

밀도류 이론

최성욱 (연세대학교 사회환경·건축공학부 조교수)

1. 개요

성층류(stratified flow)란 그림 1에서와 같이 밀도가 다른 유체가 서로 층을 이루며 흘러가는 현상을 의미한다. 유체가 층을 이루게 되는 것은 밀도차이에 의한 것으로, 서로 밀도가 다른 유체가 만날 경우 상대적으로 밀도가 큰 유체는 아래로 밀도가 작은 유체는 위로 층을 형성하여 흐르게 된다. 온도, 용질의 농도, 그리고 유체중의 부유물질 등으로 인하여 유체간의 밀도차가 발생하며, 이로 인하여 음의 부력(negative buoyancy) 혹은 양의 부력에 의해 성층류는 흐르게 되는 것이다.

중력의 영향을 받는 유체의 움직임은 거의 모두가 밀도변화에 기인되거나 영향을 받는다. 엄격히 말하면 자유수면을 갖는 흐름의 경우도 상층은 공기로 하층은 물로 이루어진 성층류라고 할수 있다. 그러나 이러한 경우는 두 유체간의 밀도차가 약 800배나 되므로 개수로 수리학에서는 상층유체의 영향을 무시할수 있는 것이다.

밀도가 주변수역(ambient water)과 다른 유체가 방류되어 先端(front)을 형성하며 하류로 흘러갈 때 이를 밀도류(density current)라고 한다(그림 2와 3 참조). 따라서 밀도류는 주변수역을 헤쳐나가는 선단부와 뒤에서 쫓아오는 몸체부로 이루어졌으며, 일반적으로 성층류가 후자에 해당한다면 밀도류는 성층류를 포함하는 포괄적인 개념의 용어라고 할 수 있다. 밀도류가 유입부에서 방출되면서 운동량의 영향을 받아 흐를 때 이를 켈(jet)이라고 하며, 유입부의 영향이 없이 자체의 부력흐름들에 의해 하류로 진행할 때 부

력류(plume)라고 한다. 성층류는 유입조건에 따라 연속 흐름(continuous current)과 불연속 흐름(discontinuous current)으로 나뉜다. 연속흐름은 유입부에서 계속하여 밀도류가 공급되는 흐름을 의미하며, 불연속흐름은 유입부에서 일시적으로 밀도류가 공급되는 흐름으로 밀도 thermal 혹은 밀도 cloud로 불리운다.

최근 공학적 관심을 끄는 대상으로 부유사 밀도류(turbidity current)가 있다(그림 4 참조). 부유사 밀도류는 부유사(suspended sediment)에 의한 음의 부력에 의해 하상이나 해저를 흐르는 것으로 저수지 퇴적문제나 해저 대륙붕의 생성에 깊은 관련이 있는 것으로 알려져 있다. 온도나 용질에 의한 밀도류가 일반적으로 부력을 보존하는 것과는 달리 부유사 밀도류는 흐름의 난류정도에 따라 부유상태의 유사를 하상에 퇴적시키기도 하고 하상의 유사를 밀도류로 유입시키기도 한다. 전자의 경우는 부력흐름률이 계속 감소하여 밀도류가 소멸되며, 후자의 경우는 유입된 유사로 인하여 유속이 증가되며, 증가된 유속은 더욱 더 하상을 굴착하여 유사를 밀도류 안으로 유입시키게 된다. 이러한 현상은 역학적으로도 매우 흥미있는 현상으로 해저협곡(submarine canyon)이 이와 같은 부유사 밀도류의 자기가속 순환과정(self-accelerating cycle)에 의해 형성되었다고 한다.

본 기사를 통하여 밀도류의 종류와 밀도류의 기본 이론, 그리고 밀도류 모형화 기법에 대하여 소개하고자 한다.

2. 밀도류의 예

밀도차로 인하여 발생하는 흐름은 흔히 우리 주변에서 발견된다. 또한 밀도류를 공학적으로 이용하기 위하여 인공적으로 발생시키기도 한다. 밀도류의 예를 열거하면 다음과 같다.

