

수치미분을 이용한 고무의 유한요소 해석시 수렴성 연구

A Study on the Convergency of the Finite Element Analysis of Rubber Using Numerical Differentiation Method

권영두*, 노권택**, 이창섭***, 홍상표****
Youngdoo Kwon, Kwontack Roh, Changseop Ri, Sangpyo Hong

ABSTRACT

A finite element procedure for the analysis of rubber-like hyperelastic material is developed. The volumetric incompressibility condition of the rubber deformation is included in the formulation by using penalty method. In this paper, the behavior of the rubber deformation is represented by hyperelastic constitutive relations based on a generalized Mooney-Rivlin model. The principle of virtual work is used to derive nonlinear finite element equation for the large displacement problem and presented in total-Lagrangian description.

The finite element procedure using analytic differentiation resulted in very close solution to the result of the well known commercial packages NISA II and ABAQUS. Numerical tests show that the results from the numerical differentiation method coincide very well with those from the analytic method and the well known commercial packages in static analysis. The convergency of rubber using ν iteration method is also discussed.

주요기술용어 : Finite Element (유한요소), Hyperelastic Material (초탄성체), Rubber (고무), Incompressibility (비압축성), Analytic Differentiation (해석적 미분), Numerical Differentiation Method (수치미분법)

Nomenclature

- C_{rs} : Mooney-Rivlin coefficient, Kgf/mm^2
- N.D.M. : numerical differentiation method
- A.D.M. : analytic differentiation method

1. 서론

고무는 일상생활은 물론 기계 및 자동차공업분야에서도 많이 사용되는 매우 중요한 기계재료이다. 고무재료는 생산원가가 낮고 또한 고무가 가지는 특유의 유연성과 가공성 및 탄성 등 많은 장점을 가지고 있으며, 이는 다른 금속재료나 무기재료로는 해결할 수 없는 기능성이라 할 수 있다. 현재 고무재료는 자동차에 사용하는 각종호스나 방진고무류, oil seal 계통, 벨트 및 cover류

- * 경북대학교 기계공학부
- ** 경북대학교 대학원
- *** 정회원, 계명대학교 화학과
- **** 평화산업주식회사 기술연구소

등 많은 용도로 사용되고 있으며, 이는 운행중에 있는 자동차의 부품중 약 200여종에 해당한다. 이들 중에서 고무호스는 자동차의 여러 부위를 연결하며 각종 유체 및 gas를 수송하는 역할을 담당하고 있는 데, 유체통과시 고무재료의 특성상 내식성과 내압성이 부족하여 외경의 팽창, 길이의 수축 및 비틀림 변형과 같은 외형의 변화가 오므로 수명이 단축되거나 기존의 예상과열압이 잘 적용되지않는 경향이 있다. 이러한 이유로 고무재료가 가진 비압축성이나 비선형성 등에 기인하여 해석적인 연구는 물론 수치해석적인 연구(유한요소법 등)에서도 많은 어려움이 있다.[1-9] 그리고 고무문제에서 자주 발생하는 좌굴, 역좌굴 및 발산문제 또한 어려움을 더하여 고무연구자들을 괴롭히고 있다. 고무연구자들의 이러한 어려움을 일부 덜고자 본 연구를 수행하였다.

고무재료는 초탄성체(hyperelastic material)로서 그 특성은 변형을 에너지 함수(strain energy function)로 표현될 수 있다. 특히 고무는 그 거동이 비선형, 비압축성 및 대변형의 특성을 가지고 있으므로 그 해는 탄성이론에 근거한 비선형 편미분방정식으로 표현된다. 그러므로 아주 단순한 기하학적 모델을 제외하고는 해석해를 얻는 것이 불가능하므로 유한요소해석같은 수치해석이 필요하다. 또한 재료와 기하학적 비선형성(geometric nonlinearity)외에도 비압축성을 효과적으로 취급하기 위해 여러 가지 유한요소 해석기법이 제시되어왔다.[10-12][16-17] 대표적인 방법으로는 벌칙 함수(penalty function)을 사용하는 방법이다. 이 방법은 변위에 대해서만 변수로 하여 해석하고 비압축성조건을 벌칙항을 사용하여 처리한다.

본 논문에서는 가상일의 원리에서 출발하여 대변형, 대변형율이 수반되는 고무와 같은 초탄성체에 관한 유한요소식들을 유도하고, 고무의 비압축성을 고려하기 위해 벌칙함수법(penalty function method)을 사용한다. 변형을 에너지 함수는 일반적으로 사용되는 단순 Mooney-Rivlin 모델을 포함하는 확장형태인 일반화된

Mooney-Rivlin 모델의 고차항까지를 사용하고, 변형을 에너지 함수에 대한 편미분과정을 해석적 미분 및 수치미분의 기법을 통하여 개발한 등방성 3차원 20절점 고무요소 프로그램으로 비선형 유한요소해석하였다. 수치 미분의 기법을 이용한 수치결과와 해석적 미분에 의해 얻어진 결과의 일치성을 확인하고, 상용 패키지인 NISA II [13], ABAQUS[14]와 비교·분석하여 수치미분을 이용하여 개발한 등방성 3차원 20절점 고무요소 프로그램의 타당성을 검증한다. 그리고 고무재료와 같은 초탄성체의 거동해석에 정확성을 기하고, 포아슨 비에 따른 수렴성의 문제점을 해결하고자 한다.

2. 고무의 유한요소해석

가상일의 원리에서 출발한 고무의 유한요소 평형식은 변형을 에너지함수(W)와 벌칙함수(penalty function, U) 및 벌칙계수(penalty coefficient, α)를 포함한 식으로 나타내면 다음 식 (1)과 같다.

$$([{}^t_0 K_L] + [{}^t_0 K_{NL}]) \{ \Delta U \} = \{ {}^{t+\Delta t} P \} - \{ {}^t_0 F \} \quad (1)$$

여기서,

$$[{}^t_0 K_L] = \int_{\circ V} [{}^t_0 B_L]^T [D] [{}^t_0 B_L] d(\circ V)$$

$$[D] = [\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} + \frac{\partial}{\partial \epsilon_{kl}} (\frac{U}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}})]$$

$$[{}^t_0 K_{NL}] = \int_{\circ V} ([{}^t_0 B_{NL}]^T [{}^t_0 S] [{}^t_0 B_{NL}]) d(\circ V)$$

$$[{}^t_0 S] = [{}^t_0 (\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{U}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}})]$$

$$\{ {}^t_0 F \} = \int_{\circ V} [{}^t_0 B_L]^T \{ {}^t_0 S \} d(\circ V) \text{이다.}$$

$[\int_0^t K_L]$ 항은 시간 0를 기준으로 한 시간 t 에
서의 선형 강성행렬이고 $[\int_0^t K_{NL}]$ 항은 비선형
강성행렬이며 $\{ \int_0^t F \}$ 항은 등가절점력을 나타낸
다.

