Bernoulli 방정식과 에너지방정식

조 용 식 (세종대학교 토목환경공학과 조교수)

1. 서론

개수로 수리학(open channel hydraulics)은 천수이론(shallow-water theory)의 한 분야이며, 천수이론은 동수역학(hydrodynamics)의 한 부분으로 정수압 가정에 근거한 이론이다. 즉, 2차원 천수방정식(shallow-water equations)의 운동량방정식은 3차원 운동량방정식(Euler방정식)에서 연직방향 가속도를 무시한 후 연직방향에 대하여 적분하여 유도할 수 있다(Liggett, 1995). 흐름이 비회전(irrotational)이며, 비압축성(incompressible)일 경우 연속방정식은 Laplace방정식이 되며, 운동량방정식은 Bernoulli방정식이 된다.

개수로 수리학에서 가장 흔히 접하는 식은 아마 Bernoulli방정식과 에너지 방정식일 것이다. 그런데 국내에서 출판된 일부 유체역학 또는 수리학 교재중에는 Bernoulli방정식과 에너지 방정식을 혼동하거나 올바르지 못하게 사용되고 있어 이에 대한 시정을 하고 토목환경공학과 학부생과 대학원생들의 이해를 돕고자 하는 것이 본 기사의 목적이다. 참고로 언급하면, 이와 같은 오류는 국내 교재 뿐만 아니라 국내에서 대학원 교재로 많이 사용되고 있는 원서중의 하나인 Open Channel Hydraulics(French, 1985)에서도 발견되고 있다(Liggett, 1993).

다음 장과 3장에서는 Bernoulli방정식과 에너지방정식의 유도 과정을 각각 간략하게 서술하며, 4장에서는 Bernoulli방정식과 에너지방정식의 차이를 기술한다.

2. Bernoulli 방정식

Bernoulli 방정식은 운동량방정식, 즉 물리적으로 운동량 보존을 의미하는 다음과 같은 식으로부터 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + gz\right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \qquad (1)$$

식 (1)은 Newton의 제2법칙인 가속도의 법칙, 즉 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$로 부터 유도한 식으로 Navier-Stokes식으로도 불린다. 식 (1)의 각 기호에 관한 설명은 많은 유체역학 교재에서 사용하는 것을 사용한 관계로 생략하며(예:Liggett, 1995), 왼쪽의 두 항은 각각 국부가속도(local acceleration)과 이송가속도(convective acceleration)에 의한 단위질량당의 관성력(inertial force), 오른쪽은 차례대로 압력(pressure force), 중력(gravitational force) 및 점성력(viscous force)을 의미한다.

운동량방정식 (1)로부터 Bernoulli 방정식을 유도하기 위해서는 몇가지 중요한 가정을 해야 한다. 먼저, 점성력을 무시하기 위하여 유체를 비점성 유체(inviscid fluid)로 가정하면 식(1)은 다음과 같은 Euler방정식이 된다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + gz\right) \qquad (2)$$

벡터 관계식 $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0.5\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$을 이용하면 식 (2)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})-\mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{u})=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+gz\right) \quad (3)$$

만일, 유체의 흐름이 비회전 흐름(irrotational flow)이면 와도(vorticity)가 0, 즉 $\nabla\times\mathbf{u}=0$이 되므로 식 (3)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})+\nabla\left(\frac{p}{\rho}+gz\right)=0 \quad (4)$$

비회전 흐름 가정하에서는 $\mathbf{u}=\nabla\Phi$로 정의되는 속도포텐셜(velocity potential)Φ를 도입할 수 있으므로 식 (4)는 다음과 같이 된다.

$$\nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+\frac{p}{\rho}+gz\right)=0 \quad (5)$$

식 (5)를 적분하면 다음과 같은 Bernoulli 방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+\frac{p}{\rho}+gz=C(t) \quad (6)$$

식 (6)에서 $C(t)$는 Bernoulli 상수이며, 시간만의 함수이다. Bernoulli 방정식 (6)에서 속도포텐셜 Φ는 물리적으로 아무 의미는 없으며 단지 수학적인 편리함, 즉 각 방향 속도성분 $\mathbf{u}=(u, v, w)$를 계산하는 대신 Φ만을 계산하면 되기 때문에 이용하는 것이다.

만일, 흐름이 정류이면 식 (6)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+\frac{p}{\rho}+gz=C \quad (7)$$

또한, 식 (7)은 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2+\frac{p}{\rho}+gz=C \quad (8)$$

참고로, 식 (6)의 Bernoulli 상수는 다음과 같이 정의되는 새로운 속도포텐셜을 이용하여 제거할 수 있다.

$$\Phi'=\Phi-\int^t C(\tau)d\tau \quad (9)$$

3. 에너지방정식

에너지방정식은 물리적으로 에너지 보존을 의미하며 다음과 같이 유도할 수 있다(Liggett, 1995).

$$\frac{d\bar{q}}{dt}-\frac{dW}{dt}=\int_{cv}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(gh+\frac{u^2}{2}+e\right)\right]dV + \int_{cs}\rho\left(gh+\frac{u^2}{2}+e+\frac{p}{\rho}\right)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dA \quad (10)$$

식 (10)에서 $\bar{q}$는 검사체적(control volume)의 열전달, W는 압력에 의한 일을 제외한 일, e는 단위 질량당의 내부에너지, h는 위치이며 $\mathbf{n}$는 검사표면에 대하여 외부로 향하는 단위 수직벡터를 의미한다. 식 (10)의 오른쪽에서 첫째 항과 둘째 항은 각각 검사체적(CV)과 검사표면(CS)에 대하여 적분을 수행한다.

