

## 선반지형의 크기에 따른 반사율의 변화

### Variation of Reflection Coefficients for a Shelf with Varying Dimensions

조 용 식\* / 이 중 인\*\* / 김 영 택\*\*\* / 이 정 규\*\*\*\*

Cho, Yong Sik / Lee, Jong In / Kim, Young Taek / Lee, Jong Kyu

---

#### Abstract

The reflection coefficients of monochromatic waves propagating over a shelf with varying dimensions are theoretically calculated. The diffraction of waves by an abrupt depth change is formulated by the eigenfunction expansion method. Not only propagating mode but also evanescent modes are considered in formulation. The role of evanescent modes in reflection coefficients is investigated in detail. Water waves are obliquely as well as normally incident to the region. The obtained reflection coefficients are verified by checking conservation of wave energy.

*Keywords:* eigenfunction expansion method, reflection coefficient, evanescent modes, diffraction

---

#### 요 지

본 연구에서는 선반지형의 크기에 따른 파랑 반사율의 변화를 이론적으로 계산하였다. 수심이 급변함에 따라 발생하는 파랑의 회절을 고유함수 전개법을 이용하여 나타냈다. 반사율에는 진행파뿐만 아니라 소멸파도 고려하였으며, 파랑의 반사율에서 소멸파의 역할을 중점적으로 연구하였다. 시각으로 입사하는 파랑뿐만 아니라 경사지게 입사하는 파랑의 반사율을 산정하였으며, 파랑에너지의 보존을 검사하여 반사율의 정확성을 검증하였다.

**핵심용어 :** 고유함수 전개법, 반사율, 소멸파, 회절

---

\* 세종대학교 공과대학 토목환경공학과 조교수

Assistant Professor, Dept. of Civil and Environmental Engineering, Sejong University, Seoul 143 747, Korea

\*\* 한국건설기술연구원 수자원환경연구부 선임연구원

Senior Researcher, Water Resources and Environmental Research Div., Korea Institute of Construction Technology, Kyonggi 411 410, Korea

\*\*\* 한양대학교 대학원 석사과정

Graduate Student, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133 791, Korea

\*\*\*\* 한양대학교 공과대학 도시환경건설공학과 교수

Professor, School of Urban Planning, Environmental and Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133 791, Korea

## 1. 서 론

외해에서 생성된 파랑은 수심이 상대적으로 얇은 천해역으로 이동해오는 동안에 다양한 해저지형의 변화에 따른 회절, 굴절, 반사, 천수 및 쇄파 등과 같은 여러 물리적 현상을 경험한다. 특히, 해저에 위치한 계단 지형(step), 선반지형(shelf) 및 트랜치지형(trench) 등을 통과할 때 파랑에너지의 일부는 지형의 영향으로 인해 반사되어 외해로 되돌아가며 일부는 지형을 통과하여 해안선을 향해 계속 이동하게 된다. 따라서, 해안 지역에 방조제, 방파제 및 항만시설 등과 같은 해안구조물을 건설하기 위해서는 해저지형을 고려한 정확한 반사율과 통과율을 계산하여 이들을 반영한 설계를 하는 것이 바람직하며 또한 경제적이다.

계단 지형, 선반 지형 및 트랜치 지형 등과 같은 해저지형의 변화에 따른 입사파의 반사율과 통과율 산정에 관한 연구는 수리모형실험, 해석적 방법 및 수치기법 등을 이용하여 오랜동안 계속되어 왔으나, 소멸파(evanescent modes)를 포함한 연구는 많지 않으며 특히 소멸파의 역할을 중점적으로 연구한 결과는 거의 없었다(O'Hare and Davies, 1992; 조와 이, 1998a, 1998b). Kirby와 Dalrymple (1983)은 고유함수 전개법(eigenfunction expansion method)을 이용하여 트랜치 지형을 통과하는 입사파의 반사율과 통과율을 해석적으로 계산하였다. 또한, 소멸파의 수가 16 이상이면 변화가 거의 없는 매우 만족할만한 반사율과 통과율을 제공한다고 보고하였다. 최근, 김 등 (1998)은 경계요소법을 이용하여 불투과성 수중방파제의 반사율과 통과율을 계산하였다. 계산된 반사율은 Kirby와 Dalrymple의 고유함수 전개법에 의한 결과와 일치하는 것으로 보고되었다.