2.1 변형을 에너지 함수

고무와 같은 초탄성체의 비압축성 효과를 나타
내기 위해 벌칙함수와 벌칙계수를 결정하고 변형
을 에너지함수로 표현되는 고무의 구성식은 일반
적으로 사용되는 단순 Mooney-Rivlin 모델을
포함하는 확장형태인 일반화된 Mooney-Rivlin
모델의 다수항까지를 사용할 때의 함수식으로 나
타내었다. 일반화된 Mooney-Rivlin 모델에 의한
변형을 에너지 함수를 Cauchy-Green deformation
tensor(C_{ij})에 대한 불변량 I_1, I_2, I_3 의 함수로 표
시된다. 이때 비압축성 재료의 경우 I_3 는 1의 값
을 가짐으로 변형을 에너지 함수(W)는 I_1, I_2
의 함수로 나타내면 식 (2)로 표현된다.

$$W = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} C_{rs} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^s \quad (2)$$

식 (2)에서 C_{rs} 는 재료상수이고, 일반화된
Mooney-Rivlin 모델은 무변형시 응력이 0이 되
도록 보정한 함수[12]를 사용하며 초탄성체의 전
체 포텐셜에서 비압축성 거동을 효과적으로 처리
하기 위하여 제한함수를 사용한다. 본 연구에서
이러한 비압축성 제한조건을 만족시키기 위해 벌
칙함수(penalty function) 및 벌칙계수(
penalty coefficient, Peeken)를 다음 식으로
사용한다.

$$\triangleright \text{벌칙함수 } U \quad U(I_3) = \frac{1}{2} \ln I_3$$

$$\triangleright \text{벌칙계수 } \alpha$$

$$\frac{1}{\alpha} = 6(C_{10} + C_{01}) \times \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} - 4(C_{10} + 2C_{01})$$

식(2)에서 I_1, I_2 의 선형항 만을 취한 단순

Mooney-Rivlin 함수의 경우만을 고찰해볼 때
 D_{ijk} 의 첫 번째 성분 D_{III}^P 을 변형을 에너지함수
 W 로부터 유도되는 항(D_{III}^G)과 비압축성 조건에
관계된 항(U_{III})으로 나타내면

$$D_{III}^P = D_{III}^G + U_{III} = 4(C_{10} + 2C_{01}) + \frac{1}{\alpha}$$

이고, Hooke의 구성식으로 부터의 D_{ijk} 의 첫
번째 성분 D_{III}^H 을 구하면

$$D_{III}^H = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{이다.}$$

여기서 아주 작은 변형에 있어서, 다시 말해서
 $\sigma = 0, \varepsilon = 0$ 의 점에 해당하는 경우에는
 $D_{III}^G + U_{III} = D_{III}^H$ 로 등치시킬 수 있고 벌칙계
수를 역수로 취하면 상기 식에 나타낸 $1/\alpha$ 를 구
할 수 있다. 여기서 비압축성 재료 거동에서
 $U(I_3) \rightarrow 0, I_3 \rightarrow 1$ 을 잘 나타낼 수 있기 때
문에 벌칙함수는 $U(I_3) = \frac{1}{2} \ln I_3$ 를 사용할
수 있고 ν 가 극한 값인 0.5일 때 벌칙계수 α 은
0으로 접근하여 발산하게 된다.

2계수 Mooney-Rivlin 모델에서는 2계수
(C_{10}, C_{01})의 재료상수를 갖는 변형을 에너
지 함수를 사용한다. 벌칙함수를 사용하여 초기
응력상태와 비압축성 거동을 나타내기 위해 보정
하여 나타낸 2계수 변형을 에너지 함수는 다음
식 (3)과 같이 나타낸다.

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) - (2C_{10} + 4C_{01}) \frac{1}{2} \ln I_3 + \frac{1}{2\alpha} U^2(I_3) \quad (3)$$

2차 Piola-Kirchhoff 응력 텐서는 변형을 에
너지 함수를 Green-Lagrange 변형율에 대한 편
미분으로 표현할 수 있으므로, 다음 식 (4)으로
나타낼 수 있다. 여기서 C_{ij} 는 Cauchy-Green
deformation tensor이고 δ_{ij} 는 Kronecker
delta symbol이며 e_{ijk} 는 permutation symbol
이다.

$$\begin{aligned}
S_{ij} &= C_{10} \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + C_{01} \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}} \\
&+ \left(\frac{U(I_3)}{\alpha} - 2C_{10} - 4C_{01} \right) \frac{1}{2I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{ij}} \\
&= 2C_{10} \delta_{ij} + C_{01} (2I_1 \delta_{ij} - 2C_{ij}) \\
&+ \left(\frac{1}{2\alpha} \ln I_3 - 2C_{10} - 4C_{01} \right) \\
&\times \left(\frac{1}{2I_3} e_{imn} e_{jnr} C_{mq} C_{nr} \right) \quad (4)
\end{aligned}$$

그리고 응력텐서를 Green-Lagrange 변형율에 대한 편미분으로 나타내면 구성물질의 특성텐서로서 D_{ijkl} 을 식 (5)에서 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
D_{ijkl} &= D_{ijkl}^d + U_{ijkl} \\
&= \frac{\partial S_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = 4 C_{01} \delta_{ijkl} - 4 C_{01} \delta_{ik} \delta_{jl} \\
&- (C_{10} + 2 C_{01}) [-A + B] \\
&+ \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{A}{2} - \frac{A}{2} \ln I_3 + \frac{B}{2} \ln I_3 \right] \quad (5)
\end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{I_3^2} \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{kl}} \\
&= e_{imn} e_{jnr} e_{km'i} e_{l'j'} C_{mq} C_{nr} C_{m'q'} C_{n'r'} / I_3^2 \\
B &= \frac{1}{I_3} \frac{\partial^2 I_3}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = 4 e_{ikn} e_{jln} C_{nr} / I_3
\end{aligned}$$

이다.

