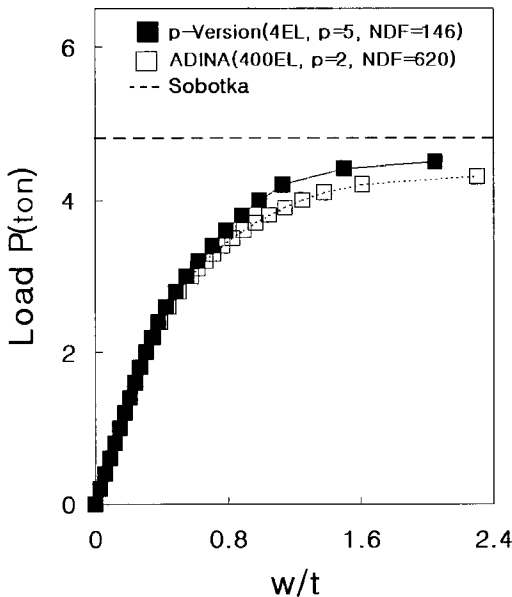


그림 13 집중하중을 받는 단순지지 평판의 하중-최대처짐 곡선

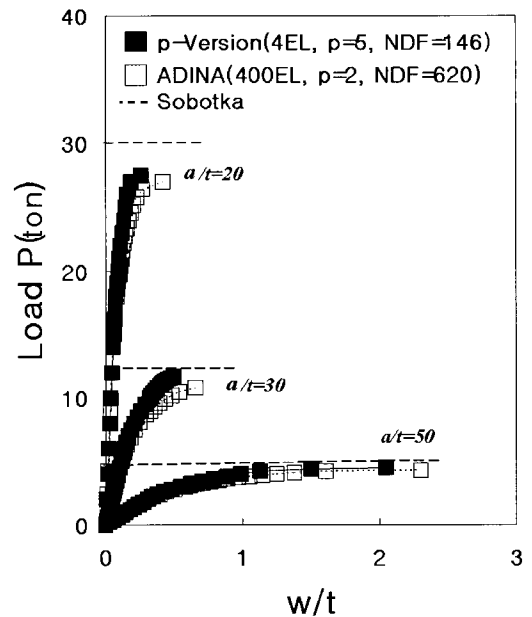


그림 14 단순지지 집중하중시의 두께비에 따른 정방형 평판의 하중-최대처짐 곡선

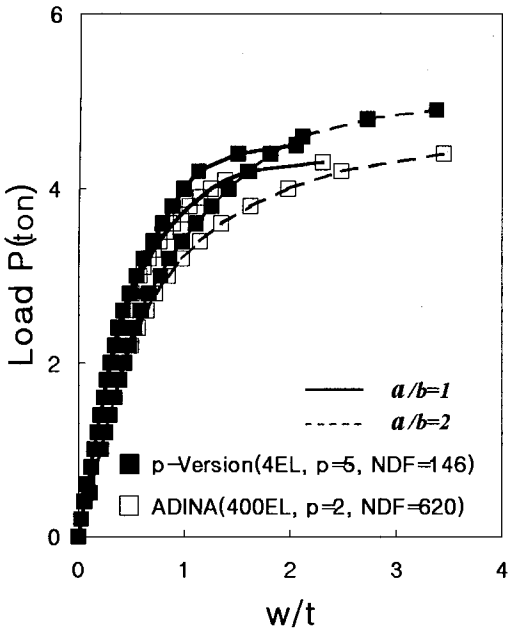


그림 15 집중하중을 받는 단순지지 장방형 평판의 변장비에 따른 하중-최대처짐 곡선

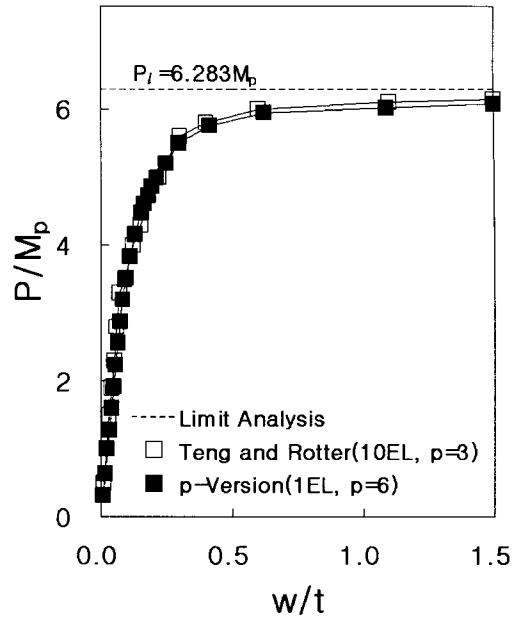


그림 17 집중하중을 받는 단순지지 원형평판의 하중-최대처짐 곡선

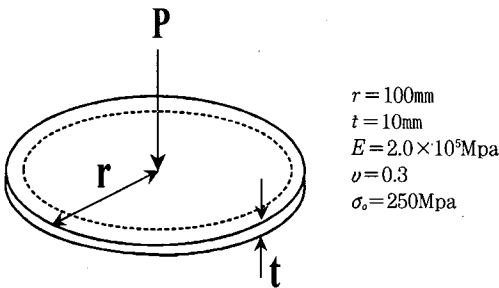


그림 16 원형 평판의 기하적 및 재료적 제원

한 반면, p-version 모델은 수렴성조사후 6차 형상함수가 사용된 1개의 C^0 -평판요소로 모델링하였다. 한편, p-version의 경우에는 사용되는 요소의 크기와 변형정도가 크므로 이러한 이산오차를 피하기 위해 지점부의 곡선경계에는 Wool¹⁰⁾에 의해 p-version 유한요소법에 적용되도록 수정된 초유한 사상(transfinite mapping)을 도입하였다. 또한, 극한해석에 의한 이론값인 $P_l = 2\pi M_p$ 와도 비교하였다. 여기서, M_p 는 평판단면의 소성모멘트이다^{10), 11)}. 집중하중을 받는 단순지지 원형평