본 연구에서는 Kirby와 Dalrymple이 사용하였던 고유함수 전개법을 이용하여 선반지형을 통과하는 입사파의 반사율과 통과율을 해석적으로 계산한다. 특히, 본 연구에서는 수중방파제 설계조건을 제시하기 초기 단계로 Kirby와 Dalrymple 및 김 등의 연구에서 다루지 않았던 선반지형의 높이, 폭 및 파랑의 입사각 등을 다양하게 변화시키면서 반사율을 계산한다. 또한, 수심의 급변에 따른 소멸파의 역할을 조사하며,  $kh/\pi$  를 0.01부터 1.5까지 변화시켜 파랑은 심해영역부터 천해영역까지 이동하는 것으로 고려하였다. 다음 장에서는 지배방정식과 고유함수 전개법에 대하여 간략히 서술하며, 제3장에서는 고유함수 전개법을 이용하

여 선반 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율을 계산한다. 마지막으로, 제4장에서는 결론을 서술한다.

## 2. 지배방정식과 고유함수 전개법

비압축성 및 비회전 흐름에서 유체를 비점성으로 가정하면 유체의 거동은 Laplace 방정식에 의해 지배된다. 본 연구의 해저지형은 Fig. 1에서와 같이  $x$  축 방향으로는 변하지만  $y$  축 방향으로는 일정하며, 파랑은  $x$  축 방향에 대하여 입사각  $\theta$ 로 경사지게 입사하는 것으로 가정한다. 따라서, Snell의 법칙에 따라  $y$  축 방향의 파수  $k_y$ 는 전체 영역에서 일정하며, 해저지형은 Fig. 1에 나타난 것과 같이 수심이 각각  $h_1$ 과  $h_3$ 인 지형에 연결되어 있다. 본 연구에서는 문제를 보다 단순화하고 소멸파의 역할을 중점적으로 조사하기 위해  $h_1 = h_3$ 으로 가정한다.

먼저, Fig. 1로 나타난 것과 같은 선반지형에서 오른쪽 방향의 진행파와 소멸파를 모두 포함하는 속도포텐셜은 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$$\Phi_m = \left\{ A_m^r e^{-i k_x x} \cosh k_m (h_m + z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}^r e^{i \lambda_{m,n} x} \cos K_{m,n} (h_m + z) \right\} e^{i(k_y y - \omega t)} \quad (1)$$

왼쪽 방향의 진행파와 소멸파의 속도포텐셜은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi_m = \left\{ A_m^l e^{-i k_x x} \cosh k_m (h_m + z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n}^l e^{-i \lambda_{m,n} x} \cos K_{m,n} (h_m + z) \right\} e^{i(k_y y - \omega t)} \quad (2)$$

속도포텐셜 식 (1)과 (2)에서 위첨자  $r$ 과  $l$ 은 각각 오른쪽 및 왼쪽 방향을 의미하며, 아래첨자  $m = 1, 2, 3 \dots$ 은 서로 다른 수심을 갖는 영역을 나타내며,  $n = 1, 2, 3 \dots$ 은 소멸파의 수를 나타낸다. 진폭  $A_m^l$ ,  $B_{m,n}^l$  및  $A_m^r$ ,  $B_{m,n}^r$ 은 모두 복소수이며, 진행파와 소멸파의 파수  $k_m$ 와  $K_{m,n}$ 은 모두 실수이며, 각각 다음의 분산관계식으로부터 계산할 수 있다.

$$\omega^2 = gk_m \tanh k_m h_m, \quad \omega^2 = -gK_{m,n} \tan K_{m,n} h_m \quad (3)$$

또한 식 (1)과 (2)에 사용된  $\lambda_{m,n}$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$\lambda_{m,n} = (K_{m,n}^2 + k_y^2)^{1/2} \quad (4)$$

