

최적조건법에 의한 위상 최적화 연구

Topology Optimization using an Optimality Criteria Method

김 병 수*, 서 명 원**
Byungsu Kim, MyungWon Suh

ABSTRACT

Topology optimization has evolved into a very efficient concept design tool and has been incorporated into design engineering processes in many industrial sectors. In recent years, topology optimization has become the focus of structural design community and has been researched and applied widely both in academia and industry. There are mainly two approaches for topology optimization of continuum structures; homogenization and density methods. The homogenization method is to compute an optimal distribution of microstructures in a given design domain. The sizes of the micro-cavities are treated as design variables for the topology optimization problem. The density method is to compute an optimal distribution of an isotropic material, where the material densities are treated as design variables. In this paper, the density method is used to formulate the topology optimization problem. This optimization problem is solved by using an optimality criteria method. Several example problems are solved to show the usefulness of the present approach.

주요기술용어 : Topology optimization(위상최적화), Optimality criteria method(최적조건법), Sensitivity analysis(민감도해석), Density method(밀도함수법)

1. 서 론

구조 최적화문제는 70년대 이후 컴퓨터기술의 급속한 발전과 더불어 산업체의 컴퓨터 원용설계(CAD), 유한요소법(FEM), 유한차분법(FDM),

경계요소법(BEM)등의 분야에 폭 넓게 적용되고 있다. 이런 구조 최적화의 이점은 기계구조물의 설계단계에서 구조의 배치, 형상, 크기등을 결정하여 주는데 있다.

구조 최적설계 문제는 위상, 형상, 치수(단면적, 두께등)의 최적화로 귀결되고, 그중 위상최적화는 구조물 내부에 구멍을 가정함으로써 설계 구속조건을 위배하지 않고서도 경량화와 고강성을 동시에 만족하는 설계를 가능하게 한다.

이런 이점 때문에 구조 최적화 분야에서 위상

* 정회원, 성균관대학교 대학원

** 정회원, 성균관대학교

최적화 문제는 오랫동안 많은 관심을 끌어 왔으나, 수학적 정의가 어렵고 많은 계산량으로 인하여 주로 트러스(truss) 구조물⁽¹⁾에 대해서만 연구되어 왔다. 최근 들어 Bendsøe⁽²⁾에 의해 미시구조를 이용한 균질화법(homogenization method)이 제안되었고 이를 이용한 연속체에 대한 연구도 활발히 진행되고 있다. 균질화법은 동공을 가정한 복합재료인 미소구조를 정의하고 이를 이용하여 위상최적화를 수행하였다. 이후 균질화 재료상수를 보다 간단히 계산하기 위해 에너지법을 이용하는 방법^(3,4)이 제안되었다. 이를 더욱 간략화하기 위하여 미시구조를 고려하지 않고 밀도를 이용하여 재료분배문제로 바꾸어 접근하는 밀도함수법이 제안되었다⁽⁵⁻⁷⁾. 또한 Gea⁽⁸⁾에 의하여 더욱 수학적으로 정확하고 명시적이며 간단한 밀도 재료상수에 관한 연구가 이루어졌다. Wang⁽⁹⁾ 등은 진동·소음분야에 밀도함수법을 적용하고, 선형계획법과 보조변수법을 이용하여 위상최적설계를 수행하였다. 또 이런 밀도함수법의 단점을 극복하기 위한 연구⁽¹³⁻¹⁶⁾들도 수행되어졌다.

본 연구에서는 밀도-탄성계수의 관계를 근사한 밀도함수법을 적용하여 위상최적설계 문제의 수학적 모델을 단순화하고 이를 최적조건법과 연계한 위상최적설계의 기법을 개발하여 안정적 수렴과 계산시간의 절감을 얻고자 한다.

