

# 속산 시뮬레이션을 위한 적응형 비모수 중요 샘플링 기법

## Non-parametric Adaptive Importance Sampling for Fast Simulation Technique

김윤배<sup>\*</sup>, 노덕선<sup>\*</sup>, 이명용<sup>\*\*</sup>

Kim Yun Bae, Rho Duk Sun, Lee Myeong Yong

### Abstract

Simulating rare events, such as probability of cell loss in ATM networks, machine failure in highly reliable systems, requires huge simulation efforts due to the low chance of occurrence. Importance Sampling (IS) has been applied to accelerate the occurrence of rare events. However, it has a drawback of effective biasing scheme to make the estimator of IS unbiased. Adaptive Importance Sampling (AIS) employs an estimated sampling distribution of IS to the system of interest during the course of simulation. We propose Nonparametric Adaptive Importance Sampling (NAIS) technique which is nonparametrical version of AIS. We test NAIS to estimate a probability of rare event in M/M/1 queueing model. Comparing with classical Monte Carlo simulation, the computational efficiency and variance reductions gained via NAIS are substantial. A possible extension of NAIS regarding with random number generation is also discussed.

\* 성균관대학교 시스템경영공학부

\*\* 한국통신 통신망연구소

## 1. 서론

기술의 급격한 발달로 매우 높은 신뢰도와 성능을 요구하는 시스템이 널리 사용되고 있어 희귀사건(rare event)의 발생확률의 추정이 시스템의 설계 단계에서부터 요구되고 있다. 예를 들어 실시간 멀티미디어 트래픽 전송을 수행하는 ATM 통신망의 설계에서 요구되어지는 손실율은  $10^{-9}$  이하이므로 이를 만족시키는 시스템의 설계를 위해 희귀사건의 발생율을 추정할 도구가 요구되어진다.

전통적 Monte Carlo 시뮬레이션 기법이 시스템의 성능과 신뢰도를 분석하기 위하여 사용되고 있으나 관심 있는 희귀사건의 표본을 추출하기 위해 그 주변의 많은 사건을 발생시키는 과정을 거치기 때문에 자원의 막대한 낭비를 초래하여 비효율적이다.

이러한 비효율성을 극복하기 위하여 희귀사건의 발생을 촉진시키는 새로운 분포함수를 적용하여 시뮬레이션을 수행한 후 이로 인해 편향된 확률 분포를 다시 조정하는 절차를 거치는 중요샘플링 기법(importance sampling)이 도입되었다. 그러나, 중요샘플링에 적용되는 변형된 분포 즉, 중요샘플링 분포함수는 분석하는 시스템이 바뀔 때마다 매번 다시 선택해야 하는 어려움이 있고 시스템이 복잡해질수록 중요샘플링 분포함수를 찾는 과정도 더 복잡해진다. 따라서 이 기법의 실제 응용은 여전히 제한적이며 최적 중요 샘플링 분포를 선택하는 문제에 대한 연구가 이루어지고 있다[4][9][11][14][16][19].

이런 문제점을 해결하는 차원에서 희귀사건을 발생시키는 시뮬레이션 샘플들이 (미지의) 비제약 최적 중요샘플링 분포를 따른다는 적응형 중요샘플링 기법이 Bucher[3], Jeruchim[10], Stadler & Roy[16] 등에 의해 연구되었다. 이 접근 방법은 어떤 시스템이든 초기 시뮬레이션 결과에 의해 중요샘플링분포의 성질을 추정할 수 있어 최적 중요샘플링 분포를 찾는 복잡한 과정을 상당히 줄여주는 이점을 지니고 있다[1][6][12].

최근에는 최적 중요샘플링 분포의 모수를 선택하기보다는 분석하려는 시스템에 적용할 수 있는

중요샘플링 분포를 자체를 추정하고 추정된 분포로부터 난수를 직접 발생시켜 이용할 수 있는 방법으로 비모수 중요샘플링 기법이 Zhang[20]에 의해 제안되었다.

본 논문은 적응형 중요샘플링 기법에 근거한 비모수적 방법과 적응알고리즘을 소개하고 M/M/1 대기행렬 시스템에 적용하여 전통적 Monte Carlo 기법과의 성능 척도를 비교한다.

## 2. 전통적 Monte Carlo 시뮬레이션과 중요샘플링(Importance Sampling)기법

이 절에서는 희귀사건 시뮬레이션을 위한 전통적 Monte Carlo 시뮬레이션의 기법과 중요샘플링 기법의 적용과정, 차이점 및 문제점에 대해서 알아본다.

### 2.1 전통적 Monte Carlo 시뮬레이션

표본 공간  $\Omega$  에서 확률변수  $X$  를 정의한다. 분석하는 시스템이 사건 ( $E$ )을 포함한다고 가정하면 다음과 같은 지시확률변수를 지정할 수 있다.

$$I_x = \begin{cases} 1 & \text{if } X \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$F(X)$  를 확률변수  $X$ 의 분포함수라 하면 사건  $E$ 가 일어날 확률( $\Pr(E)$ )은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pr(E) &= E(I_X) \\ &= \int I_X dF(X) \\ &= \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

전통적인 Monte Carlo 기법을 사용한  $\Pr(E)$ 의 추정치  $\alpha$  는 다음과 같다.

$$\hat{\alpha}^{MC} = N^{-1} \sum_{i=1}^N I_{X_i} \quad (3)$$

여기서  $X_1, \dots, X_N$ 은 확률밀도함수  $f$  로부터 얻어진  $N$ 개의 Pseudorandom sample이다. 강대수 법칙(The Strong Law of Large Numbers)에 의하면 표본 크기  $N$ 이 커지면 Monte Carlo 기법에 의한 추정치  $\hat{\alpha}^{MC}$ 은 실제값인  $\alpha$ 에 수렴하게 된다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\alpha}^{MC} = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N I_{X_i} = \alpha \quad (4)$$

임의의 사건이 일어날 확률을 추정하는데 있어 Monte Carlo 기법은 비교적 수월한 방법을 제시하는데도 불구하고 실제적으로 복잡하고 신뢰성 높은 시스템에 적용하기에는 비효율적이다.