식 (1)과 (2)를 해석하기 위해서는 수심이 변하는 지점, 즉 Fig. 1에서 서로 다른 수심을 갖는 지형이 만나는 지점에서 각각 두 개의 접합조건이 필요하게 된다. 첫째 접합조건은  $x$  축 방향의 흐름율은 연속임을 나타내는 것으로 임의의 지점  $x = x_i$ 에서 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial x}, \quad x = x_i, \quad -h_i \leq z \leq 0 \quad (5)$$

둘째 접합조건은 다음과 같이 주어지며

$$\Phi_i = \Phi_{i+1}, \quad x = x_i, \quad -h_i \leq z \leq 0 \quad (6)$$

이는 압력이 연속임을 의미한다. 따라서, 식 (5)와 (6)에 식 (1)과 (2)를 대입하면 모든 미지수를  $A_i'$ , 즉 입사파의 진폭으로 표시할 수 있으므로 반사율과 통과율을 계산할 수 있다.

소멸파를 포함한 반사율을 계산할 때 식 (1)과 (2)를 식 (5)와 (6)에 대입하면 매우 복잡한 관계식이 유도되므로 본 연구에서는 고유함수의 직교성을 이용하여 문제를 보다 단순히 할 수 있다. 직교성을 이용할 경우 접합조건으로부터 미지수가  $2(m-1) \times (n+1)$ 인 선형행렬식을 구할 수 있으며, 행렬식을 해석하여 반사율과 통과율을 결정할 수 있다 (조와 이, 1998b).

입사파의 진폭함수가 1, 즉  $A_1' = 1$ 이면 반사율  $R$ 과 통과율  $T$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$R = |A_1'|, \quad T = |A_3'| \quad (8)$$

계산된 반사율과 통과율의 정확성을 검사하기 위해 다음과 같은 에너지 보존식을 사용하였다.

$$R^2 + T^2 = 1 \quad (9)$$

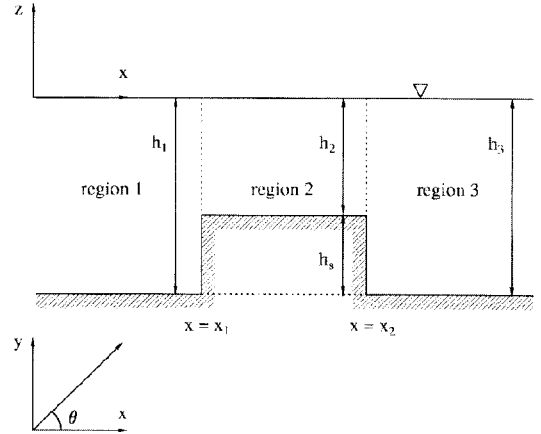


Fig. 1. Schematic sketch of a shelf

### 3. 선반 지형을 통과하는 파랑

본 장에서는 Fig. 1과 같은 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율을 계산하였다. 본 연구에서 입사각  $\theta$ 가  $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ , 등 다섯 가지의 경우에 대하여 반사율을 계산하였으며, 선반 지형의 높이  $h_3$ 는  $0.1h_1$ 부터  $0.9h_1$ 까지 변화한다. 아울러, 파랑은 심해지역부터 천해지역까지 이동하는 것으로 고려하였으며, 선반의 폭에 따른 반사율의 변화를 조사하기 위해 선반의 폭, 즉 Fig. 1에서  $w = x_2 - x_1$ 도 변화하는 것으로 가정하였다.

먼저, 표 1과 표 2는  $kh/\pi$ 가 0.01부터 1.5까지 변환 때 소멸파의 수와 선반지형의 높이에 따른 반사율과 통과율의 변화를 도표화한 것이다. 표에 나타난 것과 같이 소멸파의 유무에 따라 반사율의 변화는 매우 큰 반면에 통과율의 변화는 다소 작음을 알 수 있다. 그러나, 선반지형의 높이가 증가하면 통과율의 변화도 커진다. 따라서, 수심이 급변하는 지형에서는 반사율뿐만 아니라 통과율의 산정에도 소멸파를 반드시 포함시키는 것이 바람직하다.