2.1 저수지나 호소에서의 밀도류

수공학적으로 큰 의미를 갖는 밀도류로서 하천의 저수지유입(stream intrusion into reservoir)을 들 수 있다. 유입되는 하천수의 밀도가 저수지에 저장되어 있는 물의 밀도보다 상대적으로 작을 경우에는 상층 밀도류(overflow)를 형성하고 클 경우에는 하층 밀도류(underflow)를 형성한다. 특히 저수지가 매우 깊은 경우에는 하층 밀도류가 바닥면을 따라 흐르다가 밀도가 동일한 층을 만날 수 있는데 이때에는 밀도류가 수평하게 흐르게 되며 이를 층간 밀도류(interflow)라고 한다. 봄에는 하천에서 유입되는 물의 온도가 저수지에 저장되어 있는 물의 온도보다 높아 상층 밀도류가 발생하기 쉬우며, 반대로 여름에는 유입되는 물이 온도가 낮게되어 하층 밀도류가 발생하는 것이 일반적이다. 이러한 저수지에 유입되는 밀도류가 많은 유사를 가지고 있는 경우 저수지에 도달하면 유속이 감소되어 저수지 바닥에 유사를 퇴적하게 되므로 저수지의 저수용량을 심각하게 감소시킬 수 있다.

2.2 해양에서의 밀도류

해저협곡이 부유사 밀도류에 의해 생성되었음은 전술한 바와 같다. 해저에서 관측되는 밀도류는 해저협곡과의 상호작용으로 인하여 유속이 수십 m/s에 달할 수 있어 상당한 파괴력을 지니고 있음이 밝혀졌다. 일례로 1929년에 Newfoundland에서 발생한 해저 케이블의 연속적인 파괴는 부유사 밀도류에 의한 것이라고 한다. 따라서 OTEC(ocean thermal energy conversion) 등의 해저구조물 설계시 부유사 밀도류의 파괴력이 고려되고 있다.

2.3 대기중의 밀도류

대기 중 발생하는 밀도류의 대표적인 예로서는 雷

雨저면의 유출(thunderstorm outflow)과 활강바람(katabatic wind)을 들 수 있다. 뇌우는 덥고 다습한 공기가 차가운 공기를 만나 상승함으로 발생한다. 이때 차가운 공기가 밀도류를 형성하여 지면에 수평하게 퍼지면서 더운 공기의 아래로 흐르게 된다. 활강바람은 산을 타고 흐르는 차가운 기류로 강한 풍속과 차가운 온도때문에 산아래 농작물에 피해를 줄 수 있다.

2.4 그밖의 예

(1) 이산화탄소 밀도류

대기 중 이산화탄소의 양을 줄이기 위한 방법 중의 하나가 이산화탄소의 해양방류기법이다. 기체상태의 이산화탄소를 염수와 적당히 혼합하여 해양에 방류하는 것으로 주입깊이에 따라 심해방류기법과 천해방류기법으로 나뉜다. 이산화탄소 밀도류를 심해에 주입할 경우에는 파이프라인 등의 부대설비가 필요하고 고농도의 이산화탄소 호수를 바다 깊은 곳에 형성하여 주변수역을 오염시킬 수 있다. 반면에 주입조건을 적절히 조절하면 천해에서 밀도류를 주입시켜도 음의 부력에 의해 심해까지 흘러가게 할 수 있다. 이 방법을 사용하면 천해에서 주입된 밀도류가 심해까지 흘러가면서 주변수와 적당히 혼합되므로 심각한 농도차에 의한 오염을 걱정하지 않아도 된다.

(2) 눈사태

눈사태에 관련된 동력학적인 특성은 경사진면에 발달하는 밀도 thermal과 유사하다 (Hopfinger, 1983). 눈 덩어리가 사면을 통해 발달하는 과정을 부유사 밀도류의 자기가속 순환과 비슷하게 설명할 수 있다. 즉, 눈 덩어리가 사면을 타고 진행하면서 바닥과 상호작용을 하여 덩어리가 커지면서 더욱더 속도가 빨라지며, 이것은 바닥면의 눈을 더 많이 유입시키는 결과를 가져오게 되는 것이다.

(3) 물분사 준설에 의한 밀도류

물분사 준설(WID: water injection dredging)은 1980년대에 유럽에서 소개된 준설방법이다. 수중에서 쥘의 형태로 물을 분사함으로써 하상에 퇴적된 유

사를 다시 부상시켜 밀도류를 발생시킨 다음 주운에 영향을 주지않는 곳으로 흘러가게 하는 기술이다. 적당한 조건하에서 발생된 밀도류는 별도의 동력을 사용하지 않아도 유사를 하류로 이송시키는 역할을 하게된다.

(4) 채광 중 발생하는 가스에 의한 밀도류

메탄가스와 같이 채광 중에 발생하는 가스는 공기보다 가볍기 때문에 갱도의 천장을 타고 흐르다가 한 지점에 모이게 되는데 이것이 폭발하면 심각한 인명 손실을 초래할 수 있다.

