

3차원 공간 판구조물의 有限要素 解析에 관한 연구

권 오 영·남 정 길*
현대중공업, *한국해양대학교
(1998년 10월 29일 접수)

A Study on the Finite Element Analysis of Three Dimensional Plate Structures

Kweon O.Y and Nam J. G*
Hyundai Heavy Industry, *Korea Maritime University
(Received October 29, 1998)

Abstract

High-speed electronic digital computers have enabled engineers to employ various numerical discretization techniques for solutions of complex problems. The Finite Element Method is one of the such technique. The Finite Element Method is one of the numerical analysis based on the concepts of fundamental mathematical approximation. Three dimensional plate structures used often in partition of ship, box girder and frame are analyzed by Finite Element Method. In design of structures, the static deflections, stress concentrations and dynamic deflections must be considered. However, these problems belong to geometrically nonlinear mechanical structure analysis. The analysis of each element is independent, but coupling occurs in assembly process of elements. So, to overcome such a difficulty, the shell theory which includes transformation matrix and a fictitious rotational stiffness is taken into account. Also, the Mindlin's theory which is considered the effect of shear deformation is used. The Mindlin's theory is based on assumption that the normal to the midsurface before deformation is "not necessarily normal to the midsurface after deformation", and is more powerful than Kirchoff's theory in thick plate analysis. To ensure that a small number of element can represent a relatively complex form of the type which is liable to occur in real, rather than in academic problems, eight-node quadratic isoparametric elements are used.

Key Words : Finite Element Method(유한요소법), 3-Dimension(3차원), Isoparametric Element (등파라메틱요소), Mindlin's theory(민들린 이론)

서 론
평판 구조물은 선박의 격벽, Box girder, 항공기

의 판넬, 차체 등에 많이 쓰이는 구조물이다. 이러한 구조물을 설계할 때는 응력 집중, 정역학적 처짐 문제, 동역학적 문제와 안정성 문제 등이 다루

어려야만 한다. 이들 구조물의 해석은 기하학적으로 비선형 문제이고, 평판 굽힘(Plate bending)과 더불어 면내 변형(In-plane or membrane)의 영향을 포함한 강성 방정식을 이끌어낼 수 있는 요소(Element)를 사용하여야 한다. 단순 사각형이나 삼각형 요소를 사용한 유한요소법 경우에는 강성 행렬을 구하는데 있어서 계산과 프로그램은 간단하나 유한요소법에 의한 근사해가 만족할만한 값에 수렴하기 위해서는 많은 요소의 수가 필요하게 된다. 반면에 Isoparametric 요소를 이용하면 비록 프로그램은 복잡할지라도 적은 요소의 수로써 비교적 복잡한 형상을 가진 구조물을 표현하기에 충분하며 만족할만한 해석 결과를 얻을 수 있다. 그러므로 본 연구에서는 3차원 공간 구조물을 해석하기 위하여 Shell 이론에 기초를 둔 곡면 요소(Curved element or Isoparametric shell element)를 이용하고 그 해석 과정과 결과 및 문제점을 제시하고자 한다.

3차원 공간 구조물 문제를 해석하는데 있어서, 본 연구에서는 비록 프로그램이 복잡할지라도 비교적 적은 요소로서 임의의 형상에 적용하는데 있어서 충분한 만족과 높은 정확도를 얻을 수 있는 Shell 이론에 기초를 둔 곡면요소를 이용하여 문제를 해석하였다.

유한요소법 일반

1. 평형방정식

문제 해석을 위한 평형 방정식은 면내변형과 굽힘변형을 서로 결합된 형태의 근사 방법을 취하고 평판로 구성된 Isoparametric 사각형 요소에 대해 강성 방정식을 가상의 원리를 적용하여 유도하면 식(2.1)으로 된다.

$$\{\delta_s\}^T \{F^*\} + \int_V \{\delta_s\}^T \{b\} dV = \int_V \{\epsilon_s\}^T \{\delta\} dV \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \{F^*\} + \int_V [N]^T \{b\} dV &= \left\{ \int_V [B]^T [D] [B] dV \right\} \{\delta\} \\ &\quad - \int_V [B]^T [D] \{\epsilon^0\} dV \\ &\quad + \int_V [B]^T \{\delta^0\} dV \end{aligned} \quad (2.2)$$