전통적인 Monte Carlo 기법은 단순히  $N$ 개의 표본 중에서  $E$  공간에 떨어지는 것들의 비를 이용하여 추정하게 되어

이 경우  $\hat{\alpha}^{MC}$ 의 분산은

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\alpha}^{MC}) &= E[(\hat{\alpha}^{MC} - \alpha)^2] \\ &= \frac{\alpha(1-\alpha)}{N} \\ &\approx \frac{\alpha}{N} \end{aligned} \quad (5)$$

이다.

$\alpha$ 가 작을 경우  $\hat{\alpha}^{MC}$ 의 표준오차 (Standard Error)는 근사적으로  $\sqrt{\alpha/N}$ 이 되고 표본 크기  $N$ 이 충분히 크지 않다면 표준오차는 실제 확률  $\alpha$ 보다 훨씬 크게 된다.

따라서 정확한 시뮬레이션 결과를 얻기 위해서는 많은 수의 샘플과 오랜 시뮬레이션 수행 시간이 필요하다. 이러한 문제점은 복잡한 통신 시스템에서 오류율을 추정하는 경우와 같은 희귀사건(E)의

확률을 추정할 경우에 자주 제기되고 있다. 특히 digital lightwave system 이나 ATM 스위치와 같은 고성능 시스템의 경우 에러율은  $10^{-10}$ 에 가까워서 이 경우 10%의 상대정밀도를 가지고 에러율을 추정하기 위해서는 보통  $10^{12}$ 개가 넘는 표본이 필요하게 된다.

## 2.2 중요샘플링기법(Importance Sampling)

중요샘플링기법은 시뮬레이션 실험으로 얻어진 희귀사건의 확률을 추정하는데 있어 분산을 줄이는 목적으로 사용되어진다. 분산을 줄임으로써 전통적인 Monte Carlo 기법의 시뮬레이션 보다 짧은 수행으로 주어진 정밀도의 추정을 할 수 있는 효율적인 기법으로 알려져 있다.

중요 샘플링의 중요한 가정은 시뮬레이션의 입력되는 확률 변수에서 추정하는 척도에 더 많이 반영하는 특정한 값이 존재한다는 것이다. 만일 이와 같이 중요한 값들을 더 많이 샘플링하게 된다면 추정치의 분산은 줄어들 수 있을 것이다. 그러므로 중요샘플링의 기본적인 방법은 중요한 값을 더 많이 발생시키는 수정된 분포(modified distribution)를 선택하는 것이다.

예를 들어, 도착율  $\lambda$ , 서비스율  $\mu$ 인 M/M/1 시스템에서 바쁜 기간동안 대기고객수가 특정한 레벨  $A$ 에 도달하는 확률( $\alpha$ )을 구하려 한다면 다음과 같은 지시확률변수를 정의할 수 있다.

$$I_{\omega} = \begin{cases} 1 & \text{if E occurs in } \omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where

$E$  : 바쁜기간 동안 대기고객수가  $A$ 를 넘는 사건

$\omega$  : 바쁜기간 동안의 샘플 경로.

바쁜 기간동안  $A$ 에 도달하는 샘플경로  $\omega$ 를  $\omega^*$ 라 한다면 구하고자 하는 확률  $\alpha$ 는

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \Pr(\text{바쁜기간 동안 } A \text{에 도달}) \\
 &= E(I_w) \\
 &= \int_w I_w dF(\omega) \\
 &(\because \omega \neq \omega^* \text{ 일 때 } I_\omega = 0)
 \end{aligned}$$

와 같고 바쁜 기간동안 대기고객수가 A를 넘지 않는다면  $I_w=0$  이기 때문에  $\alpha$ 를 추정하기 위해 반영되어지는 샘플경로는  $\omega^*$ 에 속하는 것 즉, 대기 고객수가 A를 넘는 바쁜 기간동안의 도착간격과 서비스시간으로 이루어진 샘플 경로이다.

따라서 중요샘플링 시뮬레이션에서의 수정된 입력분포는 대기고객수가 A에 많이 도달할 수 있는 도착간격과 서비스시간을 만드는 도착시간 분포와 서비스시간 분포를 사용하게 될 것이다.

중요샘플링에서 사용되는 수정된 분포는 편향된(biased) 분포가 되고 물론 이를 그대로 시뮬레이션에 반영한다면 결과도 역시 편향된 추정량(biased estimator)일 것이다. 따라서 수정된 분포를 사용하기 위하여 시뮬레이션의 출력값에 가중치를 부여하는 과정이 따른다. 이 때 사용되어지는 함수를 우도비 함수(Likelihood ratio function,  $L(X)$ )라 한다

전체 표본 공간  $\Omega$ 에서 확률변수  $X$ 와 분포 함수  $F(X)$ 를 정의하자. 그리고 표본공간은 동일하게 유지하고 분포함수가  $F^*(X)$ 인 수정된 시스템을 정의한다.