2. 밀도함수법과 최적조건법을 이용한 위상최적설계 알고리즘

2.1 최적화 문제의 정의

본 연구에서 다루는 문제는 강성최적화문제로 설계영역에서 목적함수인 주어진 구조물의 질량을 최소화하며 관심대상의 변위가 설계 목표를 만족하는 구조물의 위상을 결정하는 것이다. 최적 위상은 주어진 설계영역에 재료를 재분배하는 방법으로 얻어지며, 이때에 분배되는 재료가 설계변수인 밀도와 탄성계수이다. 일반적인 연속체를 유한요소해석시스템에 대하여 수학적으로 정

식화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad \text{Mass} \\ & \text{subject to : } U_j \leq U_j^0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, U_j 는 j 번째 노드의 변위이고, U_j^0 는 j 번째 노드의 목표 변위이다. 식 (1)에 설계변수를 포함한 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{\rho, E} F(\rho) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i t_i \\ & \text{subject to : } g_j(\mathbf{E}) = U_j(\mathbf{E}) - U_j^0 \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, ρ 는 밀도, A 는 단면적, t 는 두께이고, \mathbf{E} 는 탄성계수이며 아래첨자 i 는 i 번째 요소를 의미한다.

식(2)는 설계변수가 밀도와 탄성계수로서 두가지의 수식의 전개와 더불어 많은 계산이 필요하게 된다. 따라서 설계변수를 단일화하기 위하여 다음절에 설명되는 것과 같이 밀도-탄성계수간을 근사한 밀도함수를 적용한다.

2.2 밀도-탄성계수관계식의 적용

본 연구에서 적용되어질 밀도-탄성계수 관계식은 Wang⁽⁹⁾가 제안한 밀도함수를 이용한다. 이 밀도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_i &= C_i^{n_1} E_0 \\ \rho_i &= C_i^{n_2} \rho_0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, E_i 는 i 번째 요소의 탄성계수, E_0 는 기준 탄성계수, ρ_i 는 i 번째 요소의 밀도, ρ_0 는 기준 밀도, C_i 는 i 번째 요소의 밀도-탄성계수간의 매개변수이며 n_1 와 n_2 는 근사 매개지수이다. 본 연구에서는 근사 매개지수를 $n_1=2, n_2=1$ 로 설정하였다. 이로 인하여 최적설계 문제가 더욱 간략해지고, 최종적으로 구해야하는 설계변수는 밀도와 탄성계수를 근사하는 매개변수 C_i 를 구하는 문제

로 귀결된다. 따라서 2.1절에서 정식화한 최적설계 문제에 밀도-탄성계수의 관계식을 적용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Min}_C F(C) &= \sum_{i=1}^n \rho_0 C_i^{n_i} A_i t_i \\ \text{subject to : } g_j(C) &= U_j(C) - U_j^0 \leq 0 \quad (4) \\ & \quad j=1, \dots, m \end{aligned}$$

2.3 최적조건법을 이용한 정식화

2.3.1 문제 정의와 최적 조건

일반적인 최대화나 최소화 문제의 설계변수 C 에 대한 목적함수는 식 (5)와 같다.

$$F(C) = F(C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (5)$$

제한조건은 다음 식 (6), 식 (7)과 같은 부등호 제한조건과 등호 제한조건을 가진다.

$$g_j(C_1, \dots, C_n) \leq \bar{g}_j \quad j=1, \dots, k \quad (6)$$

$$g_j(C_1, \dots, C_n) = \bar{g}_j \quad j=k+1, \dots, m \quad (7)$$

또한 변수 자체가 가지는 제한조건을 기술하면 식 (8)와 같다.

$$C_{lower} \leq C \leq C_{upper} \quad (8)$$

또는 변수 C 가 고정된 부분집합(subset)을 가지는 경우다.

활동적인 제한조건(active constraint)과 비활동적인 제한조건(passive constraint)의 개념은 다음과 같이 정의된다. 제한조건이 활동적이라면 시스템의 주어진 변수벡터가 해석 중에 다음과 같이 보여진다.

$$g_j = \bar{g}_j \quad (9)$$

이에 만족하지 않는 제한조건은 비활동적으로 고려한다.

