

# LRCS 강우-유출 모형의 보정 및 민감도 분석(I) : 이론

## Calibration and Sensitivity Analysis of LRCS Rainfall-Runoff Model(I): Theory

오 규 창\* / 이 길 성\*\* / 이 상 호\*\*\*  
Oh, Kyu Chang / Lee, Kil Seong / Lee, Sang Ho

### Abstract

This paper introduced the basic theory of LRCS(Linear Reservoir and Channel System) rainfall runoff model proposed by Korean researchers(Lee and Lee, 1995), and discussed the change of model output according to objective functions in sensitivity analysis and calibration process of model. It proposed "hat" matrix and affluence measures for affluence analysis of parameters in calibration, and investigated relationship between change of model output according to error propagation in parameter estimation, and sensitivity of model output according to variance of model output and change of parameters. Accuracy of parameter estimates was known by analysis of sensitivity coefficient, diagonal element  $h_i$ , and  $D_i$ .

*keywords:* rainfall-runoff model, parameter, calibration, sensitivity

### 요 지

본 논문은 이상호와 이길성(1995)에 의해서 제안된 LRCS(Linear Reservoir and Channel System) 강우-유출 모형의 기본 이론을 소개하였고, 모형의 민감도 분석 및 보정과정에서 나타나는 목적함수에 따른 모형 출력의 변화를 파악하고자 하였다. 보정시 매개변수 영향성 분석을 위한 "hat" 행렬과 영향성 척도의 사용을 제안하였고, 매개변수 추정시 오차 전파에 따른 모형 출력의 변화 정도 및 모형 예측치 분산과 매개변수 변화에 따른 모형 출력의 민감도와와의 관련성을 조사하였다. 민감도 계수와  $h_i$ 의 대각 요소와  $D_i$  값의 분석으로 매개변수 추정치의 정확성을 알 수 있었다.

**핵심용어 :** 강우-유출 모형, 매개변수, 보정, 민감도

\* 신우 엔지니어링 상무  
Director, Shinwoo Engrg., Co., Seoul 137-130, Korea

\*\* 서울대학교 교수  
Prof., Dept. of Civil Engrg., Seoul National Univ., Seoul 156-741, Korea

\*\*\* 부경대학교 조교수  
Associate Prof., Dept. of Civil Engrg., Bukyong National Univ., Pusan 608-737, Korea

## 1. 서 론

강우-유출 모형에서 보정이란 모형 매개변수의 최적치를 얻음 목적으로 모형 예측치를 실측치에 비교하는 과정이다. 매개변수의 최적치는 모형 사용자에 의해 정해진 기준 또는 목적함수를 만족하는 값을 말한다. 매개변수 추정시에 목적함수가 중요한 역할을 한다. 모형 사용자는 가능한 최선의 모형 예측치를 얻을 수 있는 모형 매개변수를 구하는 것이며, 이는 목적함수의 형태에 영향을 받는다. 그리고 목적함수의 선정 기준은 불편 모형(unbiased model) 예측치를 얻는데 있다. 목적함수는 모형 형태의 함수이며, 일반적으로 매우 단순한 모형에서는 최소자승 기준을 사용한다. 복잡한 모형일수록 보다 복잡한 목적함수가 필요하다.

민감도 분석은 OR(Operations Research)에서 상용적 개념이다. 기본적으로, 수치적 민감도 분석은 모형 매개변수를 약간 수정하여 모형화된 시스템을 가장 잘 나타내주기 위해 모형 매개변수를 섭동하여 모형출력과의 관계를 분석하는 것이다. 민감도 분석의 기본 목적은 특별하게 민감한 모형 매개변수를 식별하는 것이다. 그래서 가장 비슷한 값으로 잘 수행하는 해를 선택하고 더 정확하게 매개변수를 추정하는데 특별한 주의를 기울이는 것이므로, 수문모형 매개변수의 민감도 분석은 모형출력 신뢰성에 대한 모형 매개변수 오차의 영향에 관련하여 유용한 정보를 제공한다.