식 (10)을 관수로에 국한시키고 정류 흐름을 가정하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\bar{q}}{dt}-\frac{dW}{dt}=-\int_{A_1}\rho\left(gh+\frac{u^2}{2}+e+\frac{p}{\rho}\right)udA + \int_{A_2}\rho\left(gh+\frac{u^2}{2}+e+\frac{p}{\rho}\right)udA \quad (11)$$

식 (11)에서 A_1과 A_2는 상류와 하류에서의 단면적을 의미하며, 단면은 모두 흐름에 대하여 수직이라고 가정하였다. 정수압 가정, 즉 $p/\rho+gh$는 각 단면에서 일정하다고 하면 식 (11)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{\rho\bar{u}A}\left(\frac{d\bar{q}}{dt}-\frac{dW}{dt}\right)=-\left(\alpha_1\frac{\bar{u}_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gh_1+e_1\right) + \left(\alpha_2\frac{\bar{u}_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gh_2+e_2\right) \quad (12)$$

식 (12)에서 α는 에너지보정계수(energy correction factor)이며 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{u}{\bar{u}}\right)^3 dA \tag{13}$$

또한, 식 (12)와 (13)에서 사용된 $\bar{u}$는 단면의 연직 방향과 가로방향에 대하여 두 번 평균한 유속이다.

식 (12)를 검사체적내에서 수행된 일이 없다고 가정하고 개수로 흐름에 적용하면 다음과 같은 식을 유도할 수 있다(Liggett, 1995).

$$\alpha_1\frac{\bar{u}_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+h_1=\alpha_2\frac{\bar{u}_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+h_2+h_L \tag{14}$$

식 (14)에서 h_L은 수두손실이며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h_L=\frac{e_2-e_1}{g}-\frac{1}{\rho g\bar{u}A}\frac{d\bar{q}}{dt} \tag{15}$$

식 (14)의 보다 상세한 유도과정은 Liggett(1995)를 참조할 수 있다.

4. Bernoulli 방정식과 에너지 방정식 비교

Bernoulli 방정식 (8)과 에너지방정식 (14)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{u_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2 \tag{16}$$

$$\alpha_1\frac{\bar{u}_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+h_1=\alpha_2\frac{\bar{u}_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+h_2+h_L \tag{17}$$

식 (17)에서 에너지보정계수와 수두손실 및 overbar를 제거하면 식 (16)과 (17)은 동일한 형태이나 몇 가지 측면에서 두 식은 근본적으로 다르다. 첫째, Bernoulli 방정식은 운동량방정식으로부터 유도되었으나, 에너지방정식 (17)은 에너지 개념으로부터 유도되었다. 둘째, 에너지방정식은 유한한 검사체적의 두 단면에 적용되는 반면에 Bernoulli 방정식은 유체내의 하나 또는 그 이상의 점에 적용된다. 따라서, Bernoulli 방정식에는 에너지보정계수를 사용할 수 없으며, Bernoulli 방정식에서는 임의 지점을 유속을 사용하는 반면에 에너지 방정식에서는 단면에서의 평균유속을 사용한다. 마지막으로, Bernoulli 방정식과는 달리 에너지방정식을 유도할 때는 비회전 흐름에 관한 가정이 필요없다. 표 1은 Bernoulli 방정식과 에너지 방정식의 차이를 도표화한 것이다.

결론적으로 Bernoulli 방정식은 점성력을 무시한 운동량방정식을 적분하여 유도한 반면에, 에너지 분석을 통해 유도한 에너지방정식은 비록 그 형태는 Bernoulli 방정식과 유사할지라도 유도과정이 다르므로 Bernoulli 방정식과 에너지 방정식은 혼용하여 사용할 수 없다.

표 1. Bernoulli 방정식과 에너지방정식의 비교

구분	Bernoulli방정식	에너지방정식
물리적 근거	운동량 보존	에너지 보존
유속	임의 점의 유속	단면평균유속
적용	임의의 두 점	두 단면
비회전 흐름 가정	필요함	필요없음
에너지보정계수	사용할 수 없음	사용할 수 있음
수두손실	고려할 필요없음	고려해야 함

〈참 고 문 헌〉

French, R.H. (1985). Open channel hydraulics, McGraw-Hill Inc.

Liggett, J.A. (1993). "Critical depth, velocity profiles, and averaging," Journal of Irrigation and Drainage Engineering, Vol. 119, No. 2, pp. 416-422.

Liggett, J.A. (1995). Fluid mechanics, McGraw-Hill Inc.