제한조건이 있는 구조 최적화 문제는 활동적인 제한조건과 목적함수를 연계하여 식 (10)과 같이 라그랑지안 함수(lagrangian function) \mathcal{L} 을 이

용하여 다시 정식화할 수 있다⁽¹⁰⁾.

$$L(C, \lambda) = F(C) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (g_j - \bar{g}_j) \quad (10)$$

라그랑지안 함수의 정체조건(stationary condition)은 원래의 최적설계 문제의 필요조건에 상응한다. 이 조건은 라그랑지안이 모든 변수에 대한 편미분 방정식이 영을 가지는 것으로 식 (11)과 같이 정의될 수 있다.

$$\frac{\partial L}{\partial C_i} = \frac{\partial F}{\partial C_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial C_i} = 0 \quad (11) \quad i=1, \dots, n$$

식 (11)은 식 (12)과 같이 n 개의 식으로 표현될 수 있다.

$$\sum_{j=1}^m e_{ij} \lambda_j = 1 \quad i=1, \dots, n \quad (12)$$

여기서, e_{ij} 는 제한조건과 목적함수의 민감도 편미분치이고 이는 다음과 같다.

$$e_{ij} = \frac{N_{ij}}{\nabla F_i} \quad (13)$$

여기서, N_{ij} 는 i 번째 변수에 대한 j 번째 제한함수의 편미분치이고, ∇F_i 는 i 번째 변수에 대한 목적함수의 편미분치이다.

N_{ij} 와 ∇F_i 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \frac{\partial g_j}{\partial C_i} \\ \nabla F_i &= \frac{\partial F}{\partial C_i} \end{aligned} \quad (14)$$

만약 ∇F_i 가 영이면, 식 (11)에서 유도된 식들에 대한 수정이 필요하다. 한가지 방법은 활동적 집합(active set)으로부터 변수를 배제하는 것이다. 이것은 남겨진 변수만을 포함하는 $(n-1)$ 개의 방정식을 의미한다. 식 (12)은 최적점의 필요조건이며, 또한 이것은 비선형 프로그래밍(nonlinear programming)에서 쿤-터커조건(Kuhn-Tucker

condition)과 연계된다. 이 조건들을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$e\lambda = 1 \quad (15)$$

e, λ 와 1 의 차원은 각각 $n \times m, m \times 1, n \times 1$ 이다.

식 (15)의 양변에 $e^T \overline{A}$ 를 곱하면

$$H\lambda = z^* \quad (16)$$

여기서, 가중행렬(weighting matrix) \overline{A} 는 $n \times n$ 의 대각행렬(diagonal matrix)이고 이것의 행렬요소는 다음과 같이 가정한다.

$$\overline{A}_{ii} = \nabla F_i C_i \quad (17)$$

또한 행렬 H 와 z^* 는 다음과 같이 주어진다.

$$H = e^T \overline{A} e, z^* = e^T \overline{A} 1 \quad (18)$$

H 가 비특이 행렬(nonsingular matrix)이라면 식 (16)에서 라그랑지안 승수(lagrangian multipliers)를 얻을 수 있다. 만약 모든 라그랑지안 승수가 음수이면, 그때에 제한조건들은 독립적 집합(independent set)이다. 양의 값을 갖는 라그랑지안 승수는 의존상태를 나타내고, 활동적인 제한조건의 집합에서 그것들을 제거시켜야 한다. 남겨진 활동적 제한조건을 가지고 다시 정식화한 것은 반복계산 알고리즘(iterative algorithm)에 사용되는 라그랑지안 승수를 제공한다.

2.3.2 반복계산 알고리즘

최적화의 목적은 최적의 설계변수 집합을 찾는 것이다. 이것은 목적함수를 최소화시키는 동안에 앞에서 정의한 식 (6)~식 (8)과 같은 모든 제한조건들이 만족해야 한다. 최적조건법에서의 기본적인 접근방법은 리사이징 알고리즘(resizing algorithm)과 스케일링 알고리즘(scaling algorithm)이다. 리사이징 알고리즘은 매우 간단하다.