식 (5)에서 사용한 Cauchy-Green deformation tensor 불변량의 Green-Lagrange 변형율에 대한 도함수는 다음 식 (6) 및 식 (7)과 같이 나타낼 수 있었다.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 I_3}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \\
&= \frac{1}{3} [e_{imn} e_{jnr} (2 \delta_{mk} \delta_{ql} C_{nr} + C_{mq} 2 \delta_{nk} \delta_{rl}) \\
&+ e_{sin} e_{pr} (2 \delta_{sk} \delta_{pl} C_{nr} + C_{sp} 2 \delta_{nk} \delta_{rl}) \\
&+ e_{smi} e_{paj} (2 \delta_{sk} \delta_{pl} C_{mq} + C_{sp} 2 \delta_{mk} \delta_{ql})] \quad (6) \\
&= \frac{2}{3} [e_{ikn} e_{jlr} C_{nr} + e_{imk} e_{jil} C_{mq} \\
&+ e_{kin} e_{lpr} C_{nr} + e_{sik} e_{pjl} C_{sp} \\
&+ e_{kmi} e_{ljq} C_{mq} + e_{ska} e_{plj} C_{sp}] \\
&= \frac{2}{3} [C_{nr} (2 e_{ikn} e_{jlr}) + C_{mq} (2 e_{imk} e_{jil}) \\
&+ C_{sp} (2 e_{sik} e_{pjl})] \\
&= \frac{4}{3} [C_{nr} e_{ikn} e_{jlr} + C_{mq} e_{imk} e_{jil} + C_{sp} e_{sik} e_{pjl}] \\
&= \frac{4}{3} [e_{ikn} e_{jlr} C_{nr} + e_{ikm} e_{jla} C_{mq} + e_{iks} e_{jlp} C_{sp}] \\
&= 4 e_{ikn} e_{jlr} C_{nr}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{kl}} \\
&= \frac{1}{9} (e_{imn} e_{jnr} C_{mq} C_{nr} + e_{ism} e_{jpr} C_{sp} C_{nr} \\
&+ e_{ism} e_{jpa} C_{sp} C_{mq}) \times (e_{km'i} e_{l'j'} C_{m'q'} C_{n'r'} \\
&+ e_{ks'n} e_{lp'r} C_{s'p'} C_{n'r'} + e_{ks'm'} e_{lp'q'} C_{s'p'} C_{m'q'}) \\
&= e_{imn} e_{jnr} C_{mq} C_{nr} e_{km'i} e_{l'j'} C_{m'q'} C_{n'r'} \\
&= e_{imn} e_{jnr} e_{km'n} e_{l'j'r} C_{mq} C_{nr} C_{m'q'} C_{n'r'} \quad (7)
\end{aligned}$$

6계수 Mooney-Rivlin 모델에서는 6계수 ($C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, C_{30}$)의 재료상수를 갖는 변형을 에너지 함수를 사용하며 다음 식 (8)와 같다.

$$\begin{aligned}
W &= C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 \\
&+ C_{11} (I_1 - 3) (I_2 - 3) + C_{02} (I_2 - 3)^2 \\
&+ C_{30} (I_1 - 3)^3 - (2 C_{10} + 4 C_{01}) \frac{1}{2} \ln I_3 \\
&+ \frac{1}{2\alpha} U^2 (I_3) \quad (8)
\end{aligned}$$

2차 Piola-Kirchhoff 응력 텐서와 구성물질의 특성 텐서는 식 (4)와 식 (5)의 방법으로 구할 수 있으며 5계수 Mooney-Rivlin 모델은 6계수 모델

에서 C_{30} 항을 소거하면 얻을 수 있다.

2.2 수치 미분법

위에서는 해석적인 미분을 사용하여 2차 Piola-Kirchhoff 응력 텐서와 구성물질의 특성 텐서를 구하였다. 여기서는 수치 미분법을 이용하여 각각의 텐서를 구하는 방법을 제시 하고자 한다. Fig. 1과 같이 분할하였을 때 1차 도함수는 식 (9), 식 (10)과 같은 차분식을 얻을 수 있고 식 (11), 식 (12) 및 식 (13)에서는 고차 도함수를 차분식으로 표현할 수 있다.[15]

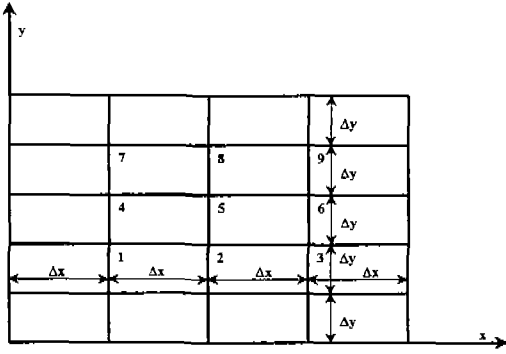


Fig. 1 Finite difference grid

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x,y} = \frac{1}{2\Delta x} [1 \quad -1] \begin{Bmatrix} w_{x+\Delta x,y} \\ w_{x-\Delta x,y} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x,y} = \frac{1}{2\Delta y} [1 \quad -1] \begin{Bmatrix} w_{x,y+\Delta y} \\ w_{x,y-\Delta y} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x,y} = \frac{1}{\Delta x^2} [1 \quad -2 \quad 1] \begin{Bmatrix} w_{x+\Delta x,y} \\ w_{x,y} \\ w_{x-\Delta x,y} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x,y} = \frac{1}{\Delta y^2} [1 \quad -2 \quad 1] \begin{Bmatrix} w_{x,y+\Delta y} \\ w_{x,y} \\ w_{x,y-\Delta y} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x,y} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1] \begin{Bmatrix} w_{x+\Delta x,y+\Delta y} \\ w_{x-\Delta x,y+\Delta y} \\ w_{x-\Delta x,y-\Delta y} \\ w_{x+\Delta x,y-\Delta y} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

상기 식을 이용하여 2차 Piola-Kirchhoff 응력 텐서는 다음 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{W(\varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}) - W(\varepsilon_{ij} - \Delta \varepsilon_{ij})}{\Delta \varepsilon_{ij}} \end{aligned} \quad (14)$$