판의 하중-최대처짐곡선을 그림 17에 나타내었는데, 3개의 해석값이 비교적 잘 일치하는 것을 보여주고, 특히 p-version 해석결과는 Teng과 Rotter의 결과와 비교하여 1.9% 상대오차를 보여주고 있다. 이 결과로 원형평판의 경우는 극한해석에 의한 이론치를 그대로 설계에 사용하여도 큰 차이가 없는 것으로 평가된다.

5. 결 론

본 연구에서는 평판의 탄소성 해석분야에 p-version 유한요소법의 적용성 및 효율성의 입증과 평판의 초기항복후의 거동 및 극한내하력의 정확한 해석을 통해 평판구조물의 설계시, 보다 정확하며 경제적인 설계를 가능케 하는데 있다. 한편, 탄성-완전소성재료로 가정하여 구조해석을 수행하였으며 개발된 프로그램의 검증을 위해 해석결과를 상·하한계이론을 기초로 한 극한해석의 이론값과 h-version 소프트웨어인 ADINA 해

석결과의 비교·분석에서 p-version은 적은 요소와 자유도에서도 정확한 결과를 예측할 수 있는 것으로 나타났다. 또한, 탄성구간에서 입증된 p-version 유한요소모델의 여러 장점들 즉, 우월한 수렴성, 모델링의 단순성, 계산상의 효율성 등이 평판의 탄소성해석에서도 입증이 되었다. 연구결과로 부터 탄소성 평판의 경우 상·하한계 이론에 의한 극한하중과 유한요소해석에 의한 결과와 다소 차이를 보여 주고 있으나, 변장비나 두께비 등 기하형상비와 경계조건의 변화에 따른 초기항복후의 거동에 대한 이론해가 다양하게 존재하지 않기 때문에 본 연구에서 제안되는 p-version 유한요소모델을 갖고 비교적 높은 정확도를 보여줄 수 있다고 평가된다.

