

끝줄 및 부이줄에 있어서 Pode 해석에 의한 줄 함수의 이용

박 해 훈 · 예 영 희*

서해수산연구소 자원환경과, *백경공업사

(1999년 3월 11일 접수)

Use of Cable Functions by Pode's Analysis in a Towing Cable or a Buoy Cable

Hae-Hoon Park and Young-Hee Yae*

West Sea Fisheries Research Institute, *Baekyung Industrial Co.

(Received March 11, 1999)

Abstract

Tabulated results by Pode are used for computing the cable shape and cable tension in static equilibrium. This paper describes a technique using the integral form by Pode to give a simplified calculation of the cable functions at any desired value because in most practical cases the points of interest on the cable are not the points of reference on which the tables are based. Solving the nondimensional tension, τ , defined by Pode in closed form reduces the integrals in cable functions to a single integral. The technique using the integral form enables us to calculate the cable functions at any critical angle and at any point in case of a towing cable or certain cable-buoy systems.

서 론

트롤이나 부이줄 및 해양조사 때 줄이 사용되고 있다. 줄의 내어준 길이에 따라서 줄 끝의 위치가 수평적으로 얼마나 떨어져 있고, 어느 깊이 에 있는가를 아는 것은 작업상태를 파악하는데 중요하며, 트롤의 경우 줄 아래쪽 끝에서의 각도와 장력을 아는 것은 어구가 어떤 상태로 끌리고 있는가를 파악하는데 도움이 된다(李, 1985). Pode의 방법에 의한 줄의 장력과 형상 해석은 정적인 평형 상태에서 신장이 없는 줄의 무게와 접선저항을 고려하여 해석한 것으로서 끝줄 시스템에 유용하다고 알려져 있다. Pode는 해상에서 사용되는 줄의 여러가지 경우에 대해 줄(cable) 함수를 이용하여 하나의 식으로 표현하였으며, parameter 형태로

써 Pode 표를 만들었다(Kawakami, 1959 ; 張 · 徐, 1982 ; 川上, 1981 ; 高, 1975). 그런데, 표에 기재된 값들은 특정한 임계각 및 특정한 각도에 대하여 기재되어 있어, 실제 대부분의 경우에 있어서 필요한 값들은 표에 있는 기준점들이 아니기에 줄의 경사각과 임계각을 보간해서 사용해야 하는 불편함과 오차가 포함되어 있다.

본 논문에서는 Pode에 의해 정의된 무차원 장력 변수인 적분형의 τ 를 closed form으로 풀고, 나머지는 이를 이용하여 Gauss 적분하여 Pode 표값을 구하면, 소수점 등 임의의 임계각에서 임의의 각도에서도 줄(cable) 함수값을 바로 구할 수 있으며, 끝줄 및 부이줄의 경우에 대한 표를 구하여 기존의 표와 비교하였고 끝줄에 대한 사용 예를 나타내었다.

Pode에 의한 줄 함수

Fig. 1은 가벼운 줄이나 무거운 줄을 이용하여 물체를 끌거나 줄에 Buoy가 매어 있는 경우를 나타내고 있다. Fig. 2는 일정한 유속(V)에 놓인 줄의 평형상태에 관한 일반적인 해석을 표현한 것으로 위의 세가지 경우(a-I, b-II, c-III)를 각각 나타내고 있다. Pode는 줄이 유연하며 늘어나지 않는 경우에 대해서, Fig. 3에서 보는 것처럼 줄의 무게(W)와 줄에 수직으로 미치는 수력저항(R) 외에 미소한 접선항력(F)을 포함시켜 Cable에 관한 정적인 방정식을 유도하였다(張 · 徐, 1982 ; 川上, 1981 ; Kawakami, 1959)

Fig. 2에서 흐름과 평행하게 상류방향을 +X축, 흐름과 수직으로 위쪽 방향을 +Y축으로 두자. 원점 O에서 줄을 따라 임의의 점 P(θ)까지의 길이를 S라 하고, 줄의 경사각(θ)의 부호는 흐름의 진행방향에서 줄의 길이 S가 증가하는 시계 방향으로 + 부호를 취한다. 그리고 원점 O에서의 장력을 T₀, 임의의 점 P에서의 장력을 T라 두고, 줄의 단위길이당 접선항력을 F, 줄의 단위길이당 수중중량을 W, 단위길이당 수직저항을 R, 줄이 투영된 수평거리를 X, 수직깊이를 Y라 두면, 줄의 미소부분의 정적인 평형상태로부터 식(1)과 같은 미분방정식이 성립한다.