$dF(X) > 0$  일 때  $dF^*(X) > 0$  라 하면 우도비(likelihood ratio)는

$$L(X) = \frac{dF(X)}{dF^*(X)} \quad (6)$$

이다.

식 (1) 과 같이 사건 E에 대한 지시 확률변수를 정의한다면 다음을 유도할 수 있다. X가  $dF^*$ 인 분포를 따를 때의 평균을  $E^*$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 E^*[L(X) \cdot I_X] \\
 &= \int \frac{dF(X)}{dF^*(X)} I_X dF^*(X) \\
 &= \int I_X dF(X) \\
 &= E(I_X) \\
 &= \alpha
 \end{aligned} \quad (7)$$

따라서 수정된 과정을 시뮬레이션하여  $\alpha$ 를 추정하기 위해서는 분포함수  $F^*$ 로부터 N개의 Pseudorandom sample들을 발생시킨 후 다음을 계산한다.

$$Y_i = I_{X_i} \cdot L(X_i) \quad (8)$$

$\bar{Y}$  즉,  $Y$ 의 평균은 중요샘플링에 의한  $\alpha$ 의 추정치가 된다.

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}^{IS} &= N^{-1} \sum_{i=1}^N Y_i \\
 &= N^{-1} \sum_{i=1}^N I_{X_i} L(X_i) \\
 &= N^{-1} \sum_{i=1}^N I_{X_i} \frac{dF(X_i)}{dF^*(X_i)}
 \end{aligned} \quad (9)$$

식 (7)에서 보였듯이  $\hat{\alpha}^{IS}$ 는  $\alpha$ 에 대한 불편 추정량이다.

중요샘플링에서 분산감소 효과를 얻기 위해서는  $I_X = 1$  일 때 항상  $L(X) < 1$ 인  $dF^*(X)$ 를 선택하는 것이 중요하다.  $E^*$ 가  $dF^*$ 인 분포를 따를 때의 평균이라 하면

$$\begin{aligned}
 E^*[L^2(X) I_X^2] &< E^*[L(X) I_X^2] \\
 &= E[I_X^2]
 \end{aligned} \quad (10)$$

그러므로

$$var[\overline{Y}] < var[\overline{I_X}]$$

이 성립하여 분산이 감소하는 효과를 볼 수 있다. 따라서 중요샘플링기법의 효과적인 적용은 적절한 중요샘플링 분포의 선택에 달려있다.

### 2.3 최적 중요샘플링 분포

이론적으로 중요샘플링에 의한 추정치  $\hat{a}^{IS}$ 의 분산의 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & var^*(\hat{a}^{IS}) \\ &= E(\hat{a}^{IS^2}) - E^2(\hat{a}^{IS}) \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \int \{I_X L(X)\}^2 dF^*(X) - \alpha^2 \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \int I_X^2 \left( \frac{dF(X)}{dF^*(X)} \right)^2 dF^*(X) - \alpha^2 \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \int I_X^2 \frac{dF^2(X)}{dF^*(X)} - \alpha^2 \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

$var^*$ 는 수정된 시뮬레이션 분포에 의한 분산을 뜻한다. 식 (11)에서

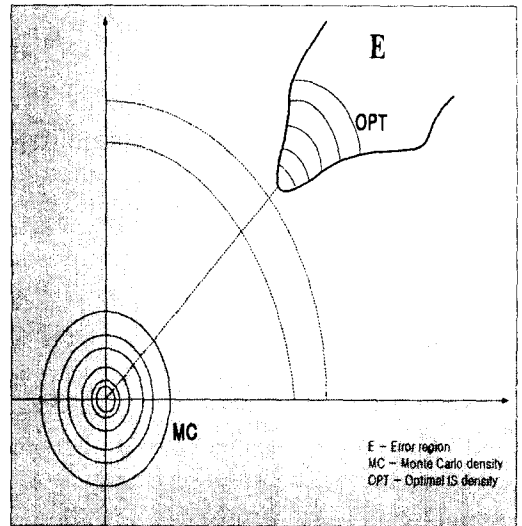
$$\begin{aligned} dF^*(X) &= \frac{I_X dF(X)}{\alpha} \\ &= dF_{opt}^*(X) \quad (12) \end{aligned}$$

일 때  $var^*(\hat{a}^{IS})$  즉, 분산이 0이 됨을 알 수 있다.

위와 같이 이론적으로 분산이 0이 되는 중요 샘플링 분포  $dF_{opt}^*(X)$ 를 비제약 최적중요샘플링 분포(unconstrained optimal IS distribution)라

한다.

<그림 1>은 확률공간에서의 중요샘플링 분포의 형태를 나타낸 것이다.



<그림 1> 확률공간에서 최적중요샘플링 분포의 실례

이론적으로 최적 표본 분포가 존재한다고 하지만 식 (12)에서와 같이 이 분포는 바로 우리가 추정하려는 값  $\alpha$ 를 포함하는 식이기 때문에 시뮬레이션에 직접 이용할 수 없다.

전통적인 중요샘플링 기법에서는 최적 중요샘플링 분포  $dF^*(X)$ 가  $dF^*(\cdot, \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$  즉 모수를 가지는 분포형태라 가정하였다. 따라서 이 경우 표본 분포를 선택하는데 있어 최적 조건을 만족시키는 모수 값  $\theta^*$ 을 선택하는 문제가 제기된다.