Dawdy와 O'Donnell(1965)은 USGS 모형에서 8개 매개변수를 1, 5, 10 %씩 각각 변화시켜서, 효율적이고 물리적으로 타당한 매개변수 최적화 절차를 개발하기 위하여 가장 민감한 모형 매개변수를 식별하였다. McCuen(1974)은 증발량 추정 모형에서 기상학적 인자의 추정시 오차의 영향을 추정하기 위하여 민감도 분석을 사용하였다. Salomonson 등(1975)은 SWM(Stanford Watershed Model) 수정판의 6개 모형 매개변수를 원격탐사에 의해 결정하기 위하여 유역모형의 민감도 분석이 필요하다는 사실을 설명하였다. Yeh 등(1978)은 강우와 용설의 입력자료와 Sacramento 모형에 숨겨진 매개변수의 민감도 분석을 수행하여, 모형을 사용하여 유출 추정시에 주요 오차 원인은 기후와 여러 기상 인자의 부정확한 예측 및 시간에 따라 변하는 모형에 숨겨있는 매개변수의 시-공간적 변동성으로부터 발생한다는 사실을 발견하였다. Rogers 등(1985)은 지표 및 지표하 흐름의 매개변수에 대한 민감도를 조사하였다. 민감도 분석은 보정을

위한 매개변수 공간의 차원을 줄이기 위하여 사용되고, 민감도 계수는 매개변수와 관련된 출력의 편미분으로 정의하였다. Troutman(1985a와 b)은 예측할 수 없는 오차의 변동성은 부차위 변수로 처리하는 것이 필요하며, 이는 비선형 통계학적 회귀분석 모형으로 적용할 수 있다고 하였다. 한국건설기술연구원(1993)은 민감도 분석은 모형 매개변수들의 최적치 결정과 최적해에 대한 매개변수의 변동성을 파악하는 것으로만 사용되어 왔으나, 이를 확장하여 모형화의 모든 단계뿐만 아니라 의사결정을 위한 도구로 이용되고 있다고 하였다. 즉, 절대민감도 분석을 통하여 오차분석을 할 수 있으며, 상대 민감도 분석을 통하여 매개변수가 모형출력에 어느 정도 영향을 미치는지 알 수 있다고 하였다. 강우-유출 모형에 적용한 매개변수의 민감도 분석은 McCuen(1973), Mein과 Brown(1978), Sorooshian과 Arfi(1982) 등에 의해 많은 연구가 수행되었다.

본 연구에서는 Lee와 Lee(1995)가 국내 홍수예경보의 강우-유출 모형으로 이용되고 있는 저류함수법에서 얻은 수문곡선과 실측치와의 비교 검토를 통하여 모형의 유용성을 확인한 사상형 모형(event model)인 LRCS(Lincar Reservoir and Channel System) 모형에 대해 민감도 분석 및 보정 과정에 나타나는 목적함수에 따른 출력의 변화 양상과 오차의 전파에 따른 민감도와 매개변수 분산의 변화 양상에 대한 이론적 고찰을 본 논문(Ⅰ)에서 다루며, 실제 유역에 적용 결과 분석은 본 논문의 다음 논문(Ⅱ)에서 다루기로 한다.

## 2. LRCS 강우-유출 모형의 기본 이론

LRCS 모형은 모형의 구조가 간단하면서도 연산시간이 짧으며 호우사상을 모의하는 사상형 모형이며, 집중 매개변수로 구성되었다. 또한 추적식을 해석적으로 유도하였으며, 6개의 매개변수로 구성되어 있으며, 본 모형의 구조는 그림 1과 같다. 자세한 유도과정은 Lee와 Lee(1995)에 기술되어 있다.

1개 선형저수지의 순간단위유량도  $u_1$ 은 식 (1)과 같다.

$$u_1(t) = u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(Ks+1)} \right] \\ = \left( \frac{1}{K} \right) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + \frac{1}{K}} \right] = \frac{1}{K} e^{-\frac{t}{K}} \quad (1)$$

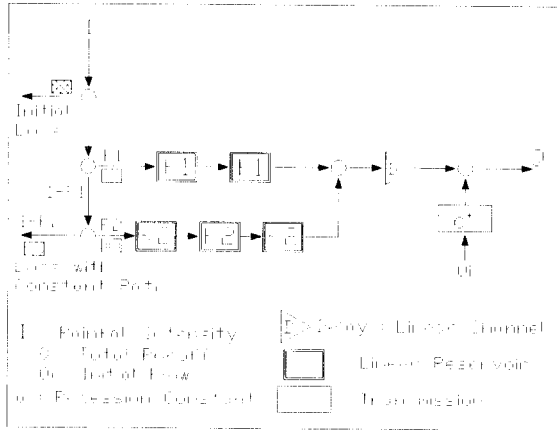


그림 1. LRCS 강우-유출 모형의 구조

여기서  $K$ 는 비례상수이며,  $s$ 는 저류량,  $\mathcal{L}^{-1}$ 는 역 Laplace 변환이며, 2개와 3개의 선형 저수지를 직렬로 연결했을 때의 순간단위도  $u_2$ 와  $u_3$ 는 다음 식과 같다.

