韓國水資源學會論文集
第32卷 第4號 · 1999年 8月
pp. 437~445

Mallows의 C_L 통계량을 이용한 수문응답 추정

Hydrologic Response Estimation Using Mallows' C_L Statistics

성 기 원* / 심 명 필**
Seong, Kee Won / Shim, Myung Pil

Abstract

The present paper describes the problem of hydrologic response estimation using non-parametric ridge regression method. The method adapted in this work is based on the minimization of the C_L statistics, which is an estimate of the mean square prediction error. For this method, effects of using both the identity matrix and the Laplacian matrix were considered. In addition, we evaluated methods for estimating the error variance of the impulse response. As a result of analyzing synthetic and real data, a good estimation was made when the Laplacian matrix for the weighting matrix and the bias corrected estimate for the error variance were used. The method and procedure presented in present paper will play a robust and effective role on separating hydrologic response.

Keywords: hydrologic response, estimation, C_L statistics, ridge regression

요 지

비모수능형회귀분석법을 이용하여 수문응답을 추정하는 방안에 대하여 연구하였다. 응답을 추정하기 위하여 평균제곱예측오차에 대한 추정량인 C_L 통계량을 최소화하는 방법을 적용하였으며 가중행렬은 전통적으로 이용되는 단위행렬과 특수한 형태의 행렬인 Laplacian 행렬을 각각 이용하여 비교하였다. 또한 추정응답의 오차분산을 추정하는 방안에 대한 검토도 실행하였다. 합성자료와 실제자료에 대한 분석 결과 가중행렬로는 Laplacian 행렬을 오차분산은 편기 수정된 추정치를 이용하는 것이 좋은 결과를 보여 주었다. 본 연구에서 제시된 절차 및 방법은 수문응답 분리에 있어서 안정적이고 효율적으로 적용될 수 있을 것으로 판단된다.

핵심용어 : 수문응답, 추정, C_L 통계량, 능형회귀분석

* 건국대학교 공과대학 토목공학과 조교수
Assistant Prof., Dept. of Civil Engineering, Konkuk University, Seoul, 143-701, Korea
** 인하대학교 공과대학 토목공학과 교수
Professor, Dept. of Civil Engineering, Inha University, Incheon, 402-751, Korea

1. 서 론

충격응답함수(impulse response function)는 선형 시스템의 성격을 규정하는 함수이다. 따라서 이 함수를 적절하게 추정하는 문제는 대단히 중요하다. 그렇지만 입력과 출력 자료들이 잡음으로 오염되어 있는 경우 또는 자료의 수집 간격 등에 기인한 문제들로 인하여 응답의 추정은 간단한 문제가 아니니다. 강우-유출 과정을 선형 시스템으로 가정하여 해석할 경우 충격응답은 순간단위유량도라 하며 이 응답은 임의 시간에 대한 단위유량도로 변환되어 홍수량 산정 등에 이용된다. 응답을 추정하는 가장 간단한 방법은 최소자승법에 의한 정규방정식(normal equation)을 해결하는 것이다. 그러나 분산행렬이 ill posed 되어 있는 경우 혹은 응답이 심한 진동성분을 포함하고 있을 경우 이를 효과적으로 완화시키기 위하여 능형회귀분석(ridge regression analysis)을 이용한다. 이 방법을 이용하여 수문응답을 추정하는 문제에 대하여 Bruen과 Dooge(1984)가 최초로 제안하였으나 가장 중요한 조정변수(regularization parameter)를 선택하는 적절한 방법에 대해서는 설명하지 못하였다. 서병하 등(1993)은 Bruen과 Dooge(1984)의 이론으로부터 추정된 응답을 gamma 분포형 함수에 적용하여 비모수모형(non-parametric model)을 모수모형화하는 평활화 기법을 제안하였다. 그리고 성기원과 심명필(1997)은 통계적인 방법을 이용하여 조정변수를 효과적으로 추정하는 방법을 제안한 바 있다. 그런데 Bhargava 등(1987)은 전기공학 분야의 신호처리 과정에서 이용되는 선형시스템 해석을 위하여 Bayesian 접근방법을 이용하였다. 그런데 이 방법에 대하여는 조정변수의 추정에 있어서 편기를 수정할 수 있는 통계적 방안이 제시된 바 없다. 이에 본 연구에서는 Bayesian 방법의 특수한 형태이지만 다양한 수학적 통계적 검토가 이루어진 능형회귀모형을 선택하고 Mallows의 C_L 통계량을 이용하여 응답을 추정하는 방안을 제시하였다. 본 연구에서는 이 Mallows의 통계량이 수문응답을 적절하게 추정하는지 살펴보고 이용하는 과정에서 가중행렬의 형태에 따른 그리고 오차분산의 불편 추정치를 이용한 경우에 따른 응답 거동의 변화를 고찰하여 보다 안정적인 추정을 위한 방법론을 제안하고자 한다.