따라서, 식(2.2)은 식(2.4)으로 평형 방정식이 유도된다.

$$\{F^*\} + \{F_b^*\} + \{F_{s0}^*\} + \{F_{d0}^*\} = [K^*] \{\delta\} \quad (2.3)$$

$$\{f_i^{(eP)}\} = [K^{(eP)}] \{d_i^{(P)}\} \quad (2.4)$$

$$\{d_i\} = \left\{ \begin{matrix} d_i^{(P)} \\ d_i^{(b)} \\ \theta_{zi} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ \hline w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \hline \theta_{zi} \end{matrix} \right\} \quad (2.5)$$

또한, 결합하여 얻어지는 일반화된 힘들은 식(2.6)와 같이 된다.

$$\{f_i^{(e)}\} = \left\{ \begin{matrix} U_i \\ V_i \\ \hline W_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ \hline M_{zi} \end{matrix} \right\} \quad (2.6)$$

최종적으로 식(2.7)의 강성행렬을 얻을 수 있다.

$$\{f^{(e)}\} = [K_{ij}^{(e)}] \{d^{(e)}\} \quad (2.7)$$

$$[K_{ij}^{(e)}] = \begin{bmatrix} [k_{ij}^{(e)}] & : & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 2x2 & : & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & : & \dots & \dots & : & 0 \\ 0 & 0 & : & [k_{ij}^{(e)}] & : & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 3x3 & : & : & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

2. 가상 회전 강성행렬 (Fictitious rotational stiffness)

일반적인 구조물에 대해서는 강성행렬을 조립(Assembly)하는 과정에서 $x-y$ 평면내에서 요소를 회전변형 시키려는 외력에 대하여 충분히 큰 강성을 가지고 있거나 또는 이것이 다른 변형 상태에 영향을 주지 못하므로 고려할 필요가 없다. 그러나 Box girder와 같은 3차원 공간을 갖는 평판 구조물에 대해서는 국부좌표계에서는 θ_z 의 자유도를 고려해줄 필요가 없다고 하더라도 전체좌표계에서 볼 때는 이를 고려해서 6자유도를 유지해야만 한다. 왜냐하면 두 요소 이상이 동일한 평면내에 있다면 θ_z 에 해당하는 강성행렬이 없으므로

로 이것을 그대로 사용하면 강성 방정식의 解는 존재하지 않기 때문이다. 이를 극복하기 위해서는

- i) $0=0$ 의 방정식을 제거함으로써 동일 좌표계에 있는 요소의 방정식을 조립을 실행 하는 방법.
- ii) 다른 자유도와 결합하지 않고 평형이 교란되지 않도록 해당 자유도에 가상의 강성을 강제로 부여하는 방법. 이때 사용되는 추가적인 강성행렬(Additional stiffness)을 표시 하면, 식(2.17)과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} M_{zi} \\ M_{zj} \\ M_{zk} \end{Bmatrix} = \alpha' Et \Delta \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ \text{sym} & 1 & -0.5 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \theta_{zk} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

여기서 E , Δ 와 t 는 각각 Young 률, 요소의 면적과 요소의 두께를 나타내고, α' 는 상수이다.

판구조물의 유한요소법 정식화

1. 면내 변형(In-plane)의 경우

대한 정식화 실제 구조물이 3차원일지라도 문제의 성격에 따라 2차원 구조물로 취급하면 쉽게 해를 구할 수 있게 된다. 이러한 예로, 평판의 두께가 너무 두꺼운 경우는 z 방향으로의 구속되기 때문에 이 방향에 대해서는 변형이 거의 없는 ($\epsilon_z = 0$) 평면 변형도 문제(Plane strain problem)가 있으며, 그와 반대로 평판이 너무 얇아서 면에 수직인 방향으로의 응력을 무시할 수 있을 정도로 미소한 경우 ($\alpha_z = 0$)인 평면 응력 문제 (Plane stress problem)가 있다. 여기서는 3 차원 공간을 갖는 평판 구조물

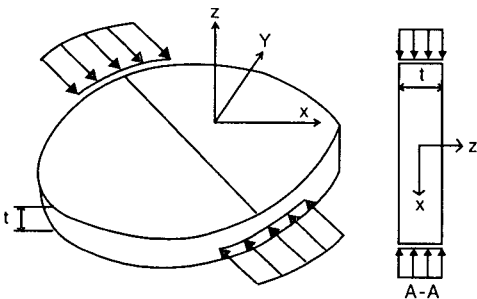


Fig. 2. Plate structure withinplane loads.