$$u_2(t) = \frac{1}{K} \left( \frac{t}{K} \right) e^{-\frac{t}{K}} \quad (2)$$

$$u_3(t) = \frac{1}{K} \left( \frac{t}{K} \right)^2 \left( \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{t}{K}} \quad (3)$$

매 시간별로 입력되는 강우량을 처리하기 위하여 식 (2)로부터 배계변수  $K1$ 을 갖는 2개 선형저수지에 대하여 지속시간 1시간의 단위유량도  $U_2(t)$ 를 구하면 식 (4)와 같다.

$$U_2(t) = \left[ \frac{(t-1)}{K1} + 1 \right] e^{-\frac{(t-1)}{K1}} - \left[ \frac{t}{K1} + 1 \right] e^{-\frac{t}{K1}} \quad (4)$$

TP를 침투유량의 도달시간(Time to Peak)이라고 정의하면 식 (4)를 미분하여 지표면 유출을 나타내는 선형저수지의 배계변수  $K1$ 과 TP의 관계식은 침투유량 도달점에서  $dU_2/dt = 0$  이므로 식 (5)를 얻을 수 있다.

$$TP = \frac{e^{-\frac{1}{K1}}}{(e^{-\frac{1}{K1}} - 1)} \quad (5)$$

변수  $t$ 를 1시간 간격의 정수  $i$ 로 바꾸어 놓고 특정 시각을  $t$ 로 정의하여  $U_2(i)$ 와 지표면 유출에 기여하는 강우성분  $R_1(i-1, 2, \dots)$ 를 이산 회선적분하면 식 (6)과 같은 유출식을 구하게 된다.

$$q_2(t) = \sum_{i=1}^t R_{1-i+1} \{ [(i-1)/K1+1] e^{-(i-1)/K1} - [i/K1+1] e^{-i/K1} \} \quad (6)$$

여기서  $R_1$ 는 총강우량에서 초기손실  $IL$ 을 제외한 강우강도  $r(\text{cm/hr})$ 과 지표면 유출비율  $F1$ 을 곱하여 계산하며, 전체 유역면적  $A(\text{km}^2)$ 에 대한 지표면유출은 식 (7)과 같다.

$$Q_2(t) = 2.7778F1A \sum_{i=1}^t r_{1-i+1} \{ [(i-1)/K1+1] e^{-(i-1)/K1} - [i/K1+1] e^{-i/K1} \} \quad (7)$$

여기서 상수 2.7778은 면적의  $\text{km}^2$  단위와 강우의  $\text{cm/hr}$  단위를  $\text{m}^3/\text{sec}$  단위로 환산하기 위한 값이다.

다음에 중간 유출 선형 저수지의 배계변수의 역수인  $K2$ 를 갖는 3개의 선형저수지에 대한 1시간 단위유량도는 식 (8)과 같으며, 유도과정은 이상호(1993)에 자세히 기술되어 있다.

$$U_3(t) = (1/2) [ (t^2/K2^2 + 2(1/K2 - 1/K2^2)t + 1/K2^2 - 2/K2 + 2) e^{-(t-1)/K2} - (t^2/K2^2 + 2t/K2 + 2) e^{-t/K2} ] \quad (8)$$

$$Q_3(t) = \sum_{i=1}^t R_{t-i+1} (1/2) [ \{ i^2 / K2^2 + 2(1/K2 - 1/K2^2) i + 1/K2^2 - 2/K2 + 2 \} e^{-(i-1)/K2} - \{ i^2 / K2^2 + 2i/K2 + 2 \} e^{-i/K2} ] \quad (9)$$

$$Q_3(t) = 1.3889(1-F1)F2 A \sum_{i=1}^t r_{t-i+1} [ \{ i^2 / K2^2 + 2(1/K2 - 1/K2^2) i + 1/K2^2 - 2/K2 + 2 \} e^{-(i-1)/K2} - \{ i^2 / K2^2 + 2i/K2 + 2 \} e^{-i/K2} ] \quad (10)$$

지표면 유출에 대한 2개의 선형저수지에서와 같은 방법으로 3개 선형저수지의 유출량과 유역면적 A에 대한 중간 유출량은 다음 두 식과 같으며, F2는 중간 유출비율을 나타낸다.