이것은 앞 절에서 기술한 최적조건으로부터 직접적으로 유도된다. 식 (12)가 최적조건이며, 이것을 다시 적으면 다음과 같다.

$$1 = \sum_{j=1}^m e_{ij} \lambda_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

e_{ij} 의 요소는 제한조건과 목적함수의 경사도(gradient)로부터 나온다. 라그랑지안 승수 λ 는 식 (16)을 이용하여 얻거나 단일 제한조건 근사는 일정조건하에서 사용될 수 있다⁽¹¹⁾. 식 (12)로부터 간단한 리사이징 알고리즘이 유도된다. 그것은 다음과 같다.

$$C_i^{\nu+1} = C_i^\nu \left[\sum_{j=1}^m e_{ij} \lambda_j \right]^{1/\alpha} \quad (20)$$

여기서, ν 는 반복 계산 회수, m 는 활동적 제한조건의 개수이며, α 는 각 반복 계산 주기에서 단계값(step size) 조정 매개변수(parameter)이다.

α 는 반복 계산과정에서 얼마나 빨리 혹은 느리게 최적화에 접근하는지를 조정하는 매개변수이다. α 의 값이 크면 변수의 변화가 적어지고 반복이 느려진다. 반대로 α 가 작아지면 수렴 속도는 향상이 되나 최적점을 찾지 못하는 경우가 발생한다.

2.3.3 단일 제한조건에서의 최적조건법의 적용

2.2절에서 정의된 밀도함수를 적용한 문제정의에 최적조건법을 적용하면 이것은 다음과 같이 표현되어질 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } F(C) \\ & \text{subject to : } g(C) \leq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

이 문제에서 Kuhn-Tucker 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial F}{\partial C_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_i} = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (22)$$

이것은 식 (23)과 같이 표현될 수 있다.

$$\lambda = -\frac{\partial F}{\partial C_i} / -\frac{\partial g}{\partial C_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (23)$$

식 (23)의 우변에서 분모는 i 번째 설계변수 변화에 따른 제한조건의 변화이고, 분자는 i 번째 설계변수 변화에 따른 목적함수의 영향이다. 따라서 설계변수에 대한 목적함수와 제한조건의 영향을 식 (23)으로 연계시켜주며 모든 설계변수가 최적점에서는 제한조건의 변화에 따른 비용효과가 동일해짐을 알 수 있다. 구성된 모든 요소가 양이면 다음의 리사이징 룰(resizing rule)을 적용할 수 있다.

$$C_i^{new} = C_i^{old} (\lambda e_i)^{\frac{1}{\eta}} \quad (24)$$

여기서, $e_i = -\frac{\partial g}{\partial C_i} / -\frac{\partial F}{\partial C_i}$ 이며, η 는 단계값 조정 매개변수이다.

설계 문제가 최적화 상태에서 제한조건이 활동적이라면 이것은 $g(C) \approx 0$ 로 근사될 것이며, 이것으로부터 유도되어진 식 (25)을 이용하여 라그랑지안 승수가 계산되어진다.

$$\lambda = \left[\frac{1}{g_0} \sum_{i=0}^n C_i \frac{\partial g}{\partial C_i} e_i^{-\frac{1}{\eta}} \right]^{\eta} \quad (25)$$

3. 민감도 해석(Sensitivity Analysis)

본 연구에서는 적용할 민감도 대상이 유한요소 해석 모델이므로 여기서는 연속체 방정식이 이산화 되어질 때에 한하여 논의한다⁽¹²⁾.

3.1 정적응답의 민감도 해석

노드 변위 벡터 U 의 항인 평형 지배 방정식은 유한요소 모델에서 다음과 같은 형태를 이룬다.

$$K U = f \quad (26)$$

여기서, K 는 대칭 강성 행렬(symmetric stiffness matrix, $n \times n$), U 는 변위 벡터이고, f

는 적용된 하중 벡터(load vector)이다.