3. 밀도류 기본이론

3.1 성층류의 등류조건

1959년 Ellison과 Turner는 성층류에 관한 수학적 모형을 제시하고 실험적으로 그 타당성을 보인 바 있다. Ellison과 Turner(1959)에 의한 모형은 일종의 층적분 모형의 효시로서, 이 이론에 의하면 밀도류의 거동을 자유수면을 가진 지표수와 같이 수심방향으로 적분된 연속방정식, 운동량방정식, 그리고 용질에 대한 질량보존방정식으로 기술할 수 있다. 이때 성층류의 등류조건은 다음과 같이 정의되는 bulk Richardson 수 (Ri)가 거리에 따라 변하지 않아야 한다.

$$Ri = \frac{\Delta g h}{U^2} \quad (1)$$

여기서 Δ 는 밀도비(= $\Delta\rho/\rho$), g 는 중력가속도, h 는 밀도류의 두께, 그리고 U 는 밀도류의 수심평균된 속도이다. 위에서 정의된 bulk Richardson 수는 밀도 Froude 수의 제곱의 역수로서, 성층된 유체층의 안정을 나타낸다. 즉, bulk Richardson 수와 상층에서의 물유입(捕獲連行)과는 반비례의 관계가 있는데, Ri 가 클 경우 두 유체층 사이에 강한 성층화가 이루어져 물유입이 작은 안정된 상태를 의미하며, Ri 가 작은 경우에는 상층으로부터 물유입이 활발히 진행되는 불안정한 상태를 나타낸다. 성층류의 등류상태는 연속방정

식에서 다음과 같이 주어진다.

$$dh/dx = e_w \quad (2)$$

여기서 e_w 는 물유입계수이다. 자유수면을 갖는 지표수 흐름의 경우 거리에 따라서 수심이 일정할 때 등류상태라고 정의 하는 것과는 달리, 성층류의 경우에는 상층류의 유입으로 인하여 밀도류의 두께가 일정하게 증가될 때 등류상태라고 정의한다.

3.2 부력의 두가지 역할

유입부에서 멀리 떨어진 하층 밀도류가 강바닥이나 해저를 흘러가는 것은 음의 부력에 기인한다는 것은 앞서 설명한 바와 같다. 밀도차나 하상경사는 부력에 영향을 미치고 부력은 하상마찰과 경계면에 작용하는 전단력과 균형을 이루며 흘러가게 된다. 그러나 밀도차에 의한 부력의 증가는 bulk Richardson 수를 크게하고 이것은 다시 상층의 물유입을 감소시켜 가속되려는 성층류의 안정에 기여하게 된다. 이와 같이 부력은 성층류를 가속시켜 불안정하게 하는 한편 물유입을 감소시켜 성층류를 안정시키는 두 가지 상반된 역할을 하게된다.

3.3 밀도류의 선단속도

밀도류의 공학적 관심사 중의 하나는 밀도류 선단의 전파속도이다. 선단의 전파속도를 구하기 위한 접근방법은 크게 두 가지이다. 첫 번째는 다음과 같이 정의되는 밀도 Froude 수를 이용한 방법이다.

$$Fr = \frac{u_f}{\sqrt{\Delta g h_i}} \quad (3)$$

여기서 u_f 는 밀도류 선단의 전파속도이고 h_i 은 특성길이를 나타낸다. 특성길이는 선단의 높이나 밀도류 몸체의 높이를 사용할 수 있다(대략적으로 밀도류 선단의 높이는 몸체높이의 약 두 배라고 한다). 실험 등을 통하여 일정한 값의 밀도 Froude 수를 구할 경우, 밀도비와 특성길이를 사용하면 선단속도를 예측할 수 있다. 두 번째 방법은 무차원 선단 속도를 이

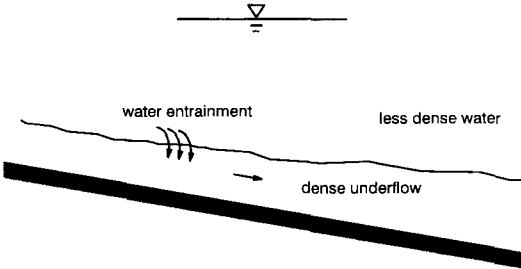


그림 1. 성층류의 요약도

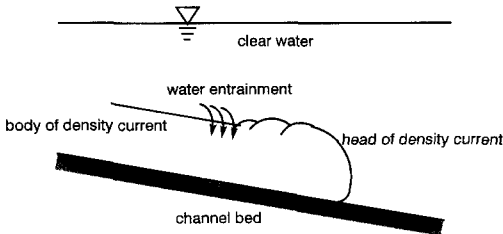


그림 2. 경사진 하도를 흘러가는 밀도류

용하는 방법이다. Britter와 Linden (1980)은 실험을 통하여 다음과 같이 정의되는 무차원 선단속도 ($\bar{u}f$)가 약 1.5임을 보였다.

$$\bar{u}_f = u_{\rho} / B_f^{1/3} \quad (4)$$

여기서 $B_f(\Delta gq)$ 는 단위폭당 부력흐름률이고 q 는 단위폭당 유량이다. 부력흐름률이 보존되는 경우 위의 식 (4)를 사용하면 유입부에서의 부력흐름률을 이용하여 밀도류 선단의 전파속도를 계산할 수 있다.