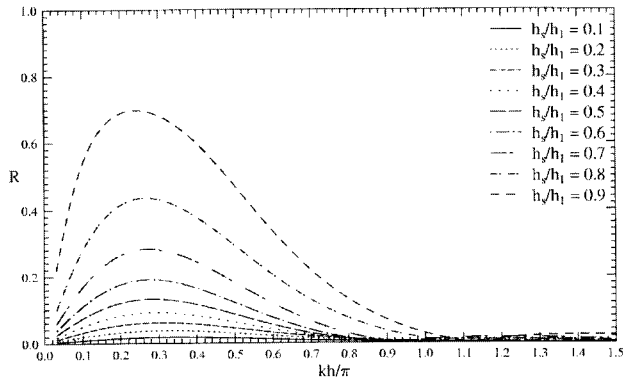
Kirby와 Dalrymple (1983)이 제안한 것과 같이 소멸파의 수가 16이면 매우 만족할만한 결과를 제공하며, 소멸파의 수가 32 또는 64인 경우와 비교하여 반사율과 통과율의 변화가 거의 없음을 알 수 있다. 전체적으로 소멸파는 2개만 포함시켜도 전혀 고려하지 않은 경우와 많은 차이가 있는 반면에 소멸파의 수가 증가하면서 반사율과 통과율의 변화폭도 작아짐을 알 수 있다. 표 1과 2에 나타난 것과 같이 소멸파의 수가

표 1. 소멸파의 수에 따른 반사율의 변화 ( $\theta=0^\circ, w=0.5h_1$ )

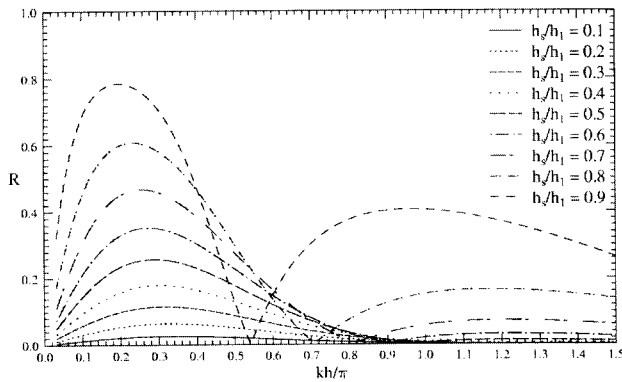
$h_2/h_1$	$n=0$	$n=2$	$n=4$	$n=8$	$n=16$	$n=32$	$n=64$
0.1	0.01786316	0.02200911	0.02396331	0.02549077	0.02556179	0.02564391	0.02566677
0.3	0.06152423	0.11127562	0.11335407	0.11495336	0.11555813	0.11570959	0.11577616
0.5	0.13227241	0.24895388	0.25483731	0.25699915	0.25779768	0.25809906	0.25821511
0.7	0.28205367	0.45978622	0.46345784	0.46636752	0.46724434	0.46771652	0.46789077
0.9	0.69813928	0.76672242	0.77986820	0.78306105	0.78418476	0.78454542	0.78472332

표 2. 소멸파의 수에 따른 통과율의 변화 ( $\theta=0^\circ, w=0.5h_1$ )

$h_2/h_1$	$n=0$	$n=2$	$n=4$	$n=8$	$n=16$	$n=32$	$n=64$
0.1	0.99984044	1.00000106	0.99999943	0.99997496	0.99997409	0.99997165	0.99997098
0.3	0.99810559	0.99570838	0.99530357	0.99593332	0.99491339	0.99488290	0.99486868
0.5	0.98121340	0.97102229	0.96923107	0.96850006	0.96821048	0.96809587	0.96805045
0.7	0.95939863	0.89011508	0.88768590	0.88600554	0.88546082	0.88516116	0.88504884
0.9	0.71591322	0.64205363	0.62615706	0.62228830	0.62078058	0.62029735	0.62005941