선형 강우의 영향은 Lee와 Lee(1995)는 지하수 감수 곡선을 사용하였으나, 본 연구에서는 강우사상 시점에서의 유출량을 기저 유출량  $Q_b(t)$ 로 사용하고자 한다. 총유출은 지표면 유출과 중간유출에 시간단위 지체효과 LAG를 고려한 후 선형강우의 지하수 유출량인 기저 유출량을 더하여 구한다.

$$Q_T(t) = Q_2(t - LAG) + Q_3(t - LAG) + Q_b(t)$$

### 3. 모형의 보정 및 민감도

#### 3.1 목적함수

LRCS 모형은 사상형 강우-유출 모형이므로 모형화의 목적은 첨두유량의 크기와 발생시각에 가능한 근접시키려 실측치와 계산치의 차이를 최소화하는데 있으므로, 목적함수는 수문곡선의 첨두를 잘 나타낼 수 있는 것이 적절하다. Diskin과 Simon(1977)은 목적함수의 선정은 주관적이고 목적함수는 모형 매개변수의 최적치에 영향을 미친다고 하였다. 또한, 그들은 주어진 모형의 수행능력 적도를 나타내는 12개 목적함수를 제안하였으며, 단일 목적함수를 사용하지 말고 하나 이상의 목적함수 사용을 권장하였다. 따라서 본 연구에서 목적함수는 첨두유량 부분에서 가중치  $W(i)$ 가 크게 되게 하고(Hoggan, 1989), HEC-1에서 적용하는 가중최소자승(WLS, Weighted Least Squares) 방법인 식 (11)과 잔차의 자승합과 잔차의 절대값을 최소화시키는 식 (12)와 식 (13)과 같은 최소자승(LS, Least Squares)방법과 최소절대 편차(LAD, Least Absolute Deviation) 방법을 적용하고자 한다.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n [Q_o(i) - Q_c(i)]^2 W(i) \quad (11)$$

여기서  $W(i) = [Q_o(i) + Q_a] / (2Q_a)$ ,  $Q_o$ 는 실측유량,  $Q_c$ 는 계산유량이고  $Q_a$ 는 실측치의 평균유량이다.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n [Q_o(i) - Q_c(i)]^2 \quad (12)$$

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n |Q_o(i) - Q_c(i)| \quad (13)$$

### 3.2 보정방법 및 영향성 분석

#### 3.2.1 보정방법

Lee와 Lee(1995)는 직접 탐색법인 Hooke와 Jeeves 방법(Kuester와 Mize, 1973)을 사용하여 매개변수를 추정하였으며, 목적함수로는 식 (11)을 사용하였다. LRCS 모형은 6개의 매개변수(TP는 지표면 유출 단위유량도  $U_2(t)$ 의 첨두유량 도달시간, F1은 지표면유출 비율, IL은 초기손실, F2는 중간유출 비율, ALPG는 중간유출 선형 저수지의 매개변수 K2의 역수, LAG는 선형하도에 의한 지체시간)로 구성되어 있으나, 이 중에서 LAG는 시간단위이므로 이를 제외한 5개의 매개변수(TP, F1, F2, IL, ALPG)의 최적치를 추정하여야 한다. 본 연구는 LS, WLS, LAD의 3개 목적함수에 대해 Hooke와 Jeeves 방법으로 보정을 실시하였다.

#### 3.2.2 모형의 적합성 분석 방법

모형의 정확성을 평가하기 위해서 Nash와 Sutcliffe(1970)가 제안한 무차원 계수인 식 (14)와 같은 모형 효율성 계수(CME; Coefficient of Model Efficiency)와 식 (15)와 같은 무차원 계수로서 첨두 유량의 %오차(PEP; Percent Error of Peak)와 유출용적의 %오차(PEV; Percent Error of Volume) 및 첨두유량 발생시간( $T_p$ )의 %오차(PETP; Percent Error of Time of Peak)를 적용하여 모형

의 적합성을 평가한다.

$$CME = \frac{F_0^2 - F^2}{F_0^2} \quad (14)$$

여기서

$F^2 = \sum_{i=1}^n [Q_o(t) - Q_c(t)]_i^2$  이고,  $F_0^2 = \sum_{i=1}^n [Q_o(t) - Q_a]_i^2$  이다.  $F^2$ 는 실측치와 예측치 사이의 “불일치 지표” 이고,  $F_0^2$ 은 “실측유량의 초기분산”을 나타내며,  $Q_o$ 는 실측유량,  $Q_c$ 는 예측유량,  $Q_a$ 는 실측치의 평균 유량이다.