그리고, 구성물질의 특성 텐서성분은 차분으로 나타내면 다음 식 (15)등으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} D_{rrrr} &= \frac{W(\varepsilon_{rr} + \Delta \varepsilon_{rr}) + W(\varepsilon_{rr} - \Delta \varepsilon_{rr})}{\Delta \varepsilon_{rr}^2} \\ &\quad - \frac{2W(\varepsilon_{rr})}{\Delta \varepsilon_{rr}^2} \\ D_{rrss} &= \frac{1}{4} \frac{W(\varepsilon_{rr} + \Delta \varepsilon_{rr}, \varepsilon_{ss} + \Delta \varepsilon_{ss})}{\Delta \varepsilon_{rr} \Delta \varepsilon_{ss}} \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{W(\varepsilon_{rr} - \Delta \varepsilon_{rr}, \varepsilon_{ss} - \Delta \varepsilon_{ss})}{\Delta \varepsilon_{rr} \Delta \varepsilon_{ss}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{W(\varepsilon_{rr} + \Delta \varepsilon_{rr}, \varepsilon_{ss} - \Delta \varepsilon_{ss})}{\Delta \varepsilon_{rr} \Delta \varepsilon_{ss}} \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{W(\varepsilon_{rr} - \Delta \varepsilon_{rr}, \varepsilon_{ss} + \Delta \varepsilon_{ss})}{\Delta \varepsilon_{rr} \Delta \varepsilon_{ss}} \end{aligned} \quad (15)$$

2.3 ν iteration 기법

포아슨 비가 0.5로 접근하면 유한요소해석이 불안정하며 발산하는 경우가 자주 발생하게 되나, 본 연구에서는 이를 해결하기 위하여 작은 포아슨 비로 수렴을 시킨 다음 그 크기를 조금씩 증가하여 반복 수렴을 시킴으로서 0.5에 아주 가까운 경우에도 발산하는 현상을 방지할 수 있었다.

Fig. 2의 flow chart와 같이 하중 step의 1 step이 끝나기 전 포아슨 비의 iteration과정을 수행 후 다음 하중 step으로 진행된다. ν iteration은 포아슨 비를 수 단계로 나누어 포아슨 비가 작은 단계에서부터 수렴한 후 다음 단계의 증가된 포아슨 비에서 수렴하게 하여 결국 원하는 포아슨 비에서 계산이 수렴하게 하는 방법이다. 잘 알려진 유사한 방법으로 SUMTs(Sequential Unconstrained Minimization Techniques)가 있는데 이 기술은 penalty

function formulation을 이용하여 constraint가 있는 문제 해를 구하기 위해 constraint대신 근사적인 penalty function이 있는 objective function의 최소값을 구하고 이때 얻어지는 해를 보다 실제적인 penalty function을 가진 문제의 초기치로 사용하여 순차적 계산을 수행하여 결국 constraint 문제에 대한 최적화된 값을 구하고자 하는 방법이다. 본 논문에서 사용한 포아슨 비는 $\nu_1=0.49, \nu_2=0.495, \dots, \nu_j=0.49999$ 을 사용하였다.

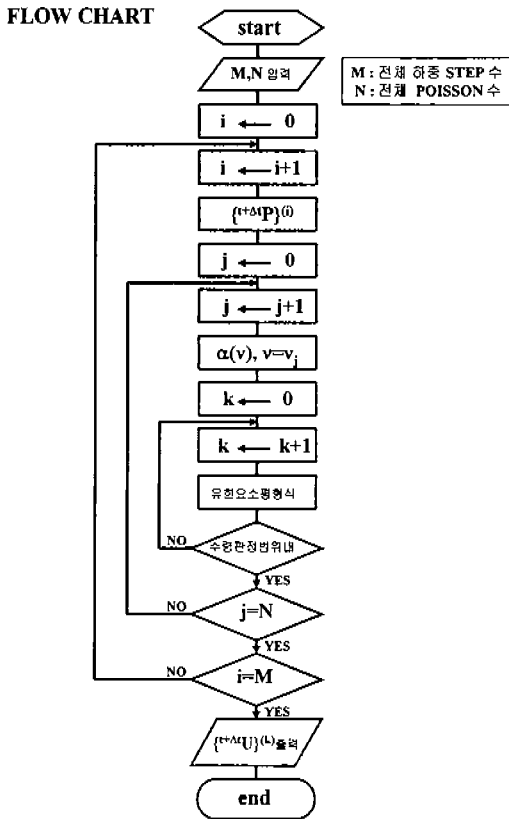


Fig. 2 Flow chart using ν iteration method

2.4 수치미분법의 적용 예

2.4.1 3차원 1요소 모델

등방성 3차원 20절점 고무요소의 1요소를 사용한 유한요소모델은 Fig. 3과 같고, 변형후의 형상은 Fig. 4와 같다. 해석적 미분법 및 수치미분법을 이용한 수치해석을 수행하였고 그 결과는 상용 펌웨어와도 비교하였다.

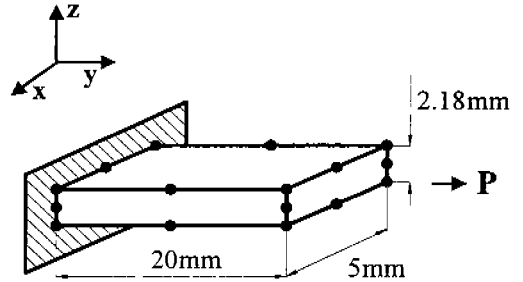


Fig. 3 Three dimensional geometry of one element under tension($P = 15\text{kgf}$)

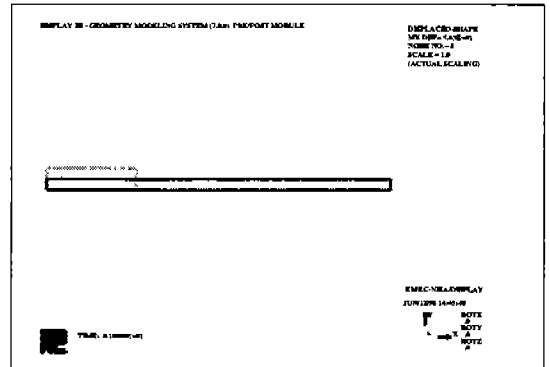


Fig. 4 Original and deformed mode(NISA II)

해석적인 미분과 수치미분($\Delta\epsilon = 1.E-04$)을 이용한 결과의 비교는 Fig. 5, Fig. 6 및 Fig. 7과 같다. Fig. 5는 2계수 Mooney-Rivlin 모델의 경우이고, Fig. 6은 5계수 모델의 경우이며 Fig. 7은 6계수 Mooney-Rivlin 모델의 경우이다. 세 경우 모두 수치미분법(numerical differentiation method : N.D.M.)의 결과와 해석적미분법(analytic differentiation method : A.D.M.)의 결과가 잘 일치함을 보여준다.