일반적으로 K 와 f 는 설계변수 C 의 함수이다. 전형적인 변위의 함수는 다음과 같다.

$$g = g(U, x), \quad U = U(C) \quad (27)$$

변위 도함수와 그들의 함수들의 해석적 계산은 3가지의 방법에 의해 수행되어진다. 이 3가지 방법은 직접법과 보조변수법, 가상하중법이고 그 중 직접법(direct or design space method)은 식 (26)과 식 (27)의 미분으로 도출된다.

$$K \frac{dU}{dC} = \frac{\partial f}{\partial C} - \frac{\partial K}{\partial C} U \equiv R_x \quad (28)$$

$$\frac{dg}{dC} = \frac{\partial g}{\partial C} + \left(\frac{\partial g}{\partial U} \right)^T \frac{dU}{dC} \quad (29)$$

식 (28)에서 dU/dC 에 대하여 풀고 이 dU/dC 를 식 (29)에 치환한다.

4. 적용 사례

본 연구에서는 외팔보 평판, 단순지지 평판의 위상 최적설계를 수행하였다. 이를 위하여 사용된 구조해석 프로그램은 MSC/NASTRAN Ver. 70을 사용하였다. 구조해석으로부터 얻어진 변위의 설계변수에 대한 민감도 해석을 수행하고 최적조건법을 이용하여 설계변수를 반복적으로 계산하여 최적화를 수행하였다.

4.1 외팔보 평판(Cantilever plate)

Fig. 1과 같이 가로와 세로의 비가 다른 직사각형 평판에 왼쪽을 완전히 구속하고 이 외팔보 평판의 오른쪽 정 중앙부에서 하중을 작용시킨 경우에 대하여 위상 최적설계를 수행하였다. 이때 사용된 물성치는 일반적인 강을 사용하였고 그 물성치는 Table 1과 같다. 이런 경계조건과 하중조건을 포함시켜 유한요소 해석 모델인 Fig. 1을 선 해석(pre-analysis)하여 관심점인 하중 작용점의 변위를 산출하였다. 이 변위에 50%만

허용하는 제한조건을 부과하였으며 이때에 목적 함수인 질량을 최소화하는 문제로 정의하고 최적화를 수행하였다.

최적화 수행의 결과는 Fig. 2와 같다. Fig. 2는 부과된 제한조건인 초기 변위에 50%의 변위가 발생하며 질량을 최소화한 구조의 위상을 보여주는 것으로 이 그림에서 표현한 것은 증가 C의 값을 나타낸 것이다.

Table 1 Material Property

Material	Steel
Young's Modulus(GPa)	210
Shear Modulus(GPa)	80
Poisson's Ratio	0.3
Density(kg/m ³)	7850

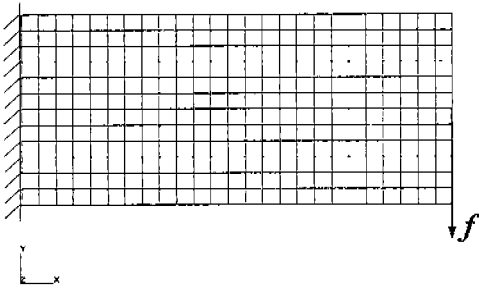


Fig. 1 Initial design domain of the cantilever plate

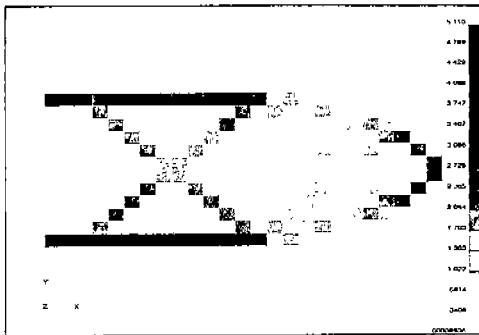


Fig. 2 Optimum topology design of the cantilever plate

Fig. 3과 Fig. 4는 제한조건과 목적함수의 반복계산에 따른 변화를 나타낸 것이다. Fig. 3은 표준화된 제한조건(normalized constraint)의 변화로서 선 해석 변위의 50%를 제한한 제한조건이 최적의 위상을 가짐에 따라 0으로 수렴함을 알 수 있다. Fig. 4는 목적함수인 질량의 변화이며, 초기 질량보다 최적 위상을 가질 때 약 41%의 질량이 감소되었음을 보여준다.