$$\frac{dT}{ds} = -(c(\theta)F - W \sin\theta) \quad (1.1)$$

$$T \frac{d\theta}{ds} = s(\theta)R \sin^2\theta + W \cos\theta \quad (1.2)$$

$$\frac{dx}{ds} = -\cos\theta \quad (1.3)$$

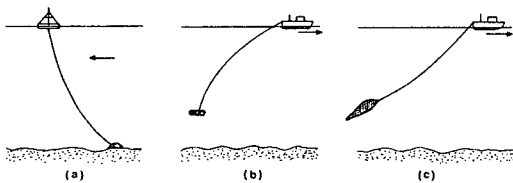


Fig. 1. Several cases of cables in the sea.
 (a) a cable-buoy system
 (b) a light towing cable system
 (c) a heavy towing cable system.

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta \quad (1.4)$$

단,

$$s(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{|\sin(\theta)|}, c(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{|\cos(\theta)|}$$

여기서, 다음과 같은 무차원 변수

$$\phi = \frac{F}{R}, \omega = \frac{W}{R}, \tau = \frac{T}{T_0}, \sigma = \frac{R}{T_0} S, \xi = \frac{R}{T_0} X, \eta = \frac{R}{T_0} Y,$$

를 도입하면, 원점 P(O)에서 임의의 점 P(θ)사이의 줄의 무차원적인 장력(τ), 길이(σ), 수평거리(ξ) 및

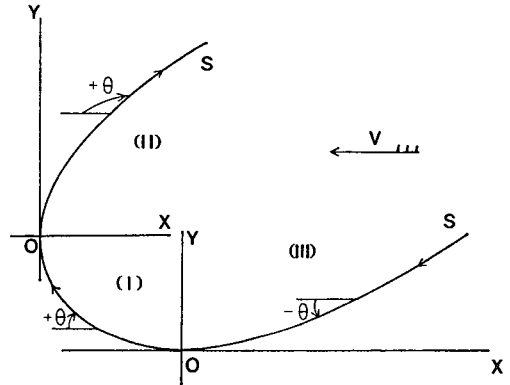


Fig. 2. Configuration of a twine in a uniform flow of water : S, cable length ; V, fluid velocity ; θ, inclination angle.

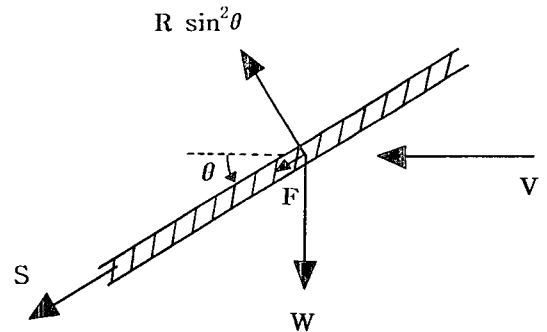


Fig. 3. Forces on a cable segment : R, normal drag per unit length of a cable ; F, tangential drag per unit length of a cable ; W, cable weight per unit length in water ; V, fluid velocity ; S, cable length ; θ, an angle between a cable and fluid velocity.

수직거리(η)는 다음과 같이 표현된다.

$$\tau(\theta) = \exp \int_0^\theta \frac{-c(\theta)\phi + \omega \sin \theta}{s(\theta)\sin^2(\theta) + \omega \cos(\theta)} d\theta \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\theta) &= \int_0^\theta \frac{\tau(\theta)}{s(\theta)\sin^2(\theta) + \omega \cos(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^\theta \frac{\exp \int_0^\theta \frac{-c(\theta)\phi + \omega \sin \theta}{s(\theta)\sin^2(\theta) + \omega \cos(\theta)} d\theta}{s(\theta)\sin^2(\theta) + \omega \cos(\theta)} d\theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \int_0^\theta \frac{-\tau(\theta) \cos(\theta)}{s(\theta)\sin^2(\theta) + \omega \cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^\theta \frac{-\exp \int_0^\theta \frac{-c(\theta)\phi + \omega \sin \theta}{s(\theta)\sin^2(\theta) + \omega \cos(\theta)} d\theta}{s(\theta)\sin^2(\theta) + \omega \cos(\theta)} \cos(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= \int_0^\theta \frac{\tau(\theta)\sin(\theta)}{s(\theta)\sin^2(\theta) + \omega \cos(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^\theta \frac{\exp \int_0^\theta \frac{-c(\theta)\phi + \omega \sin \theta}{s(\theta)\sin^2(\theta) + \omega \cos(\theta)} d\theta}{s(\theta)\sin^2(\theta) + \omega \cos(\theta)} \sin(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

그리고, 임계각(θ_c)은 식(3)과 같이 주어진다.

$$\cos \theta_c = s(\theta_c) \left\{ \frac{\omega}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1} \right\} \quad (3)$$

길이 S인 줄의 임의의 두 점에 있어서 줄의 영각, 장력 및 기준점으로부터의 길이를 각각 $\theta_1, \theta_2, T_1, T_2, s_1, s_2$ 라 하고, 두 점의 좌표를 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 라 하면 두 지점에서의 장력 및 거리 관계는 식(4)에 의해 구할 수 있다(張·徐, 1982 ; 川上, 1981).