2. 본 론

2.1 모형의 구성

선형 시불변(linear and time invariant) 시스템을 표현하는 입출력 관계식은 식 (1)과 같다.

$$f = Hw \tag{1}$$

여기서 f는 출력(직접유출)으로 크기가 p인 벡터이고 w는 충격응답(순간단위유량도, 수문응답)으로 크기가 m인 벡터로 정의한다. H는 입력(유효강우)으로 구성된 회선행렬(convolution matrix) 혹은 설계행렬(design matrix)로 그 크기는 $p \times m$이다. 관측된 입력 및 출력자료로부터 응답을 추정하는 문제에 있어서 진동을 제어하거나 악화된 상태를 완화하기 위하여 정규방정식 대신 식 (2)와 같은 추정 방정식을 이용한다.

$$\hat{w} = [H^T H + kR^T R]^{-1} H^T f \tag{2}$$

여기서 k는 음이 아닌 스칼라 량으로 조정변수 또는 능형매개변수(ridge parameter)라 하며 최적값은 우선 결정되지 못한다. 그리고 R은 가중행렬(weighting matrix)로 일반적으로 단위행렬(Identity matrix) I를 이용하는데 이 경우 식 (2)는 전통적인 능형회귀분석에 의한 응답의 추정방정식이 된다. 그런데 Bhargava 등(1987)은 식 (3)과 같은 Laplacian 행렬 C를 가중행렬로 이용할 수 있다고 하였다.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & -2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

가중행렬로 단위행렬이 이용되는 경우 전에너지제약조건(total energy constraint)이 Laplacian 행렬이 이용되는 경우 차등에너지제약조건(differential energy constraint)이 적용되었다고 정의한다. 성기원과 심명필(1997)은 가중행렬이 단위행렬일 경우 최적 조정변수를 도출하기 위하여 Newton-Raphson 방법을 이

용하였으나 가중행렬이 Laplacian 행렬일 경우 최적해를 도출하기 어려웠다. 이에 본 연구에서는 Mallows의 C_L 통계량을 이용하였다. 이 통계량은 Mallows(1973)가 제안한 평균제곱예측오차(mean square error of prediction)의 편기수정된 추정치(bias corrected estimate)이다. 이 Mallows의 C_L 통계량은 식(4)와 같이 정의된다.

$$C_L = \frac{RSS(k)}{\rho} - p + 2\,trace(HL_k) \tag{4}$$

여기서 $RSS(k)$는 잔차제곱(residual sum of squares)으로 다음과 같이 정의된다.

$$RSS(k) = \|f - H\widehat{w_k}\| \tag{5}$$

여기서 $\|\circ\|$는 Euclidean norm이다. 그리고 ρ는 오차분산(error variance)으로 Bhargava 등(1987)은 식 (6)과 같이 정의하였다.

$$\hat{\rho} = \frac{RSS}{p} \tag{6}$$

또한 식 (4)의 L_k는 다음의 관계를 갖는다.

$$\hat{w} = L_k f = [H^T H + kR^T R]^{-1} H^T f \tag{7}$$

따라서 평균예측오차의 추정치인 C_L 통계량을 최소화하는 k를 도출하면 식 (2)를 이용하여 응답을 추정할 수 있다. 본 연구에서는 C_L 통계량을 최소화하기 위한 k를 찾기 위하여 직접탐색법과 시산법을 병용하는 방법을 이용하였다.