(a)  $\theta=0^\circ, n=0, w=0.5h_1$



(b)  $\theta=0^\circ, n=16, w=0.5h_1$

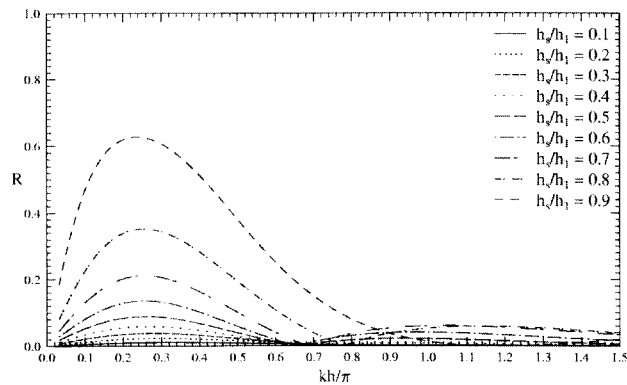
Fig. 2. Variation of reflection coefficients

4개 이상이면 대략 소수점 이하 2자리까지 거의 일정한 반사율과 통과율을 제공하므로 수중방파제를 설계할 경우에는 소멸파를 4개 이상 포함시키면 무난하리라 판단된다. 참고로, 표 1과 표 2의 반사율과 통과율은 모두 식 (9)로 표시된 에너지보존식을 소수점 이하 4자리까지 정확하게 만족한다.

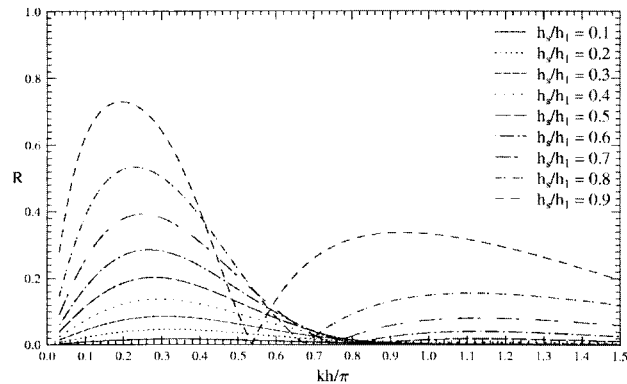
Fig. 2는  $\theta = 0^\circ$ 일 때 소멸파를 포함하지 않은 경우 ( $n=0$ )와 소멸파를 포함한 경우 ( $n=16$ )의 반사율을 계산하여 비교한 것이다. 전체적으로 소멸파를 고려하면 반사율이 증가하며, 소멸파의 고려여부에 관계없이  $kh/\pi = 0.2 \sim 0.3$ 에서 반사율이 최대가 된다. 또한,  $h_s/h_1 < 0.5$ 인 경우 반사율은  $kh/\pi \approx 1.0$  부근에서 최소가 되며,  $h_s/h_1 > 0.5$ 인 경우 반사율은  $kh/\pi < 1.0$ 인 지점에서 최소가 된다. 소멸파를 고려하지 않은 경우에는 최소반사율은  $kh/\pi \approx 1.0$ 으로부

터  $h_s/h_1$ 이 증가함에 따라 천해영역으로 이동한다. 최대반사율이 발생하는  $kh/\pi$  또한  $h_s/h_1$ 이 증가함에 따라 감소함을 알 수 있다. 아울러, 천해영역에서는  $h_s/h_1$ 에 의해 반사율이 크게 영향을 받음을 알 수 있으나, 심해에서는  $h_s/h_1 < 0.5$ 인 경우 소멸파의 영향이 거의 없다. 즉, 심해영역에서  $h_s/h_1 < 0.5$ 인 경우 반사율은 모두 0으로 접근하는 반면에,  $h_s/h_1 > 0.5$ 인 경우에는 소멸파의 수가 증가하면 반사율도 증가한다.