예를 들면 Siegmund([14])은  $dF^*(X)$ 가 기하 분포형태 (exponential distribution family)에 속한다고 가정하였고 Oh와 Berger[11]은  $dF^*(X)$ 가 혼합형 분포(mixture distribution)인 경우를 고려하였고 Stadler와 Roy[16]는 모수  $\theta$ 의 최적 값은  $dF^*(X)$ 의 기대값임을 보였다.

현실적으로 중요샘플링 분포의 선택에는 서로

상반되는 두 가지의 요구조건이 제기된다. 첫째 정밀도를 높이기 위해서 최적 중요샘플링 분포에 가까운 분포를 선택해야만 한다. 둘째, 중요 샘플링 기법의 궁극적인 목적인 시뮬레이션 비용을 줄이기 위해 연산 알고리즘이 단순해야 하고 중요샘플링 분포를 따르는 난수의 발생이 쉬워야 한다.

### 3. 비모수 중요샘플링 (Nonparametric Importance Sampling)

#### 3.1 비모수 중요샘플링

중요샘플링은 분석하려는 시스템마다 분산을 줄일 수 있는 최적 중요샘플링 분포를 선택해야 하고 이를 위해 복잡한 계산 과정을 거쳐야만 한다. 적절한 중요샘플링 분포를 선택해야만 효과적인 시뮬레이션을 수행할 수 있으며, 잘못된 중요샘플링 분포의 선택은 오히려 분산을 증가시키는 문제점을 갖고 있다.

2절에서 언급하였듯이 모수를 사용한 최적 중요샘플링 분포의 추정에는 초기에 중요샘플링 분포가 속할 적절한 분포계를 정의한다. 그러나 최적 중요샘플링이 따르는 일반적인 분포계가 존재하지 않고 매 시스템마다 다르게 나타나기 때문에 대부분이 아직 연구과제로 남겨져 있다. 그리고 대부분의 모수를 가지는 분포계는 최적 중요샘플링 분포를 포함하지 못한다. 따라서 최적 중요샘플링 분포의 모수를 선택하기보다는 분석하려는 시스템에 적용할 수 있는 중요샘플링 분포를 추정하고 추정된 분포로부터 난수를 직접 발생시켜 이용할 수 있는 방법이 모색되어야 한다(Zhang[20]).

비모수 중요샘플링에서는 비제약 최적 중요샘플링 분포의 성질인 분포함수의 모수를 추정하는 대신에 분포 자체를 추정하게 된다. 추정된 분포함수는  $\hat{P}_E$ 를 추정하기 위한 시뮬레이션의 중요샘플링 분포로 사용하게 된다.

#### 3.2 비모수 중요샘플링의 알고리즘

비모수 중요샘플링은 다음 두 단계로 이루어진다.

첫째 초기 중요샘플링 분포를 가정한다. 초기 중요샘플링 분포로부터 발생한 pseudorandom number를 이용하여 식 (2.9)와 같은 비제약 중요샘플링 분포의 형태로 비모수 중요샘플링 분포를 추정한다. 둘째 추정한 최적 중요샘플링 분포로부터 샘플링하여 관심있는 회귀사건이 일어나는 확률  $\alpha$ 를 추정한다. 자세한 과정은 다음과 같다.

1 단계 :

- 초기 중요샘플링 분포  $f_0^*(x)$ 를 선택한다.
- $w_0(x) = \frac{f(x)}{f_0^*(x)} I_x$ 를 정의한다.
- 초기 중요샘플링 분포로부터 샘플  $x_1, \dots, x_n$ 을 발생시킨다.
- 다음 식과 같이  $f^*(x)$ 를 추정한다.

$$\hat{f}^*(x) = \{ \hat{f}(x) + \delta \} / (\bar{w} + \delta)$$

여기서

$$\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w(x_i)$$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n w(x_i) K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)$$

$\delta$ 는 분모가 0이 되는 것을 방지하기 위한 0에 가까운 양의 상수이고  $K$ 는 커널함수이다.

2 단계 :

- 1 단계에서 추정한 중요샘플링분포로부터  $x_1^*, \dots, x_m^*$ 을 샘플링하고 이를 이용하여 회귀사건 발생 확률  $\alpha$ 를 추정한다.

$$\hat{\alpha}^{NS} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{f(x_i)}{f^*(x_i)} I_{x_i}$$

$f_{opt}^*(x)$ 를 이론적인 최적 중요샘플링 분포라 하고  $f^*(x)$ 를 비모수 중요샘플링을 통해 추정한 최적 중요샘플링 분포라 하면 분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \text{var}(\hat{a}^{NIS} - a) &= E^*[(\hat{a}^{NIS} - a)^2] \\
 &= E^*\left[\left\{\frac{f(x)}{f^*(x)} I_x - \frac{f(x)}{f_{opt}^*(x)} I_x\right\}^2\right] \\
 &= \int I_x^2 \cdot \left(\frac{f(x)}{f^*(x)} - \frac{f(x)}{f_{opt}^*(x)}\right)^2 \cdot f^*(x) dx \\
 &= \int \left\{\frac{f(x)}{f^*(x)} I_x\right\}^2 \left\{\frac{f_{opt}^*(x) - f^*(x)}{f_{opt}^*(x)}\right\}^2 \cdot f^*(x) dx \\
 &= (\hat{a}^{NIS})^2 \cdot \int \left\{\frac{f_{opt}^*(x) - f^*(x)}{f_{opt}^*(x)}\right\}^2 \cdot f^*(x) dx
 \end{aligned}$$

$f^*(x) = f_{opt}^*(x)$  일 때 분산이 0이 되며, 추정 한 최적 중요샘플링 분포가 이론적인 표본분포와 가까울수록 분산이 감소된다.