2.2 오차분산 추정

Mallows의 C_L 통계량은 오차분산의 추정치를 요구한다. Bhargava 등(1987)은 이 추정치로 식 (6)을 이용하였으나 이는 편기된 추정량이다. 오차분산의 추정치는 모형의 자유도를 고려할 때 식 (8)과 같은 형태가 되는 것이 바람직하다.

$$\hat{\rho} = \frac{RSS}{p - m} \tag{8}$$

그런데 능형회귀모형의 경우 식 (8)을 적용하는 것이 합리적이지 않을 수 있다. 능형회귀모형은 추가된 변수인 조정변수의 존재로 인하여 모형의 자유도를 $p-m$으로 정의하는 것이 모호하기 때문이다. Moody(1992)는 매개변수의 유효개수(effective number of parameters) γ를 정의하여 식 (8)의 m 대신 적용할 것을 제안한 바 있다. 그는 식 (2)의 $(H^T H - kR^T R)^{-1}$을 분산행렬이라 정의하고 이에 대한 $I - H(H^T H - kR^T R)^{-1} H$를 사영행렬(projection matrix)이라 하였다. 이 사영행렬은 p차원의 공간의 벡터를 회귀모형공간인 m차원의 부공간(subspace)으로 사영시키는 역할을 한다. 따라서 이 계산은 제약되는 자유도의 정보를 제공하는 것이다. 이에 따라 다음을 정의한다.

$$\gamma = p - trace[I - H(H^T H - kR^T R)^{-1} H] \tag{9}$$

따라서 오차분산의 불편추정치는 식 (8)대신 다음 식을 적용할 수 있다.

$$\hat{\rho} = \frac{RSS}{p - \gamma} \tag{10}$$

통계적으로 모형의 적절한 매개변수를 선택하는 기법을 모형선택평가법(model selection criteria)이라 한다. 그런데 모형선택평가법은 매개변수의 변화에 대한 예측오차(prediction error)에 대한 추정치를 평가하여 최소예측오차를 갖는 모형을 선정하는 방법이다. 이 가운데 Cross-validation 법은 가장 일반적인 방법인데 이외에도 여러 가지 방법이 있으며 이 방법들 간의 차이는 모형의 유효매개변수의 개수를 어떻게 정의하는가에 있다고 할 수 있다. 예측오차의 비교는 해당 매개변수에 대한 오차분산의 추정치를 비교함으로 이루어지는 데 Bhargava 등(1987)이 이용한 식 (6)은 앞서 언급하였듯이 편기된 추정치이며 식 (8)은 대표적인 불편 추정치이다. 그런데 능형회귀모형의 불편 추정치는 식 (8)을 이용하는 것보다 모형의 자유도를 적절하게 고려할 수 있는 다른 방법을 이용하는 것이 통계적으로 합리적이다. 이 가운데 Golub 등(1979)이 제시한 Generalized-cross-validation(GCV) 법에 의한 오차분산의 추정치는 식(11)과 같다.

$$\hat{\rho}_{GCV} = \frac{p \times RSS}{[trace(I - H(H^T H - kR^T R)^{-1} H]^2} \tag{11}$$

이 식을 살펴보면 식 (6)으로 표현된 편기된 오차분산

량에 $p^2/(p-\gamma)^2$ 이 곱해지는 형태임을 알 수 있다. 또한 Schwarz(1978)은 식 (12)와 같은 Bayesian-information-criterion(BIC)법에 의한 추정치를 제시하였다. 이식은 식 (6) $1+\ln(p)\left(\frac{\gamma}{p}+\frac{\gamma^2}{p^2}+\frac{\gamma^3}{p^3}+\cdots\right)$ 의 값이 곱해지어 편기를 보정하는 형태를 갖는다.

$$\hat{\rho}_{BIC} = \frac{p+(\ln(p)-1)\gamma}{p-\gamma}\frac{RSS}{p} \tag{12}$$

따라서 식 (10)~(12)는 모형의 자유도가 고려된 편기 수정된(bias corrected) 추정식이다. 본 연구에서는 식 (6) 및 식 (11)과 (12)의 결과를 추정치로 할 경우의 추정응답 변화를 살펴보았다.