3.4 성층류의 평균유속

자유수면을 가진 지표수와 성층류가 다른 점 중의 하나는 전자의 경우 공기와 물의 경계면에서 마찰력을 무시할 수 있는 반면에 후자는 물유입으로 인하여 마찰력이 성층류의 흐름에 심각하게 영향을 미친다는 것이다. 그림 1에서와 같이 잘 발달된 성층류가 경사가 S 인 하도를 두께 h 로 흘러갈 때, 힘의 균형을 식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\Delta \rho h S = \tau_0 + \tau_1 \quad (5)$$



그림 3. 몸체부를 형성하여 진행하고 있는 밀도류의 음영도

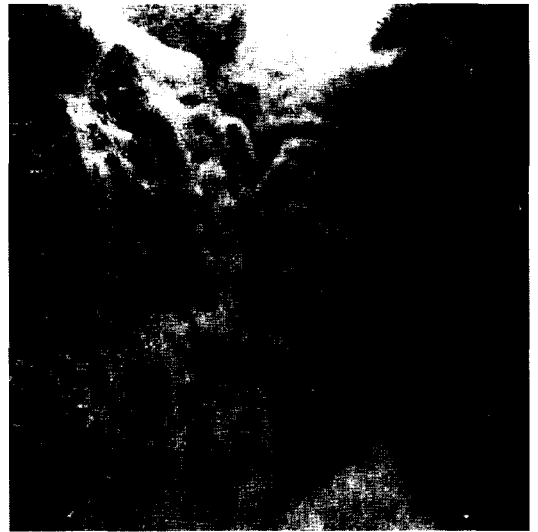


그림 4. 해저협곡을 흐르는 부유사 밀도류

여기서 τ_0 와 τ_1 는 각각 바닥면과 경계면에서의 전단응력을 의미한다. 경계면의 전단응력이 바닥면 전단응력의 a 배로 가정하고, Darcy-Weisbach 공식을 사용하여 바닥의 전단응력을 평균유속의 함수로 나타내면 성층류의 평균유속 (\bar{u})은 다음과 같이 쓸 수 있다 (Harleman, 1961).

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8 \Delta g h}{f(1-a)}} \quad (6)$$

여기서 f 는 마찰계수이다.

4. 밀도류 모형화기법

밀도류의 수치모형화 기법은 크게 두 가지로 나뉘

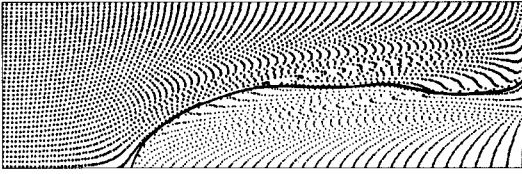


그림 5. MAC 방법에 의한 밀도 thermal의 이동(Daly and Pracht, 1968)

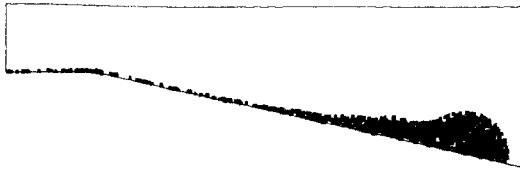


그림 6. MAC 방법을 도입한 유한요소법에 의한 밀도 thermal의 해석 (Kawahara and Ohmiya, 1985)

수 있다. 하나는 밀도류의 속도 혹은 농도의 연직분포 등을 계산할 수 있는 연직모형이며, 다른 하나는 통상적인 수리학에서 많이 쓰이는 적분모형이다. 첫 번째의 연직모형은 밀도류의 미시적인 연직구조를 자세히 살펴볼 수 있다는 장점을 가지고 있으나 난류폐합식에 관련된 유체역학상의 문제와 실제문제에 적용이 어렵다는 단점을 가지고 있다. 두 번째 적분모형은 운동량 방정식을 수직방향으로 적분하여 얻어진 모형으로 밀도류의 연직구조보다는 실제 스케일에서의 밀도류의 거동예측에 초점을 맞추고 있다. 이러한 두 가지 모형은 상충되는 것이 아니고 보완관계라 할 수 있다.