#### 4. 적응형 중요샘플링 (Adaptive Importance Sampling)

AIS(적응형 중요샘플링, Adaptive Importance Sampling) 기법은 시뮬레이션 수행과정에서 얻어진 결과를 사용하여 중요샘플링 분포의 미지 모수를 추정한다. 전통적인 중요샘플링 기법에 비해 AIS기법은 동일한 확률 표본 집단에서  $\theta^*$  와 희귀사건이 일어날 확률  $\alpha$  를 동시에 추정하기 때문에 복잡한 계산 과정을 줄일 수 있다.

##### 4.1 적응형 중요샘플링 (Adaptive Importance Sampling)

AIS(Adaptive Importance Sampling) 기법은 신뢰도 높은 기계의 고장율을 추정하여 시스템의 신뢰도에 적용시키는 영역에서 연구되어 왔다.

AIS 기법의 기본적인 이해를 위해서는 우선 비 제약 최적 중요샘플링 분포를 살펴볼 필요가 있다. 비제약 최적 중요샘플링 분포를 사용할 때 추정치의 분산이 0이 됨을 식 (2.13)에서 보았다. 이 경우 단일 시뮬레이션 수행으로 완벽한  $\alpha$  값을 추정할 수 있을 것이다. 그러나 비제약 중요 샘플링 분포는 모수로 추정하고자 하는  $\alpha$ 를 지니고 있기 때문에 시뮬레이션에 직접 이용할 수 없다. AIS 기법을 이용하면 미지의 최적 중요샘플링 분포의 특성을 시뮬레이션의 수행과정에서 효과적으로 얻어낼 수 있다.

AIS의 기본 가정은 관심있는 사건(E)이 일어나는 조건하에서의 샘플들의 분포함수가 비제약 최적 표본분포를 따른다는 것이다. 즉,

$$\begin{aligned}
 dF(X | X \in E) &= \frac{dF(X)}{P_E} I_X \\
 &= dF_{opt}^*(X) \quad (13)
 \end{aligned}$$

$P_E$  : 사건 E가 일어날 확률

따라서, 사건이 발생하는 초기 시뮬레이션에서 얻어진 샘플들의 집합  $X_i$ 가 비제약 최적 중요샘플링 분포  $dF_{opt}^*(X)$ 를 따르고, 이를 이용하여  $dF_{opt}^*(X)$ 의 성질 즉, 모수를 추정할 수 있다.

AIS 기법의 알고리즘은 먼저 몇 번의 짧은 시뮬레이션으로 이루어진다. 각각을 수행하는 동안  $\hat{\alpha}$ 를 계산하고 이를 이용하여  $dF_{opt}^*(X)$ 를 추정한다. 이렇게 추정되어진  $\widehat{dF}^*(X)$ 를 이용하여 순차적으로 중요샘플링 분포를 수정해 나간다. 이러한 방법으로 시뮬레이션이 연속적으로 수행되면 중요샘플링 분포는 비제약 최적 중요샘플링 분포에 근사하게 되고,  $\hat{\alpha}$ 도 좀 더 정확하게 추정될 것이다.

4.2 AIS(적응형 중요 샘플링) 기법의 알고리즘

AIS 기법의 적용을 위한 알고리즘으로 크게 조건부 평균(conditional mean)을 이용한 방법과 조건부 최빈치(conditional mode)를 이용한 방법이 있다. 본 논문에서는 Stadler & Roy[16]가 제시한 조건부 평균을 이용한 알고리즘을 소개한다.

최적 중요샘플링 분포가 가우시안 분포를 따른다고 가정하고 이의 성질을 추정하기 위하여 다음의 조건부 평균을 이용한다.

$$\begin{aligned} \mu &= E(X | X \in E) \\ &= \int_E X \frac{dF(X)}{P_E} \end{aligned} \tag{14}$$

여기서 구한 조건부 평균  $\mu$  를 가우시안 분포를 따르는 중요샘플링의 모수로 사용한다. 초기 시뮬레이션에 의한  $\mu$ 를 추정하기 위하여 위 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} E(X | X \in E) &= \frac{P_E^*}{P_E} \int_E X \frac{dF(X)}{dF^*(X)} \frac{dF^*(X)}{P_E^*} \\ &= \frac{P_E^*}{P_E} E^*(X \cdot L(X) | X \in E) \\ &= \frac{P_E^*}{P_E} \bar{X} \end{aligned} \tag{15}$$

여기서  $P_E^*$  : 중요샘플링을 이용했을 경우의 사건이 일어날 확률.

$$\bar{X} : E^*(X \cdot L(X) | X \in E)$$

$E^*$  : 중요샘플링 분포를 사용한 기대치

초기 모수로 사용할 가우시안 중요샘플링 분포의 모수를 정하고(민감도 분석(sensitivity analysis)를 사용하기도 한다. Bucher([3])의 초기 시뮬레이션을 이용하여 다음을 구할 수 있다.

$$\bar{X} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p X_i L(X_i) \tag{16}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\sum_{i=1}^p L(X_i)} \sum_{i=1}^p X_i L(X_i) \tag{17}$$

여기서  $X_i, i=1, \dots, p$  는 사건이 발생하는 초기 시뮬레이션에서 얻어진 샘플들이다.