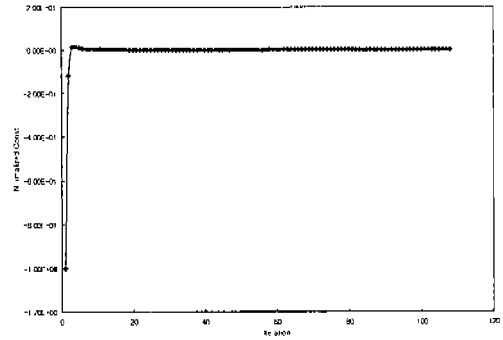


Fig. 3 Variation of constraint(Cantilever plate)

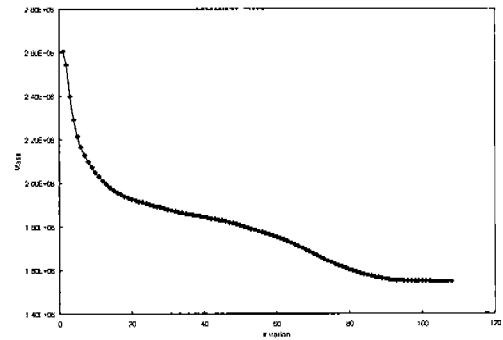


Fig. 4 Variation of objective function(Cantilever plate)

4.2 단순지지 평판(Simple supported plate)

왼쪽 하단부 끝점은 완전고정하고 오른쪽 하단부 끝점은 y방향만 구속한 단순지지 평판의 설계영역을 Fig. 5와 같이 설정하였다. 이 단순지지 평판의 하단부 정중앙에 하중을 작용 시켰다. 제한조건은 선 해석 후 산출된 변위에 50%만을 목표변위로 설정하였다.

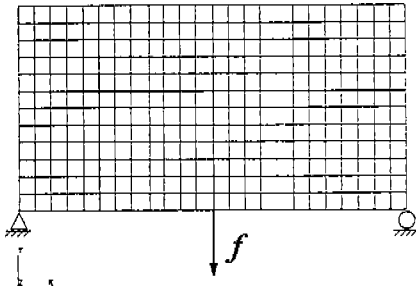


Fig. 5 Initial design domain of the simple supported plate

최적화 수행 결과로 Fig. 6과 같은 최적위상을 얻었다. 이것은 변위의 50%을 제한하고 질량을 최소화 할 때의 단순지지 평판의 최적위상이다. 이 그림에 표현된 변수는 설계 매개변수인 등가 C를 나타낸 것이다. Fig. 7은 이 최적화 수행과정 중의 표준화된 제한조건의 변화이다. 표준화된 제한조건이 0에 잘 수렴함을 알 수 있다. 이것은 정의된 제한조건을 잘 만족하고 있다는 것을 의미한다. Fig. 8은 목적함수의 변화를 나타낸 것이다. 목적함수는 최적화의 결과로 약 31%가 감소하였다.

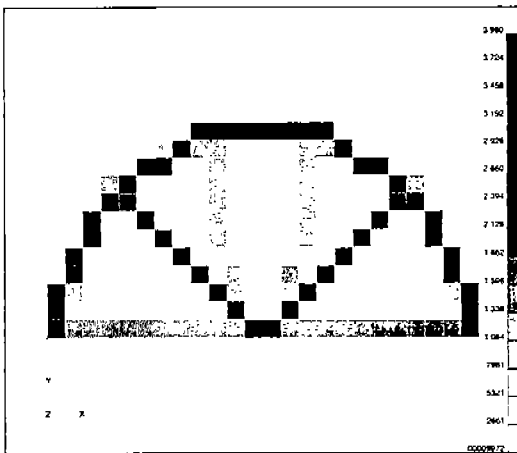


Fig. 6 Optimum topology design of simple supported plate

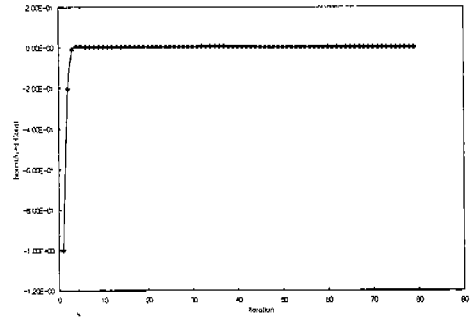


Fig. 7 Variation of constraint(Simple supported plate)