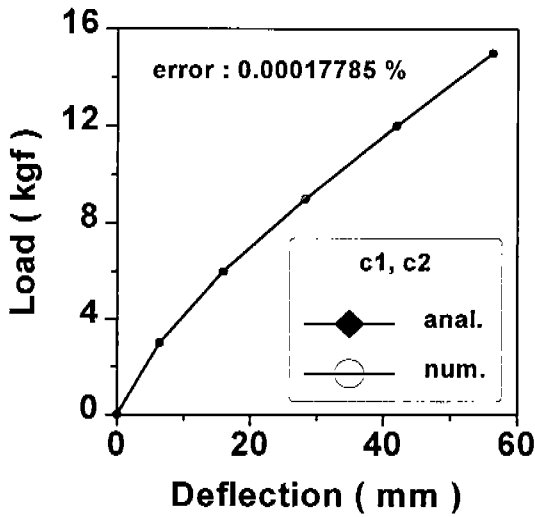


Fig. 5 Deflection comparison of N.D.M. with A.D.M. for 20-node rubber element(2계수 : $C_{10} = 0.18299, C_{01} = 0.00342, \nu = 0.49$)

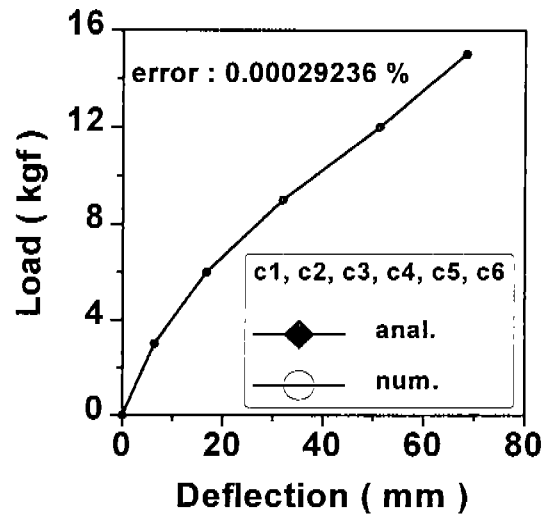


Fig. 7 Deflection comparison of N.D.M. with A.D.M. for 20-node rubber element(6계수 : $C_{10} = 0.179, C_{01} = 0.009, C_{20} = -0.0018, C_{11} = -8.46e-05, C_{02} = -3.71e-05, C_{30} = 4.45e-05, \nu = 0.49$)

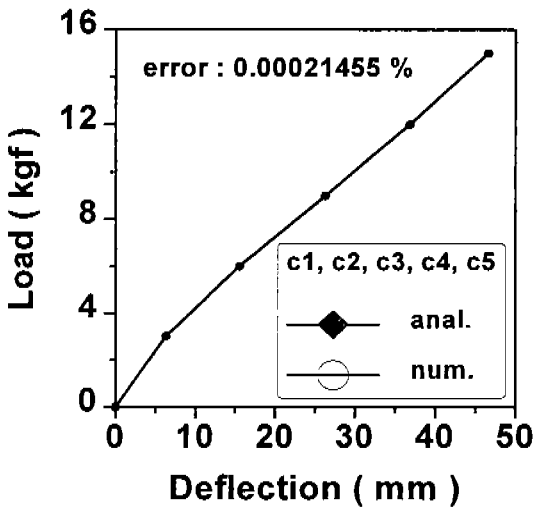


Fig. 6 Deflection comparison of N.D.M. with A.D.M. for 20-node rubber element(5계수 : $C_{10} = 0.179, C_{01} = 0.009, C_{20} = 0.0018, C_{11} = -8.46e-05, C_{02} = -3.71e-05, \nu = 0.49$)

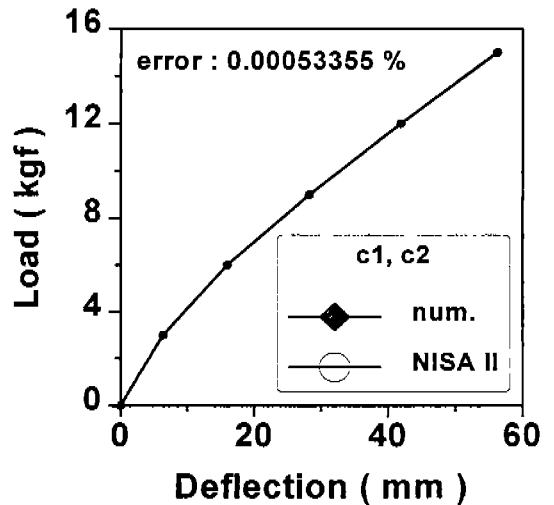


Fig. 8 Deflection comparison of N.D.M. with NISA II for 20-node rubber element(2계수 : $C_{10} = 0.18299, C_{01} = 0.00342, \nu = 0.49$)

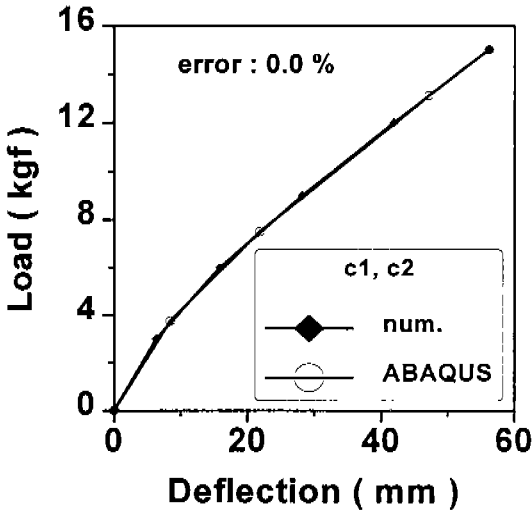


Fig. 9 Deflection comparison of N.D.M. with ABAQUS for 20-node rubber element(2계수 : $C_{10} = 0.18299$, $C_{01} = 0.00342$, $\nu = 0.499$)