4.1 연직구조 해석모형

(1) Marker-and-cell 기법

밀도류에 관한 최초의 수치모형은 Daly와 Pracht가 1968년에 발표한 Marker-and-cell (MAC) 모형이라고 할 수 있다. Daly와 Pracht (1968)는 Boussinesq 근사화된 Navier-Stokes 방정식을 수송방정식과 같이 해석하였는데 수송방정식은 두 유체가 서로 다른 농도차에 의한 선단의 전파속도를 실험치와 비교하여 거의 비슷한 결과를 얻었다. 그림 5는

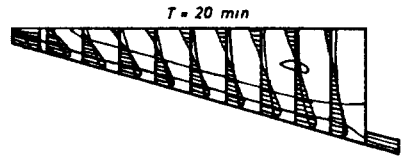
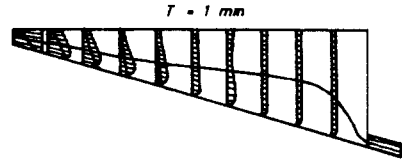
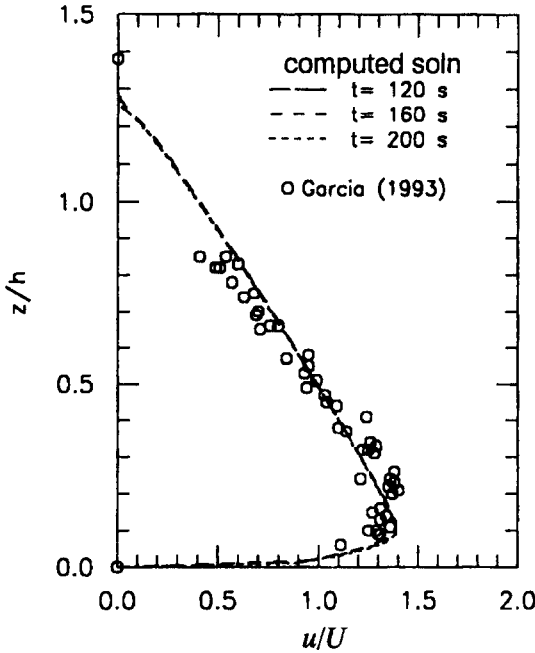


그림 7. $k-\epsilon$ 난류모형을 이용한 밀도류의 저수지유입 수치모의(Kupusovic, 1989)

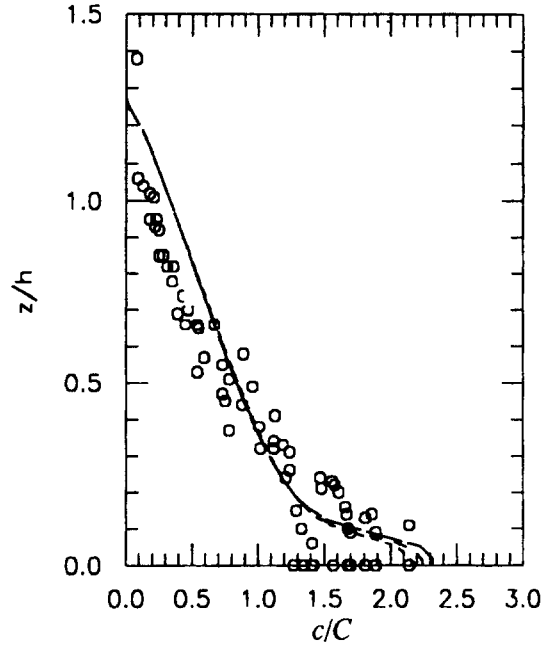
MAC 방법에 의해 계산된 결과로서 무거운 유체가 가벼운 유체 밑으로 침투하는 것을 수치모의한 것이다. Kawahara와 Ohmiya (1985)는 thermal 형태의 밀도류를 수치해석하기 위한 유한요소모형을 제시하였다. 운동량방정식을 해석하여 얻은 유속장을 연속방정식을 사용하여 보정하는 수치적 기법을 사용하였으며, 용질에 대한 수송방정식을 지배방정식과 같이 해석하지 않고 MAC기법을 통하여 용질의 농도를 산출하였다 (그림 6 참조).