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \quad (4.1)$$

$$\frac{R}{T_2} (s_2 - s_1) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\tau_2} \quad (4.2)$$

$$\frac{R}{T_2} (x_2 - x_1) = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\tau_2} \quad (4.3)$$

$$\frac{R}{T_2} (y_2 - y_1) = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\tau_2} \quad (4.4)$$

임의값에서의 Pöde표의 계산과 이용

무차원 장력변수인 $\tau(\theta)$ 를 각각의 경우에 대해 풀면 다음과 같다 (Park, 1993 ; 박, 1994 ; 박·윤, 1995 ; 박, 1999).

먼저 Fig. 2의 (I)과 (II)에 대해 풀면,

$$\begin{aligned} \tau_j(\theta) &= \exp \left[\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} \left\{ (-1)^j \left(\frac{2\phi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \tan^{-1} \{ A' \tan(\theta/2) \} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{\phi}{\sqrt{1-k^2}} \ln \left\langle \frac{K' + \tan(\theta/2)}{K' - \tan(\theta/2)} \right\rangle \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \omega \ln \frac{(\alpha - \cos\theta)(k+1)}{(k + \cos\theta)(\alpha-1)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

단,

$$\alpha = \frac{\sqrt{4+\omega^2} + \omega}{2}, \quad k = \frac{\sqrt{4+\omega^2} - \omega}{2},$$

$$A' = \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}, \quad K' = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}.$$

ln = 자연 로그,

j = 1, 2 즉,

경우 (I) : $\tau(\theta) = \tau_1(\theta)$

경우 (II) : $\tau(\theta) = \tau_2(\theta)$.

그리고, Fig. 2의 (III)의 경우에 대해 풀면 $\tau(\theta)$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \tau_3(\theta) &= \exp \left[\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} \left(\frac{2\phi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \tan^{-1} \{ A \tan(\theta/2) \} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\phi}{\sqrt{1-k^2}} \ln \left\{ \frac{K + \tan(\theta/2)}{K - \tan(\theta/2)} \right\} \right) \right. \\ &\quad \left. + \omega \ln \frac{(\cos\theta + \alpha)(1-k)}{(\cos\theta - k)(1+\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

단,

$$\alpha = \frac{\sqrt{4+\omega^2} + \omega}{2}, \quad k = \frac{\sqrt{4+\omega^2} - \omega}{2},$$

$$A = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}, \quad K = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}.$$

식(5)을 식(2.2)~(2.4)에 대입하면 적분은 1개로 줄어들고 Gauss 적분을 행하면, 임의의 임계각(θ_c)에 있어서 임의점의 줄의 각도 θ 에 대한 τ, α, ξ, η 의 값을 보간할 필요없이 구할 수 있다.

Table 1. The value of the cable functions by Pode in case of a cable-buoy system of critical angle of 20° (160°)

θ	τ	σ	ξ	η
.00	1.00000	.00000	.00000	.00000
.50	.99864	.07004	-.07004	.00031
1.00	.99735	.13991	-.13990	.00122
1.50	.99615	.20953	-.20950	.00274
2.00	.99503	.27883	-.27877	.00485
2.50	.99399	.34774	-.34763	.00756
3.00	.99303	.41620	-.41601	.01084
3.50	.99215	.48413	-.48384	.01469
4.00	.99135	.55148	-.55104	.01910
4.50	.99063	.61819	-.61757	.02404
5.00	.98999	.68420	-.68335	.02951
5.50	.98943	.74946	-.74834	.03548
6.00	.98894	.81393	-.81248	.04194
6.50	.98853	.87756	-.87573	.04886
7.00	.98819	.94032	-.93805	.05624
7.50	.98793	1.00216	-.99940	.06404
8.00	.98773	1.06307	-1.05975	.07226
8.50	.98761	1.12301	-1.11907	.08086
9.00	.98754	1.18196	-1.17734	.08982
9.50	.98754	1.23992	-1.23454	.09914
10.00	.98760	1.29685	-1.29065	.10878
10.50	.98772	1.35276	-1.34567	.11873
11.00	.98790	1.40763	-1.39958	.12896
...