이므로 평면 응력문제에 대해 관심의 대상이 된다.

평면 응력은 $\alpha_x \approx 0, \tau_{yz} \approx 0, \tau_{zx} \approx 0$ 이므로 변형을 벡터는 식(3.1)과 같다.

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= [L][N] \{\delta\} = [B] \{\delta\} \\ &= [B_1, B_2, \dots, B_8] \{\delta\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

여기서, $[B]$ 는 변형을 행렬(Strain matrix)이다. 따라서 변형을 벡터는

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial [N_i]}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial [N_i]}{\partial y} \\ \frac{\partial [N_i]}{\partial y} & \frac{\partial [N_i]}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^8 [B_i] \{\delta_i\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

여기서, $[B_i]$ 행렬은 형상함수의 미분형태로 구성되어 있음을 알 수 있다.

그런데, 이것의 구성요소는 미분의 형태로 전체 좌표계의 x 또는 y 로 편미분이 이루어져야하나 형상함수 $[N_i]$ 는 $\xi - \eta$ 좌표 상태에서 정의 되므로, 곧바로 미분을 실행할 수가 없기 때문에 연쇄 법칙을 통해서 변수의 변환이 이루어져야만 한다. 따라서 평면응력 문제에 있어서 강성행렬은 식(3.3)으로 나타내진다.

$$\begin{aligned} [K_i] &= \iint [B_i]^T [D][B_i] t \det [J] d\xi d\eta \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [B_i]^T [D][B_j] t \det [J] W_i W_j \end{aligned} \quad (3.3)$$

여기서 t 는 평판의 두께이다.

그리고 응력을 구하는데 있어서 일단, 강성행렬이 구해지면 일반화된 Hook's 법칙에 따르는 표준적인 해석 방법에 의해서 변위를 쉽게 구할 수 있다. 이 때, 이용되는 변위를 국부좌표계로 변환하여 적용해야 한다.

2. 평판 굽힘(Plate bending)의 경우

여기에서 이용한 이론은 Mindlin의 평판이론이다. 이 이론은 전단 변형에 의해서 변형 前 중간평면에 수직인 법선은 변형 後 반드시 중간평면(Middle plane)에 수직을 이루지 않아도 된다. 또

결과 및 고찰

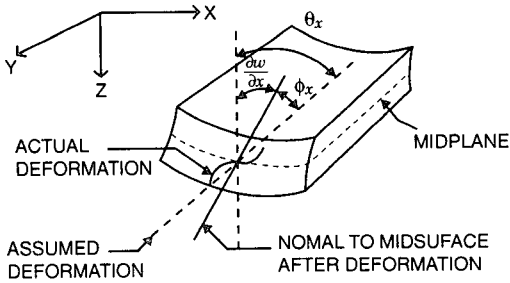


Fig. 4. Deformation of the cross-section of plate.

한 이 이론은 Fig.4와 같이 최초로 변형이 일어난 수직인 지점에 평균 회전각과 비균일 전단응력에 의해 일어나는 2차적인 변형을 고려한 것이다.

변형율은 평면 굽힘과 횡방향 전단부분으로 크게 구분 되어질 수 있으므로 식(3.4)와 식(3.5)로 나타낸다.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = -z[L] \{\theta\} \quad (3.4)$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = -\{\theta\} + \Delta w \quad (3.5)$$

위의 식에서 최종적으로 3개의 방정식으로 유도할 수 있다. 즉,

$$[L]^T [D][L] \{\theta\} + \{S\} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\{S\}}{\alpha} + \{\theta\} - \Delta w = 0 \quad (3.7)$$

$$\Delta^T \{S\} = -q \quad (3.8)$$

로 유도된다. 여기서 중요한 사실은 $\alpha = \infty$ 이면 전단 변형(Shear deformation)을 무시한 상태가 되므로 얇은 평판에만 적용될 수 있는 Kirchoff 이론에 근거하게 된다. 그러나 $\alpha \neq \infty$ 라면 전단 변형을 고려한 상태에서 두꺼운 평판에 적용될 수가 있는 Mindlin 이론에 근거하게 된다는 사실이다.