(2) $k-\epsilon$ 난류 모형에 의한 밀도류해석

공학적으로 가장 널리 이용되고 있는 난류폐합식은 수송방정식을 사용하여 난류에너지와 난류에너지의 소산율을 해석하는 $k-\epsilon$ 난류 모형이다. Kupusovic (1989)은 $k-\epsilon$ 난류 모형을 이용하여 저수지로 유입되는 밀도류를 수치해석하였다. 밀도가 다른 하천수의 유입에 따른 저수지 유속장의 변화와 밀도의 변화양상을 모의하였는데 (그림 7참조), 이러한 연직구조모형을 실제현상에 적용할 때의 문제점에 대하여도 검토하였다. Choi (1998a)는 $k-\epsilon$ 난류모형을 이용하여 밀도류의 연직구조를 계산하여 측정치결과와 매우 근사함을 보였다 (그림 8 참조). 또한 계산된 밀도류의 연직구조를 사용하여 적분모형의 형상계수를 산출함으로써 적분모형의 類似근사 (similarity



(a) velocity



(b) volumetric concentration

그림 8. $k-\epsilon$ 난류모형을 이용한 밀도류의 연직구조해석(Choi, 1998a)

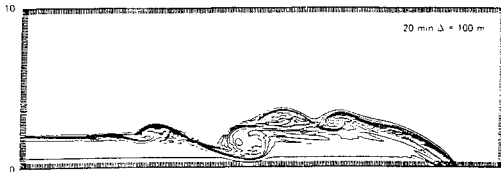


그림 9. 고해상도 수치모형을 이용한 밀도류 선단에서의 Kelvin-Helmholtz 불안정계산(Droegemeier와 Droegemeier와 Wilhelmson, 1986)

approximation)에 따른 부정확도를 줄이는데 기여하였다.

(3) 고해상도 모형

그림 4에서 볼 수 있는 바와 같이 밀도류는 그 선단이 대단히 복잡한 구조로 이루어져 있으며 주변수역과 혼합되는 과정에서 불안정 (instability)을 가지고 있는 것으로 알려져 있다. 그러나 기존의 수치모형은

너무나 성긴 (coarse) 격자를 사용하기 때문에 불안정을 모의할 수 없었다. Droegemeier와 Wilhelmson (1986)은 고해상도의 격자를 사용하여 밀도류 선단에서 발생하는 Kelvin-Helmholtz 불안정을 수치모의 하였다 (그림 9 참조). Droegemeier와 Wilhelmson은 기존의 수치모형이 이러한 불안정을 모의할 수 없었던 이유가 격자의 성김과 numerical smoothing 때문으로 설명하였다.

4.2 층적분모형

층적분모형은 Navier-Stokes 방정식을 수심방향으로 적분한 것으로 상세한 유도과정은 Parker 등 (1986)에 잘 나와있다. 층적분 모형은 주변수역과 밀도층을 각기 다르게 고려하는 이층모형 (two layer model)과 주변수역의 동적인 영향을 무시하는 단일층모형 (single layer model)이 있다. 층적분 모형은 난류에 관하여는 시간평균된 모형이고, 유도과정에 경계층근사, 類似근사, 그리고 Boussinesq 근사 등이

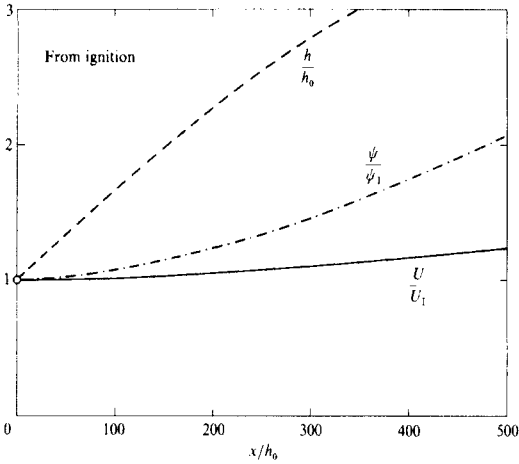


그림 10. 4방정식 모형에 의한 부유사 밀도류의 점화현상 해석(Parker 등, 1987)

가정되었다.

(1) 일차원 정상류모형

일차원 단일층모형은 3방정식 모형과 4방정식 모형으로 나뉘어 진다. 3방정식 모형은 연속방정식, 운동량방정식, 그리고 용질 보존방정식으로 구성되며, 4방정식 모형은 3방정식 모형에 평균난류에너지 보존방정식이 추가된다. 정상상태 흐름의 경우 시간에 대한 미분항이 없어지므로 3개 혹은 4개의 상미분방정식을 연립하여 해석한다. 부력흐름률이 보존되는 밀도류문제에서 3방정식 모형과 4방정식 모형에서 비슷한 결과를 얻을 수 있으나, 부력흐름률이 증가하는 부유사 밀도류 점화흐름(igniting flow)의 경우에는 평균난류에너지 보존방정식이 포함된 4방정식 모형을 사용해야 한다는 것이 밝혀진 바 있다 (Parker 등, 1986). 그림 10은 Parker 등 (1987)이 4방정식 모형을 사용하여 부유사 밀도류의 점화현상을 수치모의한 것으로 초기값 (첨자 1)으로 무차원화된 유속(U)과 부력흐름률 (ψ)이 증가하는 것을 볼 수 있다.