3. 결과 및 분석

본 연구에서는 응답추정을 위한 목적함수인 C_L 통계량의 적용성을 살펴보고 식 (2)의 가중행렬이 단위행렬인 경우와 Laplacian 행렬일 경우에 대한 응답 거동의 차이를 평가하였다. 또한 오차분산을 추정하는데 있어서 식 (6)과 같은 편기된 추정량을 이용할 경우와 식 (11)과 식 (12)와 같은 편기 수정된 추정량을 이용할 경우의 변화를 살펴보았다. 평가를 위하여 해석적인 합성자료(synthetic data)와 실제자료를 이용하였다. 합성 자료는 Rao와 Tirtotjondro(1995)가 Bayesin 방법으로 단위유량도를 산정하는 연구에 활용한 자료이기도 하다. 이 자료의 입력 $h(t)$, 출력 $f(t)$ 그리고 핵함수 $w(t)$는 다음과 같다.

$$h(t) = 8\left[t+\frac{t^2}{2}\right]\exp\left(-\frac{t}{2}\right) \tag{13}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{t^5}{5!}+\frac{t^6}{6!}\right]\exp\left(-\frac{t}{2}\right) \tag{14}$$

$$w(t) = \frac{t^3}{96}\exp\left(-\frac{t}{2}\right) \tag{15}$$

입력 및 출력함수는 1시간 간격으로 이산화하였으며 의도적으로 분산 10%의 잡음(noise)을 부가하였다. 그리고 이론적인 응답인 식 (15)와 추정된 응답을 비교하였다. 그리고 실제의 강우-유출 자료는 성기원과 심명필(1997)이 능형회귀분석에 이용하였던 자료를 이용하였다.

3.1 합성자료에 대한 분석

C_L 통계량을 최소화 하여 합성자료에 대한 응답을 추정하여 이론적인 응답과 비교하였다. 가중행렬로 단위행렬과 Laplacian 행렬을 모두 사용하여 결과를 비교하였다. 오차분산 추정치는 식 (11)로 나타내는 편기 수정된 양을 이용하였다. 이 결과를 그림 1에 수록하였다.

그림을 살펴보면 추정 응답은 이론적인 응답에 거의 일치하는 경향을 보여주고 있다. 따라서 C_L 통계량

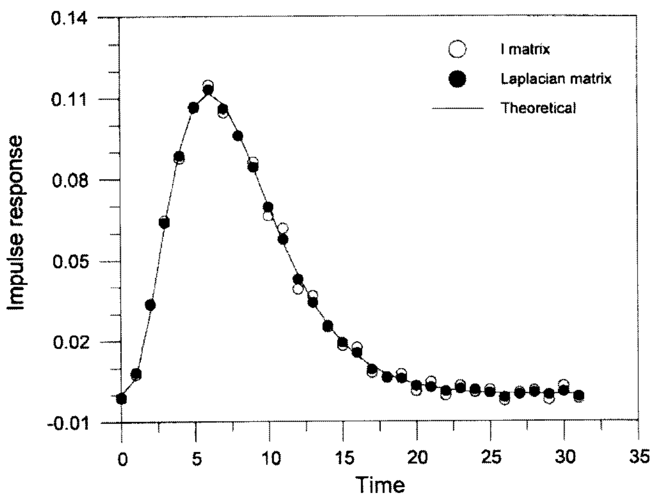

그림 1. 합성자료에 대한 응답의 추정

은 응답 추정에 대한 적절한 방법으로 판단된다. 다만 가중행렬의 종류에 따라 약간의 차이를 보여주고 있다. Laplacian 행렬을 이용하는 경우 단위행렬을 이용하는 경우보다 진동이 적으며 첨두량을 잘 예측하고 있다. 그리고 오차분산의 추정 방법에 대한 결과의 차이를 비교하고자 분산 15%의 잡음이 부가된 합성자료를 이용하여 응답을 비교하였으며 이를 그림 2와 그림 3에 나타내었다.