$$PEP = \frac{Q_{cp} - Q_{op}}{Q_{op}} \times 100(\%) \quad (15a)$$

$$PEV = \frac{V_c - V_0}{V_0} \times 100(\%) \quad (15b)$$

$$PETP = \frac{T_{pc} - T_{po}}{T_{po}} \times 100(\%) \quad (15c)$$

여기서  $Q_{cp}$ 와  $Q_{op}$ 는 예측 및 실측 침투유량이고  $V_c$ 와  $V_0$ 는 예측 및 실측 유출용적이며  $T_{pc}$ 와  $T_{po}$ 는 예측 및 실측 침투유량의 발생시간이다.

### 3.2.3 매개변수의 영향성 분석

보정시 잔차 조사 과정에서 발생하는 매우 중요한 고려사항은 영향성이다. 강우 유출 모형에서 영향성을 결정하는 방법은 “hat” 행렬을 이용하여 구하는 것이다 (Cook과 Weisberg, 1982).  $n$ 개 호우사상을 사용하여 보정한 결과, 식 (32)에서 보여준 바와 같이 민감도 행렬  $\mathbf{A}$ 로 나타내지는 “hat” 행렬  $\mathbf{V} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ 는 대칭( $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}$ )이고 멱등원( $\mathbf{V}^2 = \mathbf{V}$ )이다.  $h_i$ 로 나타내지는 “hat” 행렬의 대각요소는 0과 1사이의 값이며, 1에 가까운 값일수록 보정시 영향성이 크다. Huber(1981)는 한 사상의  $h_i$  값이 1에 가깝다면, 실측치  $Y_i$ 에서 오차가 큰 경우에는 잔차(=실측치 - 예측치),  $Y_i - P_i$ 의 조사를 실시할 필요가 없다고 지적하였다.

보정은 예측 오차를 작게 하기 위해서 매개변수를 조정하는 것이다. 그러나  $h_i$ 가 1에 가까운 값이 하나

또는 그 이상의 사상에 의해 오차가 크면, 결과적으로 매개변수 추정치는 비현실적이다. Huber(1981)는  $h_i \leq 0.2$ 의 값은 안전하고,  $0.2 < h_i \leq 0.5$ 의 값은 위험하고,  $h_i \geq 0.5$ 의 값은 주의 깊은 조사가 필요하다고 하였다.

Cook과 Weisberg(1982)는 표준잔차 조사절차와 연결하여  $h_i$ 의 유용성을 언급하였다. 참 오차  $\varepsilon_i$ 가 평균이 0이고 분산이 상수  $\sigma^2$ 이라고 가정하지만,  $\hat{\varepsilon}_i$ 로 나타내지는 잔차는 분산이 상수가 아니며, 실측치  $Y_i$ 와 예측치  $P_i$ 로 식 (16)과 같이 계산할 수 있다.

$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - P_i(\mathbf{X}, \mathbf{b}) \quad (16)$$

여기서  $\mathbf{X}$ 는 입력변수,  $\mathbf{b}$ 는 보정시 얻은 매개변수 추정치이다.  $\mathbf{b}$ 가 참 매개변수  $\beta$ 의 값과 다른 사유는 참 오차  $\varepsilon_i$ 가 독립이고 분산이 상수이지만,  $\hat{\varepsilon}_i$ 는 상관성이 있고 분산이 상수가 아니다. 또한, 이들은 최소자승 추정자를 이용하는 선형모형에서,  $\hat{\varepsilon}_i$ 의 분산은 단위행렬  $\mathbf{I}$ 와 hat 행렬  $\mathbf{V}$  및 오차행렬  $\boldsymbol{\varepsilon}$ 의 관계인  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{I} - \mathbf{V}) \boldsymbol{\varepsilon}$ 로부터 얻을 수 있다. 즉,  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ 이라면,  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 는 평균이 0이고 분산은  $\sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{V})$ 이다. 즉,  $\hat{\varepsilon}_i$ 의 분산은 식 (17)과 같다.

$$\text{Var}(\hat{\varepsilon}_i) = (1 - h_i)\sigma^2 \quad (17)$$

Cook과 Weisberg(1982)는 영향성 곡선에 대하여 논하였으며, 이 곡선이 보정시에서 어떤 호우 사상을 제외한 경우에 매개변수 추정치가 얼마만큼 변하는지를 보여준다. 보정시에 특정 사상의 전반적 영향성은  $h_i$ 로 나타내지는 값과  $\hat{\varepsilon}_i$ 로 나타내지는 모형 예측치와 실측치의 차이에 의존한다. 또한, 보정시  $i$ 번째 실측치의 영향성을 나타내는 간단한 척도로 식 (18)을 제시하였다.