Fig.5은 본 연구에서 제안된 정식화를 이용하여 개발한 평판 요소에 기초를 둔 곡면 요소를 이용한 유한요소 프로그램의 흐름도이다. 기하학적인 선형 해석에서는 원형평판을 두께의 변화에 따른 집중하중이 작용하는 경우와 분포하중이 작용되는 경우에 대해서 정확도 및 신뢰성을 알아본다. 기하학적 비선형 해석에는 굽힘과 비틀림을 동시에 받는 채널 단면을 갖는 외팔보에 대해서 수행함으로써 이러한 구조물의 비선형의 거동을 좀더 자세히 고찰하였다.

G Global Coordinate System
L Local Coordinate System

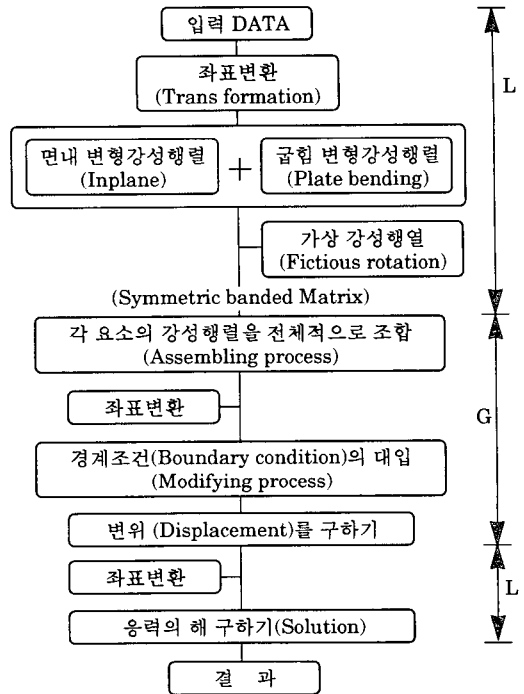


Fig. 5. Flow chart of program 3-D structure analysis.

1. 수직하중을 받는 원형 평판 (Circular plate)에 대한 고찰

Fig. 6은 고정판(Clamped)위에 균등분포 하중이 작용될 때의 전단력을 고려하지 않은 근사해과

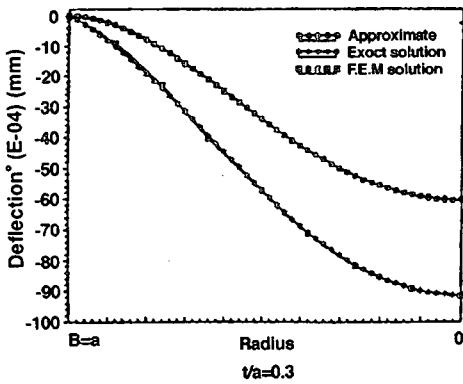
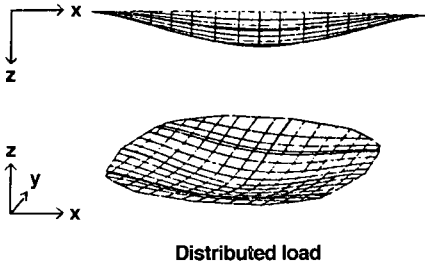


Fig. 6. Midpoint deflection of clamped circular plate with uniformly distributed load.



Deflection & deformed shapes for circular plate

전단력을 고려한 엄밀해 및 F.E.M 방법에 의한 해석 결과를 그래프로 나타낸 것이다.

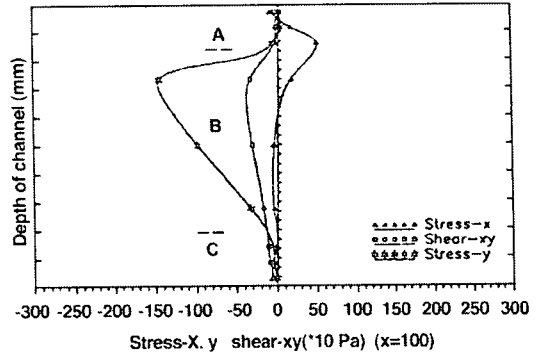
2. 채널단면 형상에 대한 고찰

본 연구에서 σ_x , σ_y , τ_{xy} 의 3 가지 응력 중에서 자유단 부분에서는 τ_{xy} 는 상당히 감소하고 σ_y 는 상당히 증가되어 오히려 이 부분에서는 σ_y 의 응력이 가장 커다란 영향을 미치게 된다.