AIS기법의 시뮬레이션의 알고리즘은 다음과 같이 세 단계로 이루어진다.

1 단계 :

- 사건 E가 일어나게 하는 가우시안 중요샘플링 분포의 모수를 정하고 이를 초기 중요샘플링 분포의 변형된 모수로 삼는다.

2 단계 :

- 전 단계에서 얻어진 중요샘플링 분포를 사용하여 짧은 시뮬레이션을 수행한다. 이 과정에서 사건을 발생시키는 샘플  $X_i, i=1, \dots, p$  를 추출하여 식 (17)을 이용하여  $\hat{\mu}$  를 계산한다.

3 단계 :

- $\hat{\mu}$  를 중요샘플링 분포의 변형된 모수로 사용하여 시뮬레이션을 수행하고 식 (9)를 사용하여  $\hat{P}_E = \hat{\alpha}$  를 계산한다.

만일 1 단계에서 초기치가 최적값에서 너무 멀리 떨어져 있다면  $\hat{\mu}$  가 적당한 수준에 수렴할 때까지 3 단계를 몇 번 반복 수행할 필요가 있다. 이때 3 단계에서 얻어진 표본들을 사용하여  $\hat{\mu}$  를 계산하게 되고 이를 다음 반복에서의 모수로 사용한다.



## 5. 적응형 비모수 중요샘플링 (Non-parametric Adaptive Importance Sampling)

### 5.1 적응형 비모수 중요 샘플링 기법의 기본 개념

최적 중요샘플링 분포함수가 관심있는 사건(E)이 발생하는 조건하에서의 샘플들의 분포함수라는 적응형 중요샘플링 기법의 기본개념하에서 최적 중요샘플링 분포의 성질을 추정하는 대신 분포함수 자체 즉 밀도함수  $f_{opt}^*$ 를 직접 추정하는 것이다.

### 5.2 적응형 비모수 중요샘플링 기법의 알고리즘

단계 1 :

- 초기 시뮬레이션을 수행한다.  
이 과정에서 사건 E를 발생시키는  $p$  개의 샘플  $X_i, i=1, \dots, p$  을 추출한다.

단계 2 :

- $f_{opt}^*$  를 다음 식( )과 같이 커널 함수추정을 이용하여 추정한다.

$$\hat{f}_{opt}(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{1}{h} K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad (18)$$

여기서

$h$ 는 평활모수(smoothing parameter) 이고,  $K(\cdot)$  는 단순한 사각형(rectangular) 커널 함수를 사용했고 그 식은 다음과 같다.

$$K(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } |y| < 1 \\ 0 & \text{o/w} \end{cases} \quad (19)$$

단계 3 :

- 중요샘플링 분포로 전 단계에서 얻어진  $\hat{f}_{opt}(x)$  를 사용하여 중요샘플링기법을 적용한

시뮬레이션을 수행한 후 다음과 같이  $\hat{P}_E$  를 계산한다.

$$\hat{P}_E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{\hat{f}_{opt}(x_i)} I_{x_i} \quad (20)$$

만일 만족할 수준의 분산의 감소가 일어나지 않는다면 3 단계에서 얻어진 데이터에서 사건 E를 발생시키는 샘플을 다시 추출하여 2단계로 돌아가  $\hat{f}_{opt}(x)$ 를 다시 추정하여 중요샘플링 시뮬레이션을 수행한다.

비모수 방법에서는 분포함수의 형태 자체를 직접 추정해야 하기 때문에 확보된 데이터를 사용하여 적절한 추정함수를 선택하는 과정이 중요한 역할을 한다. 밀도함수의 추정에는 다양한 방법이 사용되고 있는데 히스토그램(histogram)이나 원시추정량(naive estimator), 커널추정량(kernel estimator), 최근접근법(nearest neighbour method), 변수커널법(variable kernel method) 등이 있다. [12]

본 논문에서는 밀도함수의 추정에 커널 함수추정을 사용하였다. 커널 함수의 정확도는 평활모수의 선택에 달려있다. 평활모수를 작게 선택하면 지나치게 평활화되는 경향 즉, 편향치가 줄어드나 MSE (means Squared Error) 가 커지는 경향이 있으며, 평활모수를 크게 선택하면 추정된 함수가 심하게 진동하는 경향, 즉 편향치가 커지는 반면 MSE는 작아진다[17]. 이상적인 평활모수는 샘플의 크기가 커질수록 0으로 수렴하나, 매우 느린 비율로 수렴한다[15].

## 6. 적응형 비모수 중요샘플링 기법의 M/M/1 대기행렬에의 적용

도착율이  $\lambda$  이고 서비스율이  $\mu$  인 M/M/1 시스템에서 다음의 확률을 추정하는 과정을 생각하자.

$\alpha = \text{Pr}(\text{서버가 바쁜 기간중에 대기고객이 A 에 도달})$

적용형 비모수 중요샘플링 기법(이하 NAIS)의 적용과정은 다음과 같다.