$$D_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i^2 h_i}{p \hat{\sigma}^2 (1 - h_i)^2} \quad (18)$$

여기서  $p$ 는 추정된 매개변수의 수이다. 식 (18)은 선형회귀 분석으로부터 얻었으며, 비선형 모형에서 선형 근사치로도 사용된다.  $D_i$ 는  $i$ 번째 호우사상을 제외할 때가 모든 호우 사상을 사용하여 얻은 값과 매우 다른

매개변수 추정치로 나타날 때 커지는 경향이 있다. 즉, 일반적으로  $D_i \geq 1$  이면 세심한 조사가 필요하다.

### 3.3 민감도 분석

#### 3.3.1 오차 전파

참 매개변수  $\underline{\beta}$ 와 같지 않은 추정 매개변수  $\underline{b}$ 의 임의의 고정된 값으로 모형을 수행할 때 예측 오차는 식 (19)와 같다.

$$Y - P(X, \underline{b}) = Y - P(X, \underline{\beta}) + P(X, \underline{\beta}) - P(X, \underline{b}) = \varepsilon + \gamma(X, \underline{b}) \quad (19)$$

여기서  $\gamma(X, \underline{b})$ 는 식 (20)과 같으며, 매개변수  $\underline{\beta}$ 와  $\underline{b}$ 로 모형을 수행했을 때 얻은 유출 예측치의 차이이다.

$$\gamma(X, \underline{b}) = P(X, \underline{\beta}) - P(X, \underline{b}) \quad (20)$$

입력변수  $X$ 가 주어지고 매개변수가  $\underline{b}$ 일 때 평균 오차는  $\varepsilon$ 이  $X$ 에 대해서 평균은 0이기 때문에 식 (21)과 같다.

$$E[Y - P(X, \underline{b}) | X] = E[\varepsilon | X] + E[\gamma(X, \underline{b}) | X] = \gamma(X, \underline{b}) \quad (21)$$

편기량은  $\gamma^2 = E[\gamma^2(X, \underline{b})]$ 일 때 예측치의 평균자승 오차로 식 (22)와 같다.

$$E[(Y - P(X, \underline{b}))^2] = \sigma^2 + E[\gamma^2(X, \underline{b})] = \sigma^2 + \gamma^2 \quad (22)$$

$\underline{\beta}$ 가  $p \times 1$  벡터라면 Taylor정리에 따라 근사치는 식 (23)과 같다.

$$P(X, \underline{b}) \approx P(X, \underline{\beta}) + \frac{\partial P}{\partial b_1} \Big|_{b=\underline{\beta}} (b_1 - \beta_1) + \frac{\partial P}{\partial b_2} \Big|_{b=\underline{\beta}} (b_2 - \beta_2) + \dots + \frac{\partial P}{\partial b_p} \Big|_{b=\underline{\beta}} (b_p - \beta_p)$$

그래서,

$$\gamma(X, \underline{b}) \approx - \sum_{j=1}^p \frac{\partial P}{\partial b_j} \Big|_{b=\underline{\beta}} (b_j - \beta_j) \quad (23)$$

여기서 편미분  $\partial P / \partial b_j$ 는 매개변수  $b_j$ 의 모형 민감도이며,  $n$ 개의 호우사상과  $p$ 개의 매개변수일 때에는  $n \times p$  민감도 행렬을 얻을 수 있다. 식 (22)의 우변의 2번째 항의  $\gamma^2$ 은 식 (23)에 의해서 식 (24)와 같게 된다.

$$E[\gamma^2(X, \underline{b})] \approx \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p E\left[\frac{\partial P}{\partial b_j} \frac{\partial P}{\partial b_k} \Big|_{b=\underline{\beta}}\right] (b_j - \beta_j)(b_k - \beta_k) \quad (24)$$

#### 3.3.2 민감도 및 매개변수의 분산

실측치  $Y_i$ 와 예측치  $P_i(X, \underline{b})$ 의 차이로 나타내는 오차  $\varepsilon_i$ 에 대한 내용을 분석하면, 오차의 첫 번째 중요한 발생요인은 유역의 수문과정을 나타내는 모형 자체의 부정확성에 기인한다. 특정한 모형과 유역에 대해 모형의 부정확성에 기인하는 오차를 최소화하는 참 매개변수 벡터  $\underline{\beta}$ 가 존재한다고 가정한다. 두 번째 오차의 근원은 자료의 오차이다. 참 매개변수 벡터  $\underline{\beta}$ 가 모형에 사용될 때 오차 벡터를  $\varepsilon_i$ 라 하면  $Y$ 는 식 (25)와 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_i = P_i(X, \underline{\beta}) + \varepsilon_i \quad (25)$$