Fig. 3과 Fig. 4는 입사각을  $30^\circ$ 와  $60^\circ$ 로 증가시켰을 때 소멸파의 수에 따른 반사율의 변화를 나타낸 것이다. 그림에 나타난 것과 같이 입사각이 커지면서 반사율이 감소하고 있음을 알 수 있다. 이는 입사각이 증가하면 Fig. 1에서 입사파의  $x$  방향 파수, 즉  $l_1 = k_1 \cos \theta$ 가 감소하며 파장이 상대적으로 길어지

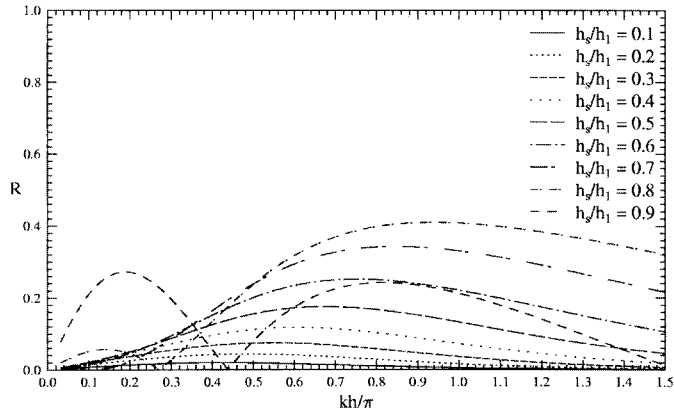


(a)  $\theta = 30^\circ, n = 0, w = 0.5 h_1$

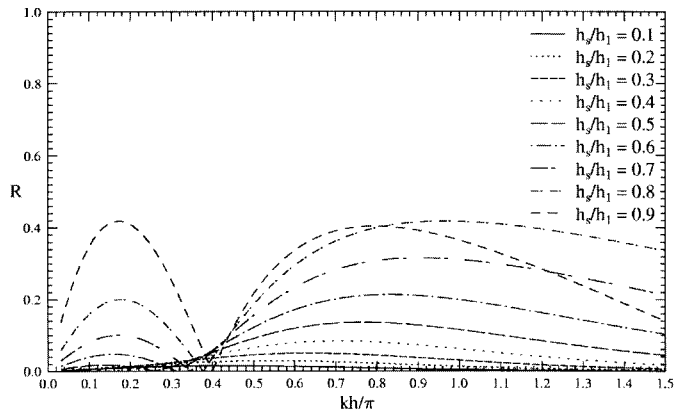


(b)  $\theta = 30^\circ, n = 16, w = 0.5 h_1$

Fig. 3. Variation of reflection coefficients



(a)  $\theta = 60^\circ$ ,  $n = 0$ ,  $w = 0.5h_1$



(b)  $\theta = 60^\circ$ ,  $n = 16$ ,  $w = 0.5h_1$

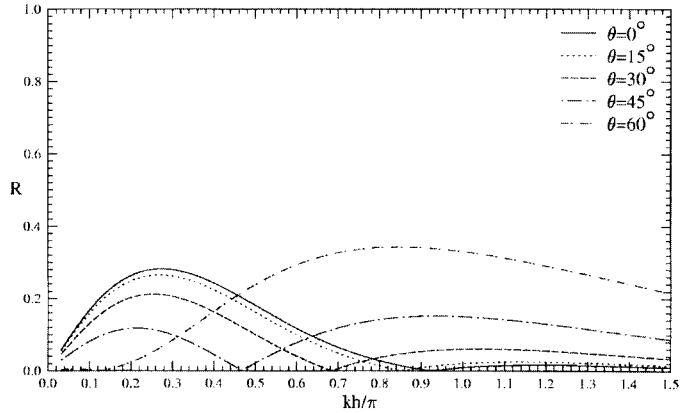
Fig. 4. Variation of reflection coefficients

기 때문이다. 아울러, Fig. 2와 마찬가지로 소멸파를 포함하면 반사율 또한 증가함을 알 수 있다. Fig. 4를 Fig. 2 및 Fig. 3과 비교하면, 입사각이 커지면서 심해영역에서는 반사율이 점점 증가하는 반면에, 천해영역에서는 소멸파의 포함여부에 따른 반사율의 변화가 명확하게 나타난다. 그러나, 입사각이  $60^\circ$ 일 때  $kh/\pi$ 가 0.7보다 크면 소멸파의 고려여부에 상관없이 반사율은 거의 비슷한 경향을 나타낸다. 즉, 입사각이 커지면서 천해에서는 소멸파가 반사율에 영향을 많이 주나, 심해에서는 소멸파의 유무가 큰 영향을 주지 못한다는 것을 알 수 있다.