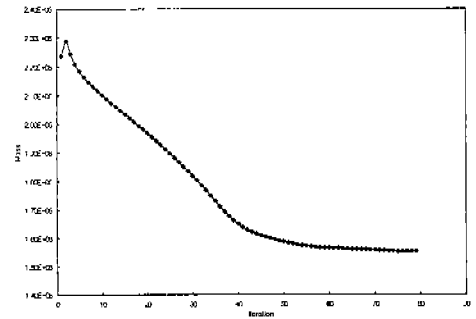


Fig. 8 Variation of objective function(Simple supported plate)

4.3 수학적 프로그래밍기법과의 비교

앞 절의 외팔보 평판과 단순지지 평판을 수학적 프로그래밍기법을 이용하여 위상 최적설계를 수행하였다. 최적화에 사용된 알고리즘은 Table 2와 같고, 밀도함수법을 적용하였으며 앞의 최적조건법과 동일한 지수들을 사용하였다. 이때에 구조해석은 MSC/NASTRAN Ver.70을 사용하였다.

Table 2 The algorithm using in optimization

Whole routine algorithm	Augmented Lagrange Multiplier Method
Search direction detecting algorithm	Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno variable metric method
One-dimensional search algorithm	Golden Section method followed by polynomial interpolation

수학적 프로그래밍 기법을 이용한 외팔보 평판과 단순지지 평판의 최적화에는 각각 4906회와 6745회의 함수계산(Function evaluation)이 수행되었다. 최적화 소요시간은 외팔보 평판의 경우 약 28시간이고 단순지지 평판의 경우 약 32시간이 시간이 소요되었다.

수학적 프로그래밍기법과 최적조건법의 평균적 최적화수행시간의 비율은 약 8:1정도이고 Fig. 9와 같이 최종 수렴상태의 Topology가 Fig. 2와 Fig. 6에 비해 선명성이 떨어짐을 확인할 수 있었다. 이 수렴된 구조자체의 차이가 바로 또 다른 Topology를 의미하며 이는 Topology Optimization의 다른 Local Min.에 빠진 것임을 알 수 있다. 평균적 최적화수행시간이 최적조건법보다 긴 이유는 민감도 해석이 구조해석을 동반하여 수행되고 낮은 수렴성 때문으로 사료된다.

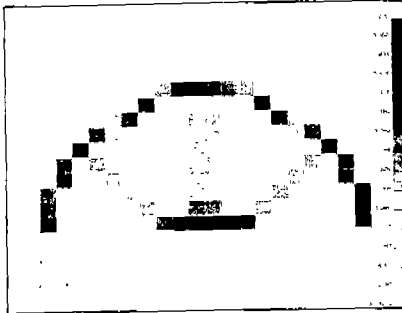
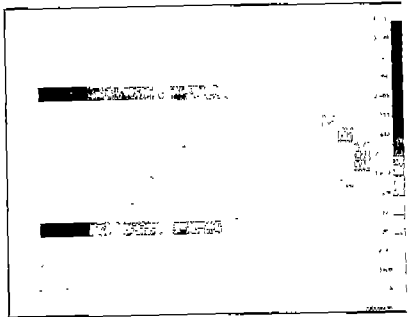


Fig. 9 Optimum topology design using mathematical programming

5. 결 론

경량화와 고강성을 동시에 만족하는 기계 구조물을 만들기 위한 위상 최적설계의 방법론을 제시하였다. 위상 최적화는 기계 구조물의 초기의 개념 설계 단계에서 작용 하중조건, 설계 목적과 설계 영역만을 가지고 최적의 위상을 얻을 수 있으므로 초기 설계 단계에서 매우 유용한 기법이다. 그러나 이런 위상 최적설계 기법의 유용성에도 불구하고 그 동안 수학적 정의의 어려움과 많은 계산을 요구함으로써 그 접근이 용이하지 않았다.