Table 2. Comparison of some values of the cable functions in case of a towing cable system of critical angle of -30° by the original(left) and the current(right) techniques

$\theta_a^* = 30.00^\circ$					$\theta_c = -30.00^\circ$				
$\theta - \theta_a$	τ	σ	ξ	η	θ	τ	σ	ξ	η
150	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.00	1.00000	.00000	.00000	0.00000
155	1.0100	-0.3067	0.3063	0.0135	-5.00	1.01002	-.30672	.30633	0.01347
160	1.0292	-0.6382	0.6348	0.0570	-10.00	1.02922	-.63818	.63481	0.05699
165	1.0616	-1.0282	1.0154	0.1420	-15.00	1.06155	-1.02825	1.01538	0.14198
170	1.1174	-1.5479	1.5104	0.2995	-20.00	1.11742	-1.54786	1.51037	0.29950
172	1.1522	-1.8296	1.7733	0.4006	-22.00	1.15225	-1.82962	1.77333	0.40064
174	1.2009	-2.1950	2.1096	0.5437	-24.00	1.20086	-2.19504	2.10956	0.54371
176	1.2759	-2.7221	2.5868	0.7670	-26.00	1.27587	-2.72208	2.58691	0.76704
177	1.3335	-3.1088	2.9328	0.9398	-27.00	1.33346	-3.10881	2.93293	0.93976
178	1.4206	-3.6769	3.4366	1.2024	-28.00	1.42065	-3.67692	3.43667	1.20242
179	1.5861	-4.7237	4.3560	1.7029	-29.00	1.58607	-4.72363	4.35595	1.70290

* θ_a = critical angle

Table 1과 Table 2는 임계각이 160°(20°)인 부이줄의 경우(Berteaux, 1976)와 임계각이 -30°인 끌줄의 경우(張·徐, 1982)에 대해 식(5.1)과 식(5.2)를 사용하여 식(2.1)~(2.4)로부터 구한 값이며, Table 2는 기존의 표값과 여기에서 구한 줄함수값을 비교한 것이다.

일정한 속도로 예망하고 있는 끌줄의 경우는 상대적으로 일정한 흐름이 선박의 줄쪽으로 오는 것으로 생각할 수 있으며, wire rope와 같이 무거운 끌줄의 경우는 Fig. 2의 (III)에 해당된다. 끌줄의 경우에 있어서 기존의 한 예에서 조건이 하나만 다를 때, 이에 따른 임계각의 변화와 이 임계각에

$$\theta_c = -31.19^\circ$$

θ	τ	σ	ξ	η
- 4.64	1.00857	- .26155	0.26126	.01065
-20.00	1.11189	-1.39671	1.36337	.26785
(-20.00)*	(1.1103)*	(-1.4690)*	(1.4335)*	(.2837)*

(*) : 필자는 PODE 표가 없어 상세한 보간은 하지 못했으나, '어구공학'(장지원 등, 1982)에 의해 대략적으로 보간한 값임.

서 임의의 각도에 대한 줄 함수값을 구해서 쓰이는 예를 보자.

줄의 길이가 500m, 직경이 20mm인 wire rope로 된 끝줄을 속도 172cm/s로 예인하고 있다. 줄 위쪽 끝에서의 장력(T_2)이 2000kg이고, 경사각(θ_2)이 -20° 이며 줄이 직선이 되는 임계각(θ_c)은 -30° 인 경우이다(ϕ 는 0.02). 이때, PODE 표를 이용하면 줄의 아래쪽 끝에서의 각도(θ_1)는 -5° , 장력(T_1)은 1807kg이 되며, 줄의 양 끝점 사이의 수직깊이는 115.4m, 수평거리는 485.7m가 된다(張·徐, 1982).

이 예에서 다른 조건은 같고 유속만 172cm/s에서 165cm/s로 다른 경우를 보자. 유속이 변하면 수직저항(R)이 변하여 임계각은 -31.19° 로 변하게 된다. 그리고, 줄 아래쪽 끝에서의 각도는 -4.64° 가 되므로, 이 경우에 PODE 표를 이용하려면 보간해서 구해야 하나, 여기에서 말한 방법으로 구한 줄 함수값은 위와 같다.