오차 집합  $\{\varepsilon_i\}$ 가 평균이 0이고 공분산이 식 (26)과 같은 정상적 추계학적 과정이라고 가정하자.

$$\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+r}) = \gamma_r \quad (26)$$

즉,  $\gamma_r$ 은  $r$ 행만큼 떨어진 오차 사이의 공분산이다. 참 매개변수 벡터  $\underline{\beta}$ 를 알 수 없으면 오차집합  $\{\varepsilon_i\}$ 도 결정할 수 없다. 그러나, 참 매개변수의 최선 추정치는 식 (27)을 최소화하여 추정되는 최소자승 매개변수 벡터  $\underline{b}$ 로 결정할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \text{ or } \varepsilon^T \varepsilon \quad (27)$$

$\underline{b}$ 가 참 매개변수  $\underline{\beta}$ 의 부근에 있다고 가정하면,  $\{\varepsilon_i(\underline{b})\}$ 는  $\{\varepsilon_i\}$ 의 추정치이다. 오차를 벡터 형태로 나타내면 식 (28)과 같다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{b}) \quad (28)$$

따라서, 최소자승추정 매개변수  $\mathbf{b}$ 는 식 (29)를 최소화하여 얻는다.

$$[\mathbf{Y} - \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{b})]^T [\mathbf{Y} - \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{b})] \quad (29)$$

$\beta$ 에서  $\mathbf{P}_i(\mathbf{X}, \mathbf{b})$ 를 Taylor 급수로 전개하면 식 (30)과 같다.

$$\begin{aligned} P_i(\mathbf{X}, \mathbf{b}) \approx & P_i(\mathbf{X}, \beta) + \sum_{j=1}^r (b_j - \beta_j) \left[ \frac{\partial P_i(\mathbf{X}, \mathbf{b})}{\partial b_j} \right]_{\mathbf{b}=\beta} \\ & (30) \end{aligned}$$

식 (30)을 행렬 형태로 쓰면 식 (31)과 같다.

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{b}) \approx \mathbf{P}(\mathbf{X}, \beta) + \mathbf{A}(\mathbf{b} - \beta) \quad (31)$$

여기서  $\mathbf{A}$ 는 식 (32)와 같은  $(n \times p)$  민감도 행렬이다.

$$A_{ij} = \left[ \frac{\partial P_i}{\partial b_j} \right]_{\mathbf{b}=\beta} \quad (32)$$

식 (29)와 식 (31)로부터 식 (33)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & [\mathbf{Y} - \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{b})]^T [\mathbf{Y} - \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{b})] \\ & \approx [\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}(\mathbf{b}, \beta)]^T [\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}(\mathbf{b}, \beta)] \end{aligned} \quad (33)$$

선형 모형의 최소자승이론(Graybill, 1961)에 의해서 식 (34)로 최소화된다.

$$\mathbf{b} = \beta + (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (34)$$

정상 과정에서 Central Limit Theorem을 사용하면 (Heyde, 1974),  $\mathbf{b}$ 는 평균이  $\beta$ 이고 식 (35)와 같은 공분산 행렬을 가진 근사 다변량 정규분포를 가진다.

$$\text{Var}(\mathbf{b}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \quad (35)$$

여기서  $\boldsymbol{\Gamma}$ 는 실측치와 계산치 사이의 차이로부터 얻을 수 있는 오차의 공분산 추정치가  $\gamma_r$ 인  $(n \times n)$  행렬이다.

$$\gamma_r = (n-r)^{-1} \sum_{j=1}^r \varepsilon_j \varepsilon_{j+r}, \quad r=0, 1, \dots, n-1 \quad (36)$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-3} \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

#### 4. 결 론

(1) 모형의 보정시 중요한 요소인 목적함수를 모형의 출력이 침투유량인 경우에 LS, WLS, LAD 사용을 제안하였다.

(2) 보정시 매개변수의 영향성 분석을 위하여, 즉 매개변수 추정치의 적합성을 파악하기 위하여 "hat" 행렬의 대각요소와 영향성 척도의 사용을 제안하였다.