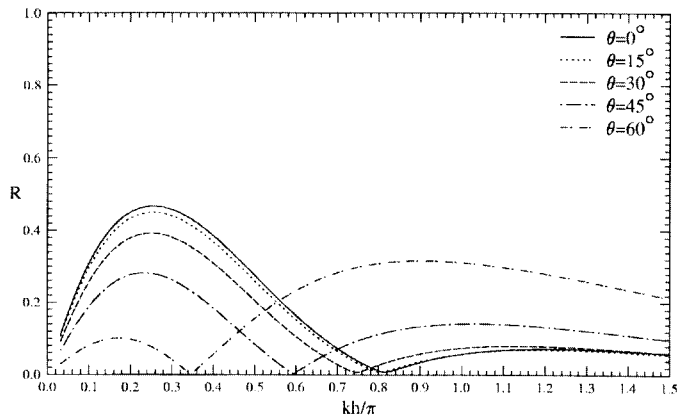
Fig. 5는 소멸파의 포함 여부와 입사각의 변화에 따른 반사율의 변화를 보여 주고 있다. 입사각이 커지면

서 천해에서는 반사율이 점점 감소하는 반면에, 심해에서는 점점 증가함을 알 수 있다. 즉, 입사각이 커지면서 반사율의 침투가 전체적으로 심해로 이동하는데, 이는 입사각이 커지면서 입사파의 파장이 상대적으로 길어지기 때문이다. 심해에서의 반사율은 소멸파의 수에 관계없이 거의 비슷한 값이 나타난다. 또한, Fig. 2에서와 같이 소멸파를 고려했을 경우 천해영역에서의 반사율이 크게 나타난다.

마지막으로, Fig. 6은 소멸파의 수와 선반 지형의 폭 변화에 따른 반사율의 변화를 보여 주고 있다. 전체적으로 선반의 폭이 증가함에 따라 반사율의 변화가 크게 나타나는 것을 볼 수 있다. 이는 식 (2)의 지수 함수, 즉  $e^{-i/mx}$ 에 따라 선반의 폭이 커지면 상대적



(a)  $n = 0, h_s/h_1 = 0.7, w = 0.5h_1$



(b)  $n = 16, h_s/h_1 = 0.7, w = 0.5h_1$

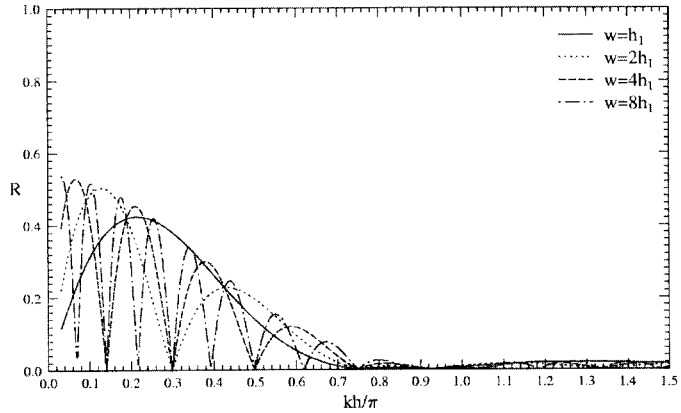
Fig. 5. Variation of reflection coefficients

으로 파수가 증가하기 때문이다. 즉, 선반의 폭을 4배로 증가시키면 반사율의 파수가 4배가 되므로 반사율의 변화가 급함(fast varying)을 알 수 있다. 또한, 소멸파를 포함하면 최소반사율이 발생하는 지점이 천해영역으로 이동하는 것을 알 수 있다. 소멸파를 고려하지 않을 경우  $kh/\pi > 0.9$ 에서는 반사율이 거의 0에 가깝게 나타나는 반면에, 소멸파의 수가 16일 경우에는 심해에서도 반사율이 0이 아님을 알 수 있다. 소멸파에 의한 반사율의 변화를 비교할 때, 선반의 폭과 소멸파에 의한 반사율의 변화가 상당히 크게 나타나므로 이들을 고려하여 설계할 경우 상당한 양의 파랑에너지를 위해 반사시킬 수 있을 것이다.