- 1] 짧은 시뮬레이션을 수행하여 서버가 바쁜 기간 중에 대기고객이 A에 도달하는 바쁜기간 중의 도착 간격과 서비스 시간을 저장한다.
- 2] 커널함수추정을 사용하여 중요샘플링 분포로 사용할 도착 간격과 서비스 시간의 분포를 추정한다.
- 3] 추정한 중요샘플링 분포를 사용하여 시뮬레이션을 수행한다.

서버가 바쁜 기간 중의 대기고객이 A에 도달하는 샘플경로  $\omega$  는 시스템 내의 고객이 0이 되기 전에 시점  $\tau$  에서 A에 도달한다. 만일 이 기간동안 시스템에서 빠져나간 고객수가  $m$  이라면 이 바쁜기간 중에는  $A+m-1$  개의 도착이 있게 된다. 따라서 우도비 함수  $L(\omega)$  는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{A+m-1} \frac{f(t_i)}{f^*(t_i)} \cdot \prod_{j=1}^m \frac{g(s_j)}{g^*(s_j)}$$

여기서

$t_i$  :  $i$  번째 도착하는 고객의 도착간격

$s_j$  :  $j$  번째 이탈하는 고객의 서비스 시간

$f(x)$  : 도착간격의 확률밀도함수

$f^*(x)$  : 중요샘플링분포의 도착간격 확률밀도함수

$g(x)$  : 서비스 시간의 확률밀도함수

$g^*(x)$  : 중요샘플링분포의 서비스시간 확률밀도함수

시뮬레이션을 N번 반복 수행하였다면 추정하고자 하는 확률  $\alpha$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

<표 1> M/M/1 대기행렬에서의 적용형 비모수 중요샘플링 기법과 Monte Carlo 기법을 적용한 시뮬레이션 결과 비교( 10000 busy period )

queue level (A)	NAIS		Monte Carlo	
	$\hat{\alpha}$	SD( $\hat{\alpha}$ )	$\hat{\alpha}$	SD( $\hat{\alpha}$ )
10	2.36E-03	1.02E-04	2.53E-03	2.96E-04
12	4.60E-04	1.03E-05	8.80E-04	2.49E-04
14	2.97E-04	1.15E-05	3.30E-04	1.89E-04
16	5.79E-05	2.81E-06	1.00E-04	8.16E-05
18	2.50E-05	1.55E-06	5.00E-05	5.27E-05
20	7.37E-06	2.25E-07	3.0E-05	4.83E-05
30	6.41E-08	4.82E-09	-	-
40	5.38E-11	4.78E-11	-	-

<표 2> 적응형 비모수 중요샘플링 기법과 Monte Carlo 기법 추정치의 95%신뢰구간의 half-width 비교

queue level (A)	95% C.I. 의 half-width	
	NAIS	Monte Carlo
10	2.00E-04	7.57E-4
12	2.01E-05	4.87E-4
14	2.25E-06	3.70E-4
16	5.50E-06	1.60E-4
18	3.05E-06	1.03E-4
20	4.42E-07	9.47E-5
30	9.45E-09	-
40	9.36E-11	-

$$\alpha = \sum_{i=1}^N L(\omega) \cdot I_x$$

여기서

$$I_{\omega} = \begin{cases} 1 & \text{대기고객이 A에 도달할 때} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

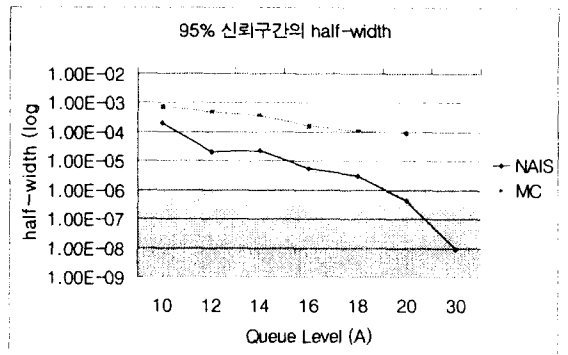
<표 1>은 위 시스템을 A를 다르게 적용하여 NAIS 기법과 전통적 Monte Carlo 기법을 적용하여 시뮬레이션을 수행한 결과이다.

큐 레벨 A의 값이 커질수록 바쁜기간 중에 대기고객이 A에 도달할 확률이 줄어들음을 볼 수 있다. 참고로 큐 레벨이 10일 경우의 이론치는 2.43E-3이다.

Monte Carlo 기법은 10<sup>-5</sup>이하의 확률은 구할 수가 없는데 반해 NAIS 기법은 동일한 수행으로 그 이하의 확률값도 추정이 가능하다.

NAIS 기법과 MC 기법에 의한 추정치에 대한 95% 신뢰구간은 다음 <표 2> 와 같다. 전반적으로 같은 시뮬레이션 수행에서 분산이 감소하여 추정치의 신뢰도가 높아졌다.

<그림 2>에서 두 결과를 도표로 비교하였다.



<그림 2> 적응형 비모수 중요샘플링 기법과 Monte Carlo 기법 추정치의 신뢰구간의 half-width 비교

## 7. 결론

본 논문은 새로운 속산 시뮬레이션 기법인 비모수적 적응형 중요샘플링(NAIS) 기법을 제안하여, IS와 AIS를 회귀사건 시뮬레이션에 적용시 어려운 문제인 최적의 샘플링 분포의 추정 방법을 새롭게 제안하였고, 그 방법을 M/M/1 대기행렬 모형에 적용하여 성능을 검증하였다. NAIS의 실험 결과를 통해 전통적인 Monte Carlo 시뮬레이션에 비하여 성능이 우수하고 분산 감소 효과를 관측할 수 있었다. 또한 NAIS는 최적 중요샘플링 분포함수를 추정하는 자료를 시뮬레이션 과정 중에 수집하므로 NIS 보다 알고리즘을 더욱 간편하도록 하였다. 결론적으로 NAIS는 시스템의 특성치에 대한 정보가 없는 고 신뢰도의 시스템의 시뮬레이션에 유용하다.