(2) 일차원 부정류모형

일차원 단일층모형을 사용하여 밀도류가 경사진 하도를 흘러가는 것을 모의하기 위해서는 수학적으로

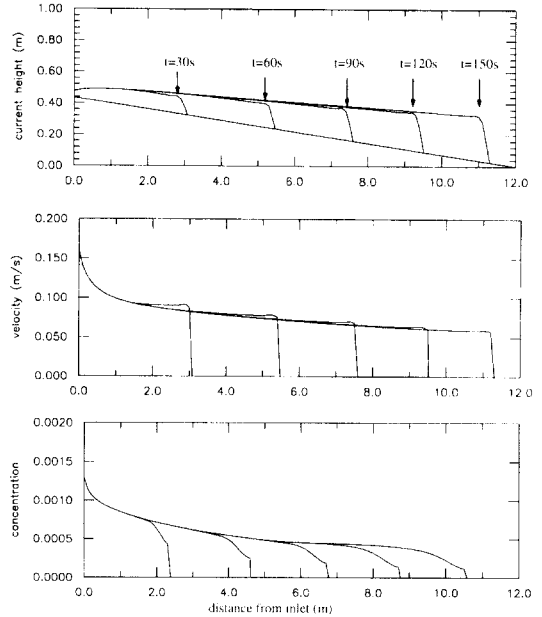


그림 11. 일차원 적분모형에 의한 경사진 하도에서 발달하는 밀도류 해석(Choi와 Garcia, 1996)

이동경계치문제 (moving boundary problem)를 해석해야 한다. 이것은 홍수와 혹은 댐과파 파가 마른 하도에 전파되는 것과 같은 문제이다. Choi와 Garcia (1995)는 유한요소법을 사용하여 부유사 밀도류가 경사진 하도를 흘러가는 것을 수치해석하였고 기존의 실험자료와 비교하여 개발된 모형의 적용성을 검증하였다 (그림 11 참조).

(3) 이차원 부정류모형

Choi (1998b)는 경사진 평면 수로에서 두방향으로 전파되는 부유사 밀도류를 수치해석하기 위해서 유한요소법과 변환격자기법 (deforming grid technique)을 사용하였다. 이차원의 부유사 밀도류에 의한 하상의 퇴적 혹은 침식 양상을 파악하기 위하여 두 개의 요소망을 사용하여 하나는 흐름상수를 저장하는데 사용하고 다른 하나는 하상의 변동치 등을 저장하는데 사용하였다. 그림 12는 수심이 깊은 수역에서 주흐름방향과 주흐름방향의 직각방향으로 동시에 퍼져나가는 부유사 밀도류에 대한 수치모의 결과이

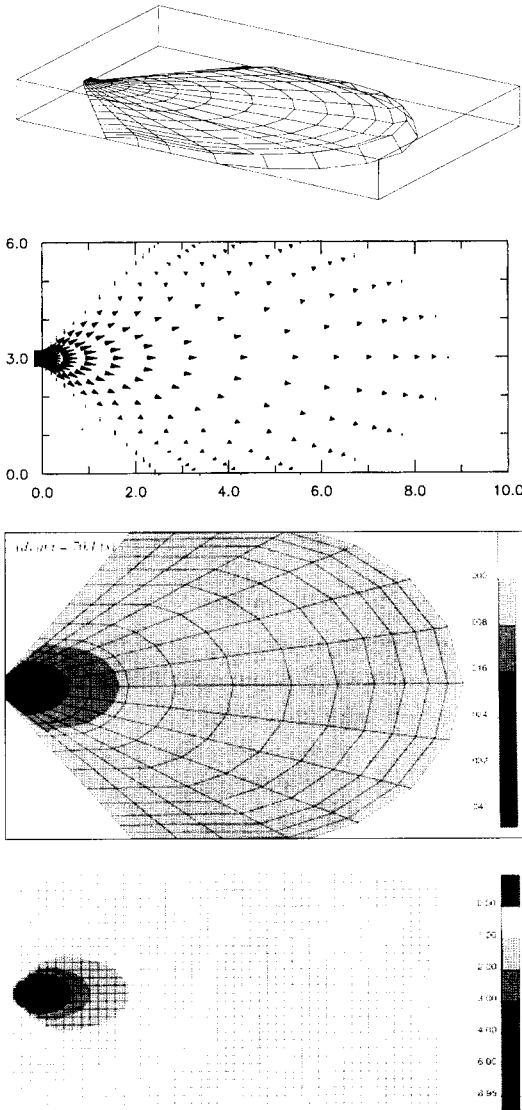


그림 12. 일차원 적분모형에 의한 경사진 하도에서 발달하는 밀도류 해석(Choi와 Garcia, 1996)

다. 위에서부터 밀도류의 두께, 유속장, 체적농도, 그리고 퇴적량을 나타낸 것이다.