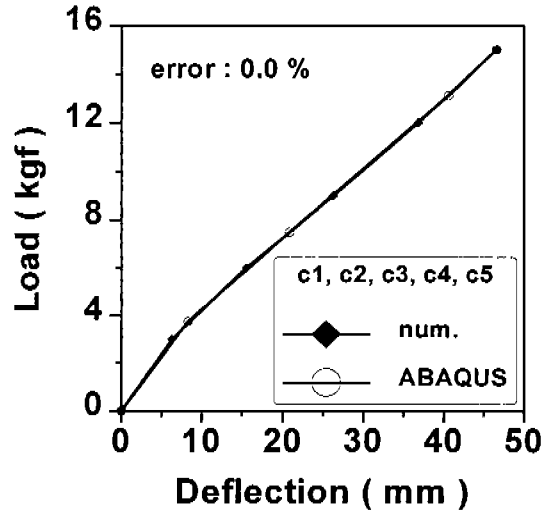


Fig. 10 Deflection comparison of N.D.M. with ABAQUS for 20-node rubber element(5계수: $C_{10} = 0.179$, $C_{01} = 0.009$, $C_{20} = 0.0018$, $C_{11} = -8.46e-05$, $C_{02} = -3.71e-05$, $\nu = 0.499$)

Fig. 8은 수치미분법과 NISA II[13]의 결과를 비교한 것으로 이경우에도 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

수치미분을 이용한 해석과 ABAQUS[14]결과 (4 digit)의 비교는 Fig. 9와 Fig. 10과 같다. Fig. 9는 2계수 Mooney-Rivlin 모델을 사용한 경우이고, Fig. 10은 5계수 Mooney-Rivlin 모델을 사용한 경우이다. 두 경우 모두 수치미분법에 의한 결과와 ABAQUS의 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

위의 결과를 종합하여 비교하면 Table 1과 같다.

2.4.2 4요소 모델(Peeken)

Peeken논문[12]의 검증용을 위한 모델로서 Fig. 11과 같은 Peeken이 사용한 모델을 이용하여 등방성 3차원 20절점 고무요소 모델링하였다.

수치미분을 이용한 정적해석결과와 Peeken논문[12] 결과를 검증하였을 때 하중방향(x축)의 끝단에서의 최대 변위과 변형율은 Table 2와 같고 그 결과를 Fig. 12와 같이 그래프로 비교·분석하였다.

Table 1 Comparison of displacements for single element model($\Delta\epsilon = 1.E-04$)

단위(mm)

종 류	ν	해석적미분	NISA II	ABAQUS	수치미분	error(%)
2 계수	0.490	56.2268	-	-	56.2267	0.00018
2 계수	0.490	-	56.2270	-	56.2267	0.00053
2 계수	0.499	-	-	56.21	56.21	0.0
5 계수	0.499	-	-	46.60	46.60	0.0

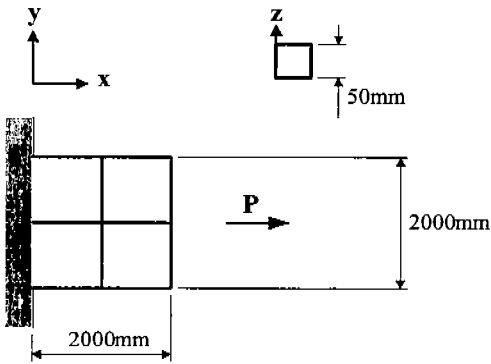


Fig. 11 Three dimensional geometry and finite element models of rubber under tension($P = 1.5\text{N/mm}^2$, $C_{10} = 0.37$, $C_{01} = 0.015$, $\nu = 0.48$)

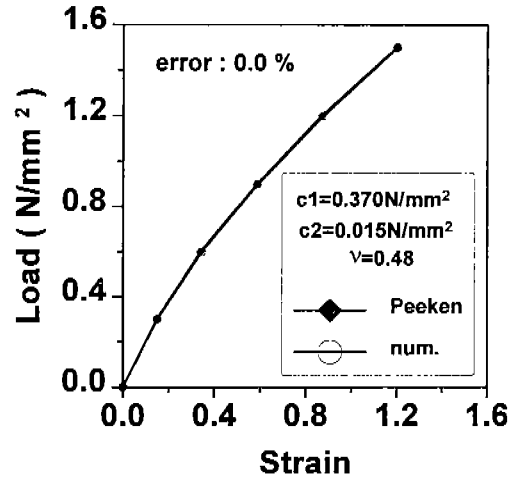


Fig. 12 Strain comparison of N.D.M. with Peeken's result for 20-node rubber element(2계수: $C_{10} = 0.37$, $C_{01} = 0.015$, $\nu = 0.48$)

2.4.3 24요소 일반 모델

등방성 3차원 20절점 고무요소의 24요소를 사용한 모델은 Fig. 13과 같다.

정적해석결과에서 하중방향(x축)의 변형과 응력의 분포를 나타내면 Fig. 14 및 Fig. 15과 같다. 이 모델은 수치미분법을 이용한 3차원 20절점 고무요소로 해석을 하였으며, 그 결과는 상용 팩케이지에 의한 해석결과와 비교하였다.

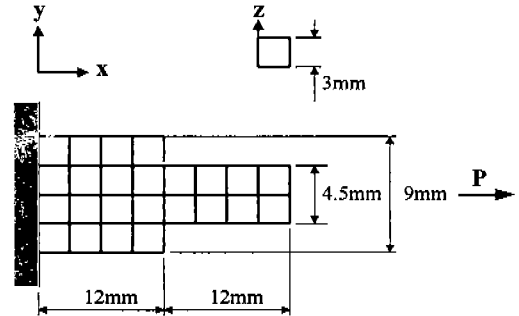


Fig. 13 Three dimensional geometry and finite element models of rubber under tension($P = 2.7\text{kgf}$, $C_{10} = 0.18299$, $C_{01} = 0.00342$, $\nu = 0.49$)

Table 2 Comparison of displacements for four elements model(Peeken)

단위(mm)

하 중 (N/mm^2)	peeken($\Delta X/X_0$)		수치미분($\Delta X/X_0$)		error(%)
	deflection (mm)	strain	deflection (mm)	strain	
1.5	2400.84	1.20042	2400.84	1.20042	0.0

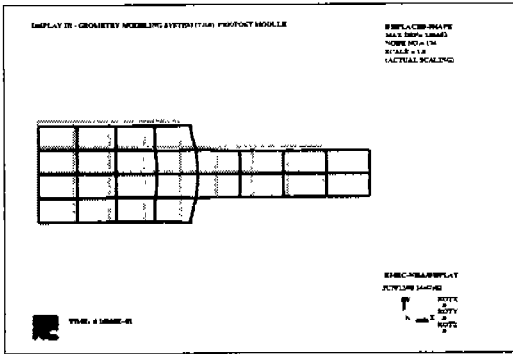


Fig. 14 Original and deformed model(NISA II)