최적 중요샘플링 분포함수를 추정을 더욱 효율적으로 개선하기 위하여 복잡한 형태의 커널 함수의, 예를 들면 가우시안 밀도함수, 사용이 시도되어야 한다. 본 논문에서는 Acceptance-Rejection를 사용하여 난수를 생성하였으나, 너무 많은 변수가 기각되므로 좀더 효율적인 난수 발생 기법의 사용도 연구되어야 한다. 또한 IS와 AIS, NIS와의 성능 비교도 추후 연구해야 할 과제이다.

## 참고문헌

- [1] Al-Qaq, W. A., Devetsikiotis, M., and Townsend, J. K., "Stochastic gradient optimization of importance sampling for the efficient simulation of digital communication systems.", *IEEE Trans. Communications*, Vol. 43, pp. 2975-2985, Dec. 1995.
- [2] Banks, J., Carson II, J. S., and Nelson, B. L., *Discrete-Event Simulation*, Prentice Hall International, 1996.
- [3] Bucher, C. G., "Adaptive Sampling - An Iterative Fast Monte Carlo Procedure" *Structural Safety*, vol. 5, pp. 119-126, June 1988.
- [4] Bucklew, J. A., *Large Deviation Techniques in Decision Simulation and Estimation*, John Wiley, New York, 1990.
- [5] Cheng, R. C. H., Taylor T., and Sztrik J., "Simulation of Rare Queuing Events by Switching Arrival and Service Rates" *Proceedings of the 1993 Winter Simulation Conference*, pp. 317-322, December 1993.
- [6] Devetsikiotis, M., and Townsend, J. K. "An algorithmic approach to the optimization of importance sampling parameters in digital communication system simulation." *IEEE Trans. Communications*, Vol. 41, pp. 1464-1473, Oct. 1993.
- [7] Frost, V. S., and Melamed, B., "Traffic Modeling for Telecommunications Network" *IEEE Communication Magazine*, vol.32, pp. 70-81, March 1994.
- [8] Glynn, P. W., and Iglehart, D. L., "Importance Sampling for Stochastic Simulations", *Management Science*, Vol. 35, pp. 1367-1392, 1989.
- [9] Jeruchim, M. C. "Techniques for Estimating Bit Error Rate in The Simulation of Digital Communication systems" *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, Vol. SAC-2, pp. 152-170, Jan 1984.
- [10] Oh, M. S., and Berger, J., "Adaptive Importance Sampling in Monte Carlo Importance Sampling" *Journal Of America Statistical Association*, Vol. 41. pp. 143-168 1992.
- [11] Shahabuddin, P., "Importance Sampling for the Simulation of Highly Reliable Markovian Systems" *Management Science*, Vol. 40, No. 3, pp. 333-352, March 1994.
- [12] Shahabuddin, P., "Fast Simulation of Packet Loss Rates In Communication Network with Priorities" *Proceedings of the 1994 Winter Simulation Conference*, pp. 274-281 December

- 1994.
- [13] Siegmund, D., "Importance Sampling in Monte Carlo Study of Sequential Tests" *The Annals of Statistics*, vol. 4, No. 4, pp. 673-684, 1976.
- [14] Silverman, B. W., *Density Estimation*, Chapman and Hall, London, 1986.
- [15] Stadler, J. S., and Roy, S., "Adaptive Importance Sampling" *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 11, No. 3, pp 309-316, April 1993.
- [16] Thompson, J. R., and Tapia, R. A., *Nonparametric Function Estimation, Modeling, and Simulation*, Society for *Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia. 1990.
- [17] West, M., *Modeling with Mixtures*, in *Bayesian Statistics 4rd ed*, Oxford University Press, Oxford UK, pp. 503-524, 1992
- [18] West, M., "Approximation Posterior Distributions by Mixtures", *Journal of Royal Society*, Ser. B., Vol. 55, pp. 509-422, 1993.
- [19] Zhang, P., "Nonparametric Importance Sampling" *Journal of America Statistical Association*, vol. 91, No. 432, pp. 1245-1253 September 1996.

● 저자소개 ●



김윤배

1978년 성균관대학교 산업공학과 공학사  
 1987년 University of Florida ISE Dept. 공학석사  
 1992년 Rensselaer Polytechnic Institute 공학박사  
 1995-현재 성균관대학교 시스템경영공학부 조교수/부교수  
 관심분야: 시뮬레이션 방법론, 통신망성능분석, 병렬시뮬레이션

노덕선

1996년 성균관대학교 산업공학과 공학사  
 1998년 성균관대학교 산업공학과 석사  
 1999년-현재 해군 소위로 근무중  
 관심분야: Fast Simulation, Simulation Output Analysis



이명용

1982년 서울대학교 산업공학과 공학사  
 1984년 서울대학교 산업공학과 석사  
 1992년 서울대학교 산업공학과 박사  
 1985년-현재 한국통신 근무  
 관심분야: Traffic Engineering/IP Traffic, 통신망 성능분석