따라서, 식(4)을 이용하면 줄 아래쪽 끝에서의 장력은 1814kg이고, 양 끝점 사이의 수평거리 및 수직거리는 각각 485.4m, 113.3m이다. 이 끝줄의 예에서 다른 값들은 변화되지 않고 유속만 172cm/s에서 165cm/s로 다른 경우에 수평거리의 변화는 아주 작으나 수직깊이의 변화는 약 2.1m만큼 차이므로 깊이의 변화는 고려할 만 하다.

요 약

해양조사나 트롤 작업 때 사용되는 줄의 장력과 형상을 구하는데 PODE의 수치표가 사용된다. 그런데, 대부분의 실제 경우에 있어서, 필요한 값들은 PODE 표에 나타난 특정한 기준점이 아니기에 줄의 경사각과 임계각을 보간해서 사용해야 하는 불편

함과 오차가 포함되어 있다.

먼저, PODE에 의한 적분형의 줄(cable)함수인 τ 를 끝줄이나 부이줄의 경우에 대해 해석적으로 풀면 다음과 같다.

$$\text{경우 (I) : } \tau(\theta) = \tau_1(\theta)$$

$$\text{경우 (II) : } \tau(\theta) = \tau_2(\theta).$$

$$\tau_2(\theta) = \exp\left[\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}\left\{(-1)^j \frac{2\phi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \tan^{-1}\{A' \tan(\theta/2)\} + \frac{\phi}{\sqrt{1-k^2}} \ln \left\langle \frac{K' + \tan(\theta/2)}{K' - \tan(\theta/2)} \right\rangle + \omega \ln \frac{(\alpha - \cos\theta)(k+1)}{(k + \cos\theta)(\alpha-1)}\right\}\right]$$

단,

$$\ln = \text{자연 로그}$$

$$j = 1, 2$$

$$\text{경우 (III) : } \tau(\theta) = \tau_3(\theta).$$

$$\tau_3(\theta) = \exp\left[\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}\left\{\frac{2\phi}{\sqrt{\alpha^2-1}} \tan^{-1}\{A \tan(\theta/2)\} - \frac{\phi}{\sqrt{1-k^2}} \ln \left\{ \frac{K + \tan(\theta/2)}{K - \tan(\theta/2)} \right\} + \omega \ln \frac{(\cos\theta + \alpha)(1-k)}{(\cos\theta - k)(1+\alpha)}\right\}\right]$$

위 식을 이용하여 PODE에 의한 줄함수를 Gauss 적분함으로써, 임의의 임계각에서 임의의 줄 각도에 대해 보간할 필요없이 끝줄과 부이줄의 경우에 대해 PODE의 수치표 값을 구했다. 이 방식으로 구한 PODE에 의한 줄 함수값은 기존의 PODE 표와 잘 일치할 뿐만아니라 소수점 등 임의의 값에서도 구할 수 있으며, 끝줄에서 사용한 예를 나타내었다.

$$\theta_c = -31.19^\circ$$

θ	τ	σ	ξ	η
- 4.64	1.00857	- .26155	0.26126	.01065
-20.00	1.11189	-1.39671	1.36337	.26785
(-20.00)*	(1.1103)*	(-1.4690)*	(1.4335)*	(.2837)*

(*) : 어구공학(장지원 등, 1982)에 의해 대략적으로 보간한 값임.

참고문헌

- 1) Berteaux, H.O.(1976) : Buoy Engineering, Wiley-Interscience, New York, 314.
- 2) Kawakami, T.(1959) : Development of mechanical studies of fishing gear, *In Modern Fishing Gear of the World I*. Kristjonsson, H. (ed), 175~184, FAO, Rome.
- 3) Park, H.H.(1993) : A tension measurement method of a towing cable or a buoy cable, *Ocean Engineering* 20(2), 163~170.
- 4) 高冠瑞(1975) : 漁具漁法學, 고려출판사, 389.
- 5) 박해훈(1994) : 칼만 필터에 의한 수중음향 위치측정 시스템의 정도 개선에 관한 연구, 부경대학교 수산학박사 학위논문
- 6) 박해훈·윤갑동(1995) : 음향위치 시스템을 이용한 줄의 장력측정법과 신장을 고려한 끌줄의 형상 해석, 국립수산진흥원 연구보고 49호, 175~185.
- 7) 박해훈(1999) : 끌줄에 있어서 적분형을 이용한 임의값에서의 PODE 표의 이용, 국립수산진흥원 연구보고 55호, 11~15.
- 8) 李秉錡(1985) : 現代트로울漁法 3판, 태화출판사, 283.
- 9) 張志元·徐斗玉(1982) : 漁具工學, 신한출판사, 304.
- 10) 川上太左英(1981) : 漁業解析入門, 恒星社, 294.