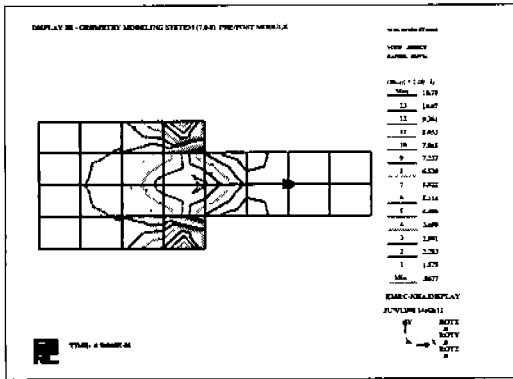


Fig. 15 Stress distribution of the global x axis(NISA II)

최대 변위에 대한 NISAII의 결과와 본 연구에서 제안된 수치미분법에 의한 결과는 Table 3와 같다.

Table 3 Comparison of displacements 단위(mm)

Mooney-Rivlin 계 수	Deflection		error(%)
	NISA II	수치미분법	
2 계수	3.61544	3.61555	0.0030

3. 포아슨 반복법의 적용 예

등방성 3차원 20절점 고무요소의 모델(Fig. 16)의 1요소를 사용하고 하중을 P_1 , P_2 를 동시에 작용했을 때 포아슨 비에 따른 수렴성을 검증하였다.

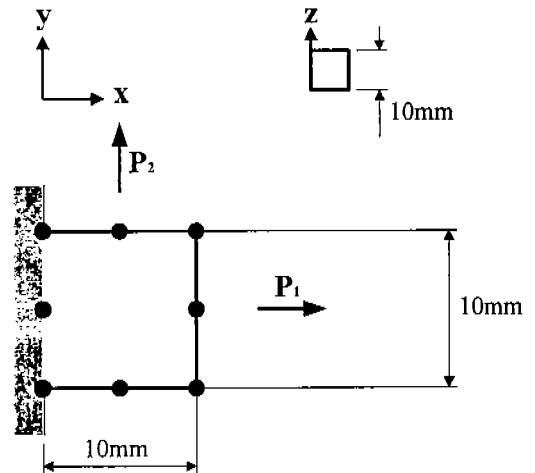


Fig. 16 Three dimensional geometry of one element under tension

$P_1 = 30\text{kgf}$, $P_2 = 15\text{kgf}$ 이고 Mooney-Rivlin coefficient는 $C_{10} = 0.15$, $C_{01} = 0.05$ 로 하여 비선형 해석을 수행한 결과를 Table 4에 나타내었다. Table 4에서 보는 바와 같이 ν iteration 기법을 이용하지 않았을 때는 포아슨 비가 0.49990에서 수렴이 실패하여 비압축성조건 ($\Delta V/V = 0.$)으로 더 이상 접근시킬 수 없었다. 그러나 ν iteration 기법을 이용하였을 때는 포아슨 비가 0.49999일 때도 수렴이 되는 것을 알 수 있었다.

Table 4 Analysis of convergence.

Mooney-Rivlin 계수	ν	ν iteration 기법 미적용	ν iteration 기법을 이용
2 계수	0.49000	수렴	수렴
2 계수	0.49500	수렴	수렴
2 계수	0.49900	수렴	수렴
2 계수	0.49990	발산	수렴
2 계수	0.49995	발산	수렴
2 계수	0.49999	발산	수렴

Table 5 Test of convergence and dilatations using ν iteration method($\Delta\varepsilon = 1.E-07$)

단위(mm)

Mooney-Rivlin 계수	ν	Deflection		수렴성	$\frac{\Delta V}{V} \times 100$ (%)
		해석적미분법	수치 미분법		
2계수	0.49000	9.68506	9.68506	수렴	0.63
2계수	0.49500	9.68479	9.68479	수렴	0.31
2계수	0.49900	9.68456	9.68456	수렴	0.063
2계수	0.49950	9.68452	9.68452	수렴	0.031
2계수	0.49990	9.68449	9.68449	수렴	0.0061
2계수	0.49995	9.68448	9.68448	수렴	0.0030
2계수	0.49999	9.68448	9.68448	수렴	0.00047

ν iteration 기법을 이용하여 Fig. 16 모델에서 $P_1 = 60.0\text{kgf}$, $P_2 = 0.0\text{kgf}$ 로 하여 한 방향(P_1)의 인장력을 작용했을 때의 포아슨 비에 따른 체적변화율(신율 96.8%)을 검토하여 Table 5에 나타내었다.

포아슨 비의 변화에 따른 체적변화율을 나타내면 Fig. 17 및 Fig. 18과 같다.

4. 정적 내압시 자동차용 극고무호스의 유한요소해석에

극고무호스(90°)의 내압해석을 위해 3차원 모델링을 하고, 상용팩케이지인 NISA II를 이용하여 유한요소해석을 수행한 후 변형 전과 변형 후의 형상을 Fig. 19에 나타내었다. 끝단이 고정된 상태에서 정적 내압이 가해지며 내고무와 외고무에 사용된 Mooney-Rivlin 계수는 $C_{10} = 0.08936$, $C_{01} = 0.0195$ 이고, $\nu = 0.495$ 로 하였다.