본 연구에서는 개념설계 단계에서 적용되는 위상 최적화의 수학적 문제 정의에 밀도함수법을 이용하여 설계변수를 매개변수 C 로 단일화하여 정의함으로써 보다 간단한 표현형태와 계산의 수를 줄일 수 있었다. 또한 사례연구를 통하여 수학적 프로그래밍기법보다 최적조건법을 이용하는 경우가 약 7~8배 이상의 계산시간이 더 절감되고, 설계변수들의 우수한 수렴성을 입증하였다.

후 기

본 논문은 한국과학재단 산하 성균관대학교 산업설비 안전성평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. U. Kirsch, "Optimal Topologies of Truss Structures", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 72, pp. 15-28, 1989.
2. M.P. Bendsøe and N. Kikuchi, "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 71, pp. 197-224, 1988.
3. H.P. Mlejnek and R. Schirmacher, "An

- Engineer's Approach to Optimal Material Distribution and Shape Finding", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 106, pp. 1-26, 1993.
4. M.P. Bendsøe, J.M. Guedes, S. Plaxton and J.E. Taylor, "Optimization of Structure & Material Properties for Solids Composed of Softening Material", *IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical System*, Kluwer Academic Publishers, pp. 17-24, 1996.
 5. L.A. Krog and N. Olhoff, "Topology Optimization of Integral Rib Reinforcement of Plate and Shell-Structures with Weighted-Sum and Max-Min Objectives", *IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical System*, Kluwer Academic Publishers, pp. 171-179, 1996.
 6. R.B. Haber, M.P. Bendsøe and C.S. Jog, "Perimeter Constrained Topology Optimization of Continuum Structures", *IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical System*, Kluwer Academic Publishers, pp. 113-120, 1996.
 7. R.J. Yang and C.M. Lu, "Topology Optimization with Superelements", *AIAA Journal*, Vol.4, No.7, pp. 1533-1535, 1996.
 8. H.C. Gea, "Topology Optimization: A New Microstructure-Based Design Domain Method", *Computers & Structures*, Vol.61, No.5, pp. 781-788, 1996.
 9. S. Wang, K.K. Choi, and H.T. Kulkarni, "Application of Continuum Sensitivity Analysis and Optimization to Automobile Structures", *IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical System*, Kluwer Academic Publishers, pp. 317-324, 1996.
 10. V.B. Venkayya, "Generalized Optimality Criteria Method", *Progress in Astronautics and Aeronautics*, vol. 150, pp. 151-182, 1993.
 11. V.B. Venkayya, "Optimality Criteria: A Basis for Multidisciplinary Design Optimization", *Journal of Computational Mechanics*, Vol. 5, No. 1, pp. 1-21, 1989.
 12. H.M. Adelman and R.T. Haftka, "Sensitivity Analysis of Discrete Systems", *Progress in Astronautics and Aeronautics*, vol. 150, pp. 291-315, 1993.
 13. J.M. Guedes and N. Kikuchi, "Preprocessing and Postprocessing for Materials Based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* 83, pp. 143-198, 1990.
 14. S.K. Youn and S.H. Park, "A Study on the Shape Extraction Process in the Structural Topology Optimization using Homogenized Material", *Computers & Structures*, Vol.62, No.3, pp. 527-538, 1997.
 15. 성재혁, 광병만, "밀도민감도 해석을 이용한 위상최적설계", *한국자동차공학회 춘계학술대회*, Vol.2, pp. 183-188, 1997.
 16. K.U. Bletzinger, K. Maute, R. Reiteringer and E. Ramm, "Layout of Linear and Nonlinear Structures by Shape and Topology Optimization", *IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical System*, Kluwer Academic Publishers, pp. 49-56, 1996.