(3) 매개변수의 오차가 모형 출력에 얼마나 전파하는지를 조사하였다.

(4) 모형 예측치 분산과 매개변수 변화에 따른 모형 출력의 민감도와와의 관련성을 조사하고, 민감도 계수를 정량화 하였다.

#### 참 고 문 헌

- 이상호 (1993). 한강수계 저수지군의 홍수시 예측 및 제어. 박사학위논문, 서울대학교.
- 한국건설기술연구원 (1993). 수문모형 평가에 관한 연구 - 강우-유출 모형을 중심으로 -. 건기연 9 2 - WR - 111 - 2, 한국건설기술연구원.
- Cook, R. D., and S. Weisberg (1982). *Residuals and Influence in Regression*, Chapman and Hall, New York.
- Dawdy, D. R., and T. O'Donnell (1965). "Mathematical Models of Catchment Behavior." *J. of the Hydraul. Div.*, Proceedings of the ASCE, pp. 123-136.
- Diskin, M. H., and E. Simon (1977). "A Procedure for the Selection of Objective Functions for Hydrologic Simulation Models." *Journal of Hydrology*, Vol. 34, pp. 129-149.
- Graybill, F. A. (1961). *An Introduction to Linear Statistical Models*. Vol. 1,

- McGraw-Hill, New York, pp. 114.
- Heyde, C. C. (1974). "On the Central Limit Theorem for Stationary System." *Z. Wahrscheinlich Keistheorie Verw. Geb.*, Vol. 30, pp. 315-320.
- Hoggan, D. H. (1989). *Computer Assisted Floodplain Hydrology & Hydraulics*, McGraw-Hill, New York, p. 118.
- Huber, P. O. (1981). *Robust Statistics*, John Wiley and Sons, New York, pp. 160-162.
- Kuester J. L., and J. H. Mize (1973). *Optimization Techniques with Fortran*, pp. 309 - 319.
- Lee, Sang Ho, and Kil Seong Lee (1995). "Development of an Event Rainfall-Runoff Model in Small Watersheds." *Korean Journal of Hydrosiences*, Vol. 6, pp. 81-98.
- McCuen, R. H. (1973). "The Role of Sensitivity Analysis in Hydrologic Modeling.", *Journal of Hydrology*, Vol. 18, pp. 37-53.
- McCuen, R. H. (1974). "A Sensitivity and Error Analysis of Procedures Used for Estimating Evaporation." *Water Resources Bulletin*, Vol. 10(3), pp. 486-497.
- Mein, R. G., and B. M. Brown (1978). "Sensitivity of Optimized Parameters in Watershed Models." *Water Resources Research*, Vol. 14(2), pp. 299-303.
- Nash, J. E., and J. V. Sutcliffe (1970). "River Flow Forecasting through Conceptual Models Part I - A Discussion of Principles." *Journal of Hydrology*, Vol. 10, pp. 282 - 290.
- Rogers, C. C. M., K. J. Beven, E. M. Morris, and M. G. Anderson (1985). "Sensitivity Analysis, Calibration and Predictive Uncertainty of the Institute of Hydrology Distributed Model." *Journal of Hydrology*, Vol. 81, pp. 179 - 191.
- Salomonson, V. V., R. Ambaruch, A. Rango, and J. P. Ormsby (1975). "Remote Sensing Requirements as Suggested by Watershed Model Sensitivity Analysis." *Proceedings, Tenth International Symposium on Remote Sensing of Environment*, Ann Arbor, Michigan, Vol. 2, pp. 1273-1284.
- Sorooshian, S., and F. Arfi (1982). "Response Surface Parameter Sensitivity Analysis Methods for Postcalibration Studies." *Water Resources Research*, Vol. 18(5), pp. 1531-1538.
- Troutman, B. M. (1985a). "Errors and Parameter Estimation in Precipitation - Runoff Modeling 1. Theory." *Water Resources Research*, Vol. 21(8), pp. 1195 - 1213.
- Troutman, B .M. (1985b) "Errors and Parameter Estimation in Precipitation - Runoff Modeling 2. Case Study." *Water Resources Research*, Vol. 21(8), pp. 1214 - 1222.
- Yeh, W. W.-G., L. Becker, and R. L. Sohn (1978). "Information Requirements for Improving Hydropower." *Journal of the Water Resources Planning and Management Division*, ASCE, Vol. 104(1), pp. 139-156.

(논문번호:99 060/접수:1999.08.18/심사완료:1999.10.05)