Fig. 7(a)와 (b)는 본 연구에서 시뮬레이션한 결과의 변형된 형태를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 채널단면을 갖는 외팔보의 플렌지 부분의 처짐 형상은 상당히 불규칙한 모양을 이루게 되며 채널단면에는 굽힘뿐만 아니라 회전력을 동시에 받게 되므로 비틀림 형상을 나타내고 있다.

결 론

본 논문에서는 3차원 평판 구조물을 해석하기 위하여 공간좌표의 개념을 포함한 쉘 이론을 도입



Distribution of σ_x , σ_y and shear stress for section area

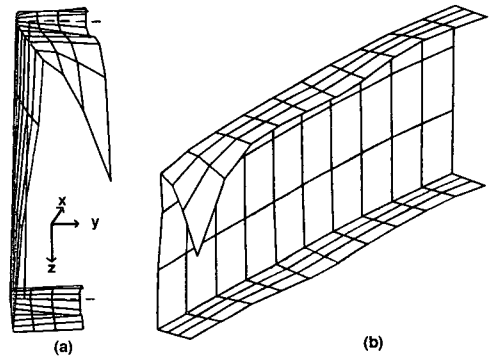


Fig. 7. Deformed shapes for acting load at edge and of flange.

하였으며 횡방향 전단 변형이 고려된 Mindlin 평판이론을 이용함으로써 두꺼운 평판에서 보다 더 정확한 해를 얻고자 하였다. 또한 비교적 복잡한 형상에 대하여 표현이 자유롭게 되도록 하기 위하여 Isoparametric 사각형 요소를 사용하였다. 더 나아가 기하학적 선형문제인 정방형판, 수직하중을 받는 원형 평판과 기하학적 비선형 문제인 채널단면을 갖는 외팔보의 형상에 대한 고찰을 한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 수직 하중을 받는 정방형 평판과 원형 평판의 경우에 Kirchhoff 평판이론 보다 Mindlin 평판이론을 적용한 쪽이 더 정확한 해를 얻게 되었다. 이는 실제적인 구조물은 순수 굽힘 (Pure bending)뿐만 아니라 전단의 영향 (Shear effect)을 동시에 받고 있기 때문에 두

꺼운 평판구조물의 경우는 전단변형이 반드시 고려되어야만 한다는 것을 알 수 있었다.

2. 채널단면과 같은 비대칭 구조물의 설계시 수직응력(σ_y)은 하중이 작용되는 부분에서는 상당히 큰 영향을 미치지만 먼 곳에서는 미세하게 나타났다. 즉, 하중이 작용되는 부분에 대해서는 길이방향의 응력(σ_x) 보다는 오히려 수직응력(σ_y)이 큰 영향을 미치게 됨을 알 수 있었다.
3. 6 자유도를 갖는 쉘 이론의 도입과 곡면요소를 적용함으로써 복잡한 형상의 거동에 대한 가시화가 가능하게 되었으며, 설계시 처짐, 응력분포 및 변형되는 형태를 예측할 수 있게 되었다.

참고문헌

1. Zienkiewicz, O. C. The Finite Element Method, third, McGraw-Hill, London.
2. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.(1991) : The Finite Element Method, Fourth, McGraw-Hill, New York, Vol 2.
3. The Finite Element Method in Rao, S.S. (1988) : Engineering, Second, Pergamon Press, New York.
4. 王之錫(1990) : 有限要素法에 의한 熱彈塑性 應力 解析(I), 韓國船用機關學會誌, 第4卷, 第3號, pp.169~176.
5. Hinton, E. and Owen, D.R. J.(1997) : Finite Element Programming, Academic Press, New York.
6. Timoshenko and Woinowsky-Krieger(1959) : Theory of Plates and Shell, Second, McGraw-Hill, New York.
7. Brebbia, C. A. and Ferrante, A. J.,(1978) : Computational Methods for the Solution of Engineering Problems, Pentech Press, London.