그림 2는 가중행렬을 단위행렬로, 그림 3은 Laplacian 행렬로 이용할 경우의 차이를 나타낸 것이다. 그림 2를 살펴보면 첨두부는 식 (12)를 하강부는 식 (11)을 이용한 것이 안정된 결과를 보여주고 있다. 그림 3을 보면 Laplacian 행렬을 이용하는 경우 오차분산의 추정방법과는 거의 상관이 없는 경향을 보여주며 단위행렬을 이용하는 것보다 대단히 안정된 응답 추정 결과를 보여주고 있다. 이 결과를 정량적으로 비교하기 위하여 응답의 이론치와 추정치 차의 합을 식 (16)으로 표시되는 제곱오차량으로 정의하였다.

$$\text{제곱오차} = \|w - \hat{w}\| \tag{16}$$

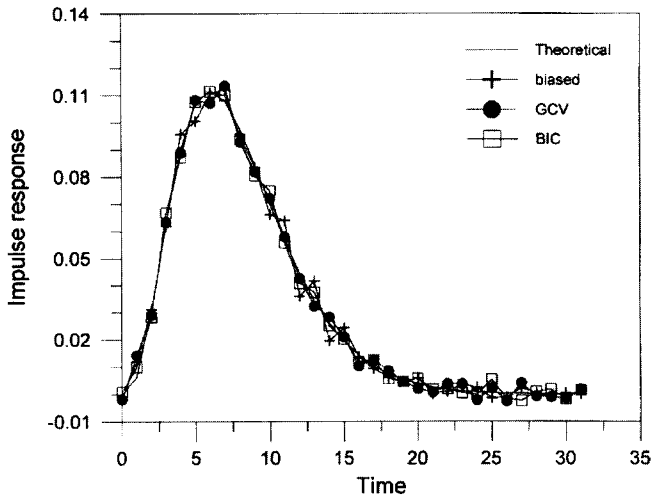

그림 2. 오차분산과 추정응답 (단위행렬 이용 시)

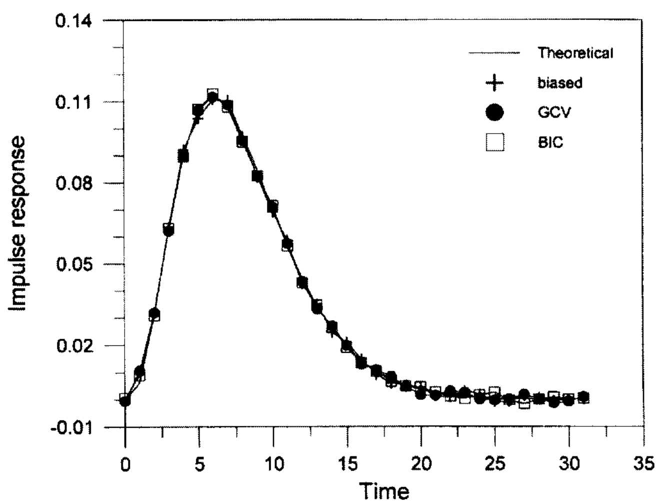

그림 3. 오차분산과 추정응답 (Laplacian 행렬 이용 시)

표 1. 가중행렬의 종류 및 오차분산의 추정 방법에 따른 응답 거동의 비교

가중행렬의 종류	오차분산 추정방법	제곱 오차 (10^{-3}) 식 (16)	잔차 제곱 (10^{-6}) 식 (17)
단위행렬	편기 추정 식 (6)	0.3416	0.387
	GCV 식 (11)	0.2006	0.465
	BIC 식 (12)	0.1926	0.439
Laplacian 행렬	편기 추정 식 (6)	0.086	0.498
	GCV 식 (11)	0.030	0.717
	BIC 식 (12)	0.038	0.657

또한 식 (17)로 정의되는 잔차제곱을 도입하였으며 식 (16)과 (17)의 결과를 표 1에 수록하였다.

$$\text{잔차 제곱} = \|f - H\hat{w}\| \tag{17}$$

표를 살펴보면 그림에서 발견되는 차이를 설명하는 통계적 유의성을 발견하기 어렵다. 단지 응답의 이론치와 추정치를 비교하는 제곱 오차의 경우 편기 수정된 방법을 적용하는 것이 다소 우월한 것으로 나타났다. 응답의 출력을 비교하는 잔차 제곱의 비교에서는 편기된 추정량을 이용하는 것이 오히려 나은 결과를 보여 주었다. 이것은 편기된 추정량의 경우 모형의 자유도가 크기 때문에 출력의 형태를 잘 따르기 때문으로 판단되는데 비록 잔차 제곱은 적을지라도 그 결과보다 큰 진동이 발생한다. 이는 수문학적 응답 추정에 있어서 심미적으로 바람직하지 않은 결과이며 더욱 중요한 사실은 통계학적으로 편기된 추정량을 이용하는 것은 능형회귀모형에 적합하지 않다는 것에 유의하여야 한다. 그리고 단위행렬및 Laplacian 행렬의 조정변수와의 민감도를 분석하기 위하여 조정변수에 대한 평균제곱오차(mean squared error, MSE)를 계산하고 이를 그림 4에 수록하였다.