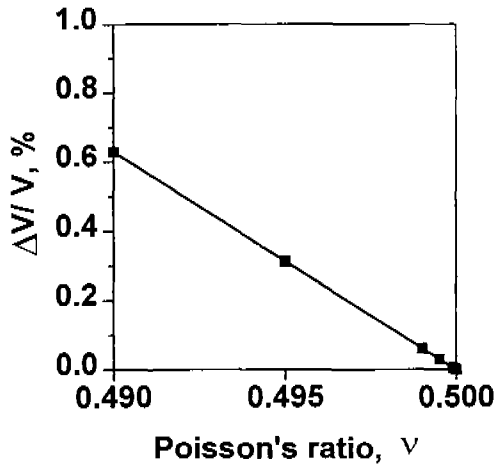


Fig. 17 Volumetric strains for various Poisson's ratios(0.49 ~ 0.49999)

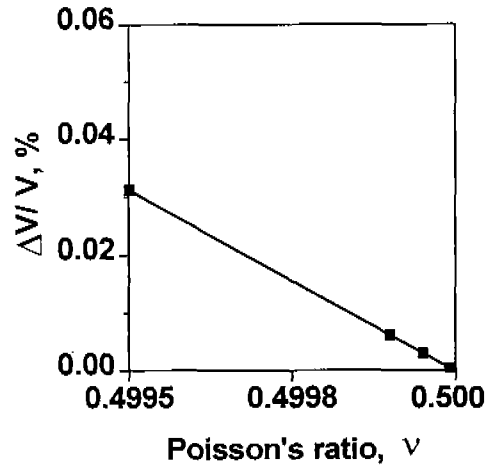


Fig. 18 Volumetric strains for various Poisson's ratios(Detailed view: 0.4995 ~ 0.49999)

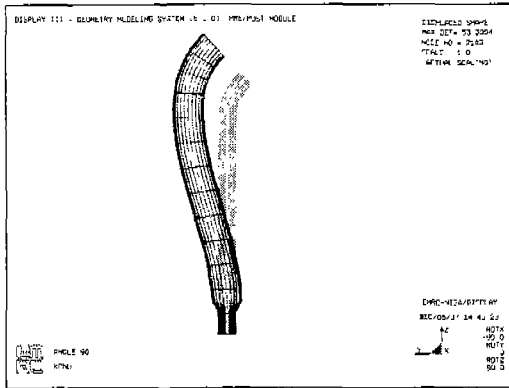


Fig. 19 Original and deformed model(NISA II)

5. 결 론

고무와 같은 초탄성체의 유한요소 평형식을 유도하고 해석적 미분과 수치 미분법을 이용하여 등방성 3차원 20절점 고무요소를 개발하였다. 해석적 미분과 수치 미분법을 비교하고, 또한 정적 해석을 통하여 수치 미분법을 이용한 고무요소를 상용 패키지인 NISA II 및 ABAQUS와 비교 확인하였다. 수치미분법에 의한 유한요소해석 결과는 해석적 미분법의 결과 및 상용 패키지

결과와 잘 일치하였다. 또한 고무의 비선형 해석에서의 포아슨 비에 따른 수렴성 문제에 대하여 연구하였다. 이상의 내용과 수치계산 결과를 요약하면 아래와 같다.

1. 해석적 미분법과 수치 미분법을 이용하여 등방성 3차원 20절점 고무요소를 각각 개발하였다.
2. Mooney-Rivlin 모델의 저차계수 함수와 고차계수 함수를 사용하여 개발한 고무요소 해석한 결과 상용 패키지인 NISA II 및 ABAQUS의 해석결과와 잘 일치하였다.
3. 수치 미분법에 의한 결과는 해석적 미분법에 의한 결과 및 상용 패키지인 NISA II 및 ABAQUS의 해석결과와 잘 일치하였다.
4. 수치미분법의 사용으로 Mooney-Rivlin 계수의 선정 방법이나 penalty function의 선정 방법에 따른 프로그램의 변경을 최소화 할 수 있었다.
5. 고무의 비선형해석에서 포아슨 비가 0.5에 가까울 때 발생하는 수렴성 문제를 ν iteration 기법을 이용하여 해결방안을 제안하였다.

후 기

본 연구는 경북대학교 발전기금 학술연구 장려비, 한국과학재단 지정 계명대학교 저공해자동차 부품기술개발센터와 평화산업주식회사의 연구비 지원에 의한 것입니다.

참 고 문 헌

1. 신수정, 이태수, 오수익, 1998, "고무패드 변형의 3차원 유한요소해석", 대한기계학회 논문집, 제 22권, 제 1호, pp.111-120.
2. 김현영, 최종윤, 김중재, 1997, "고무·포음 부품의 변형거동 예측과 형상설계" 대한기계학회 고체 및 구조 역학부문 학술대회논문집, pp.5-13.
3. 김현영, 최천, 방원준, 김재수, 1993, "자동차용 고무부품에 대한 대변형 유한요소해석" 한국자동차공학회 논문집, 제15권, 제1호, pp.107-119.
4. 김현영, 김중재, 1993, "고무재료의 초탄성 거동과 유한요소법을 이용한 부시형 엔진 마운트의 대변형 해석" 한국자동차공학회 논문집, 제 31권, 제 10호, pp.1324-1330.
5. 김세호, 이형욱, 허훈 외, 1996, "등속조인트 부트의 유한요소해석 및 설계변경에의 응용" 한국자동차공학회 추계 학술대회논문집, pp.323-328.
6. 임세영, 1997, "대변형을 수반하는 고무류의 탄성 구성방정식 모델링" 대한기계학회 고체 및 구조역학부문 학술대회논문집, pp.56-61.
7. 박현철, 윤성기, 1997, "고무유사 재료의 재료거동 특성화 및 안정성에 관한 연구" 대한기계학회 고체 및 구조역학부문 학술대회논문집, pp.14-24.
8. D.W. Haines, W.D. Wilsson, 1979, "Strain energy function for rubber-like materials", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 27, 345-360.
9. L.R.G. Treloar, 1944, "Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation", Trans. Faraday Soc., Vol. 40, 59-70.
10. J.T. Oden, J.E. Key, 1970, "Numerical analysis of finite axisymmetric deformations of incompressible elastic solids of revolution", Int. J. Solids Struct, Vol. 6, 497-518.
11. E. Jankovich, F. Leblane, M. Dyrand and M. Bercovier, 1981, "A finite element for the analysis of rubber parts, experimental and analytical assessment", Comput. Struct., Vol. 14, 385-391.
12. H. Peeken, R. Dopfer and B. Orschall, 1987, "A 3-D Rubber material model verified in a user-supplied subroutine", Comput. Struct., Vol. 26, 181-188.
13. NISA II user's Manual, Version 7.0.
14. ABAQUS user's Manual, Version 5.6.
15. 노권택, 1998, "수치미분을 이용한 고무의 유한요소 해석", 경북대학교 석사학위 논문, pp. 1-42.
16. T.Scharnhorst and T.H.H. Pian, 1978, "Finite element analysis of rubberlike materials by a mixed model", I.J.Numer. Mech. Engn., Vol.12, 665-676.
17. McMeeking, R. M. and Rice, J R., 1975, "Finite element formulations for problems of large elastic plastic deformation", Int. J. Solids Struct., Vol.11, pp.601-616.