5. 맺는말

미국 Tennessee 주의 한 원자력 발전소는 TVA (Tennessee Valley Authority)가 관할하는 저수지에서 냉각용수를 취수하고 있었다. 1988년 여름 계속되는 더위로 저수지의 수온이 지속적으로 상승하여 냉각수로 사용이 부적합하였으므로 며칠 후에는 발전을 중단해야할 위기에 처하게 되었다. 이때 TVA 소속의 기술자들은 상류 댐에서 수온이 낮은 물을 하층 밀도류 형태로 방류하여 원자력 발전소가 위치한 하류의 저수지까지 끌어쓰기로 하였다. 밀도류가 하류까지 도달하기 위해서는 윗층과 강한 성층상태를 유지하여 혼합이 되는 것을 방지하여야 했다. 층적분 형태의 밀도류 모형을 사용하여 계획이 수립되었고, 이에 따라 발생한 밀도류는 거리에 따라서 계속 모니터링되었다. 그리하여 하류의 저수지에 저온의 물을 공급할 수 있었고 원자력발전소의 발전중단을 피할 수 있었다.

밀도류는 우리주변에서 흔히 관찰되며 공학적으로도 많이 이용되고 있다. 지난 20세기에는 환경문제가 심각하게 대두되면서 밀도류의 공학적인 중요성이 인식되기 시작하였다. 수공학분야에서는 밀도류로 인한 저수지 퇴적문제나 수질문제가 가장 직접적인 문제이다. 자연현상의 하나로서 밀도류를 더 잘 이해하고 이를 공학적으로 활용하여 환경보전에 기여하기 위해서는 밀도류에 관한 더욱더 심도있는 연구가 선행되어야 할 것이다. ●

참 고 문 헌

- Britter, R.E., and Linden, P.F. (1980). "The motion of the front of gravity current travelling down an incline." *Journal of Fluid Mechanics*, 99, 531-543.
- Choi, S.-U., and Garcia, M.H. (1995). "Modeling of one-dimensional turbidity currents with a dissipative Galerkin finite element method." *Journal of Hydraulic Research*, 30(5), 623-648.
- Choi, S.-U. (1998a). "Computation of vertical structure of turbidity currents by $k - \epsilon$ turbulence model." *KSCE Journal of Civil Engineering*, 2(1), 35-46.
- Choi, S.-U. (1998b). "Layer-averaged modeling of turbidity currents with a dissipative-Galerkin finite element method. Part I: Formulation and application example." *Journal of Hydraulic Research*, 36(3), 339-362.
- Daly, B.J., and Pracht, W.E. (1968). "Numerical Study of Density-Current Surges." *The Physics of Fluids*, 11(1), 15-30.
- Droegemeier, K.K., and Wilhelmson, R.B. (1986). "Numerical simulation of thunderstorm outflow dynamics. Part I: Outflow sensitivity experiments and turbulence dynamics." *Journal of Atmospheric Science*, 44, 1180-1210.
- Ellison, T.H., and Turner, J.S. (1959). "Turbulent entrainments in stratified flows." *Journal of Fluid Mechanics*, 6, 423-448.
- Harleman, D. (1961). "Stratified flow." *Handbook of Fluid Dynamics*, edited by V. Streeter, Mc-Graw Hill Book Co., New York, NY.
- Hopfinger, E.J. (1983). "Snow avalanche motion and related phenomena." *Annual Review of Fluid Mechanics*, 15, 47-76.
- Kawahara, M., and Ohmiya, K. (1985). "Finite element analysis of density flow using the velocity correction method." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 5, 981-993.
- Kupusovic, T. (1989). "A two dimensional model of turbulent flow applied to density currents." *Computational Modelling and Experimental Methods in Hydraulics (HYDROCOMP '89)*, edited by C. Maksimovic and M. Radojkovic, Elsevier Applied Science, England.
- Parker, G., Fukushima, Y., and Pantin, H.M. (1986). "Self accelerating turbidity currents." *Journal of Fluid Mechanics*, 171, 145-181.
- Parker, G., Garcia, M., Fukushima, Y., and Yu, W. (1987). "Experiments on turbidity currents over an erodible bed." *Journal of Hydraulic Research*, 25, 123-147.
- Simpson, J.E. (1987). *Gravity currents: In the Environment and the Laboratory*. Ellis Horwood Limited, Chichester, England.