참 고 문 헌

1. M. J. Turner, E. H. Dill, H. C. Martin and R. J. Melosh, "Large Deflection of Structures Subjected to Heating and External Loads", *J. Aero. Scien.*, Vol. 27, 1960
2. A. H. S. Ang and A. Lopez, "Discrete Model Analysis of Elastic-Plastic Plates", *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE*, Vol. 94, No. EM1, 1968, pp.271~293
3. P. G. Hodge and T. Belytschko, "Numerical Methods for the Limit Analysis of Plates", *Appl. Mech. Div., Trans. ASME*, No. 68-WA/APM-21, 1968, pp.796~802
4. W. J. Gordon, "Blending Function Methods of Bivariate and Multivariate Interpolation and Approximations", *SIAM J. Numer. Analysis*, 1971
5. T. Belytschko, M. Velebit, "Finite Element Method for Elastic Plastic Plates", *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE*, Vol. 98, No. Em1, 1972, pp.227~242
6. W. J. Gordon, C. A. Hall, "Transfinite Element Methods: Blending Function Interpolation over Arbitrary Curved Element Domains", *Numer. Math.*, Vol. 21, 1973, pp. 109~129
7. R. Szilard, *Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods*, Prentice-Hall, Inc., 1974
8. A. Pica, R. O. Wood and E. Hinton, "Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Plate Behavior Using A Mindlin Formulation", *Comp. & Struc.*, 1980
9. O. C. Zienkiewicz, J. P. De, S. R. Gago, D. W. Kelly, "The Hierarchic Concept in Finite Element Analysis", *Compt. Struct.*, Vol. 16, 1983, pp.51~65.
10. W. F. Chen and D. J. Han, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag New York Inc., 1988
11. J. G. Teng and J. M. Rotter, "Elastic-Plastic Large Deflection Analysis of Axisymmetric Shells", *Copm. & Struc.*, Vol. 31, No. 2, 1989, pp.211~233
12. K. S. Woo, P. K. Basu, "Analysis of Singular Cylindrical Shells by p-version of F.E.M.", *Solids & Struct.*, Vol. 25, No. 2, 1989, pp.151~165
13. K. S. Woo, "High Precision Analysis of Plates and Cylindrical Shells in the Presence of Singularities by p-version of F.E.M.", *ph.D. Dissertation*, Vanderbilt University, Tennessee, 1989
14. Z. Sobotka, *Theory of Plasticity and Limit Design of Plates*, Elsevier Science Publishing Co. Inc, 1989
15. J. E. Schiermeier, "Geometrically Nonlinear Analysis with the p-Version of the Finite Element Method", *PH.D. Disserthtion*, Washington University, St. Louise, Missouri, 1990
16. 우광성, "Transfinite Interpolation Technique for P-version of F.E.M", 한국전산구조공학회 논문집, 제5권, 제1호, 1992, pp.75~

17. J. H. Liu, K. S. Surana, "Piecewise hierarchical p-version curved shell element for geometrically nonlinear behavior of laminated composite plates and shells", *Comp. & Struc.*, Vol 55, No. 1, 1995, pp.47~66
18. K. S. Woo, "p-Version Finite Element Approximations of Stress Intensity Factors for Cracked Plates Including Shear Deformation", *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 52, No. 3, 1995, pp.729~740
19. S. M. Holzer, "The p-Version of the Finite element Method in Incremental Elastoplastic Analysis", *Numer. Meth. Eng.*, Vol. 39, 1996, pp.1859~1878
20. 정우성, 홍종현, 우광성, "증분소성이론에 의한 p-Version 탄소성 유한요소해석", 한국전산구조공학회논문집, 제10권, 제4호, 1997 pp.217~228

(접수일자 : 1998. 6. 5)