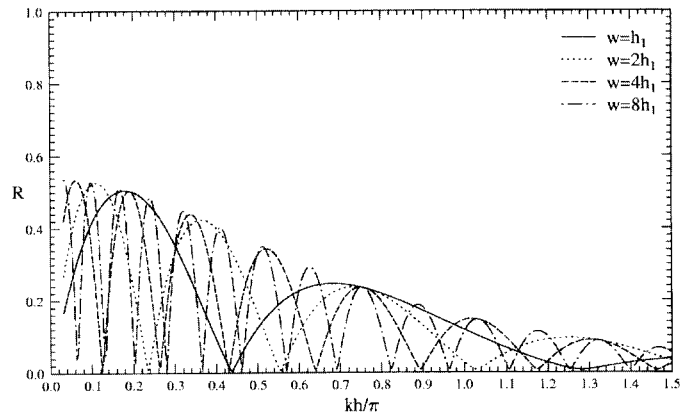
#### 4. 결 론

본 연구에서는 선반 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율을 고유함수 전개법을 이용하여 해석적으로 계산하였다. 특히, 선반 지형의 높이와 폭을 변화시키면서 다양한 조합에 따른 반사율을 계산하여 소멸파의 역할을 연구하였다. 아울러, 직각으로 입사하는 파랑뿐만 아니라 경사지게 입사하는 파랑의 반사율을 산정하였으며, 계산된 반사율은 파랑에너지 보존법칙을 잘 만족시킨다.

전체적으로 통과율에서 소멸파의 역할은 다소 작은 반면에 반사율에서의 역할은 매우 큰 것으로 조사되었다. 따라서, 수심이 급변할 경우 반드시 소멸파를 고려



(a)  $\theta = 0^\circ, n = 0, h_s/h_1 = 0.7$



(b)  $\theta = 0^\circ, n = 16, h_s/h_1 = 0.7$

Fig. 6. Variation of reflection coefficients

하여 반사율을 산정해야 할 것으로 생각된다. 소멸파 수가 4개 이상이면 소멸파 수의 증가에 따른 반사율과 통과율의 변화가 적어지므로 수중방파제 설계와 같은 실용적인 문제에서는 소멸파를 4개만 포함시켜도 무난할 것으로 판단된다. 특히, 선반지형의 높이와 폭에 따른 반사율의 변화가 매우 심하므로, 해저에 수중방파제를 건설할 경우 방파제의 높이와 폭을 적절하게 조합할 경우 더욱 경제적인 방파제를 건설할 수 있을 것이다.

### 감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 연구비 (과제번호 : 981-1204-012 2)를 지원받아 수행하였기에 이에 감사드립니다.

니다.

### 참고 문헌

- 김도삼, 정연태, 정기수, 신동훈 (1998). “경사입사파 동장에 있어서 불투과성구조물에 의한 파랑변형에 관한 연구.” 대한토목학회 정기학술발표회, 고려대학교, pp. 411-414.
- 조용식, 이창훈 (1998a). “수심이 변하는 지형을 통과하는 파랑의 거동에서 소멸파의 중요성.” 한국수자원학회 정기학술발표회, 전북대학교, pp. 597-602.
- 조용식, 이창훈 (1998b). “수심이 변하는 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율 산정.” 대한토목



학회논문집, 대한토목학회 Vol. 18, No. 2 4,  
pp. 351-358.

Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (1983).  
"Propagation of obliquely incident water  
waves over a trench." *J. of Fluid  
Mechanics*, Vol. 133, pp. 47-63.

O'Hare, T.J. and Davies, A.G. (1992). "A new  
model for surface-wave propagation over  
undulating topography." *Coastal Engineering*,  
Vol. 18, pp. 251-266.

(논문번호:99-069/접수:1999.08.31/심사완료:1999.10.07)