그림 4를 보면 Laplacian 행렬을 이용하는 경우 단

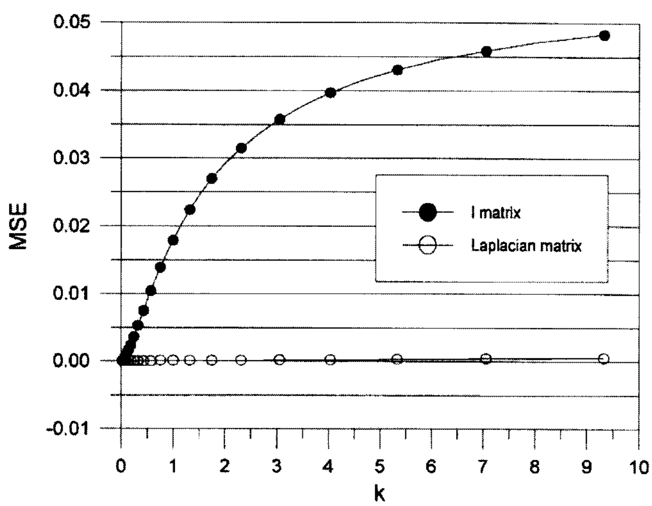

그림 4. 조정변수와 평균제곱오차와의 관계 (합성자료)

위행렬을 이용하는 것에 비하여 평균제곱오차의 변화량이 상대적으로 미미한 것을 발견할 수 있는데 이는 Laplacian 행렬를 이용할 때 조정변수의 정확한 산정에 대한 지나친 계산적 소모가 불필요하다는 것을 의미한다. Bhargava 등(1987)에 의하면 Laplacian 행렬은 고빈도의 진동(high frequency oscillation)을 완화 시켜주는 특성이 있는데 이는 응답의 추정된 '에너지'가 너무 클 경우 이를 제약하고 진동을 완화시킨다고 하였다. 이상의 결과를 살펴보면 C_L 통계량은 응답을 적절하게 추정할 수 있는 통계량이라 할 수 있으며 가중행렬의 선택에 있어서는 Laplacian 행렬을 이용하는 것이 응답추정에 있어서 수문학적으로 유리하다고 판단된다.

3.2 실제자료에 대한 분석

합성자료에 대한 분석결과를 기초로 실제 발생한 강우-유출 사상에 대하여 본 연구의 방법 및 절차를 적용시켜 보았다. 오차분산의 추정은 언급된 공식 가운데

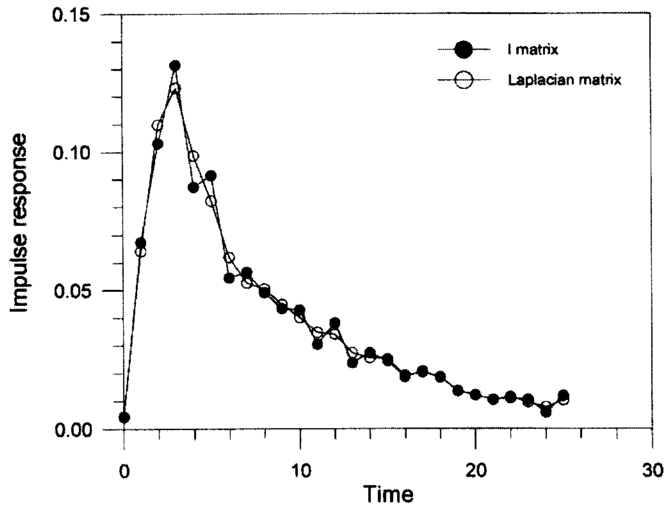

그림 5. 추정된 순간단위유량도의 비교

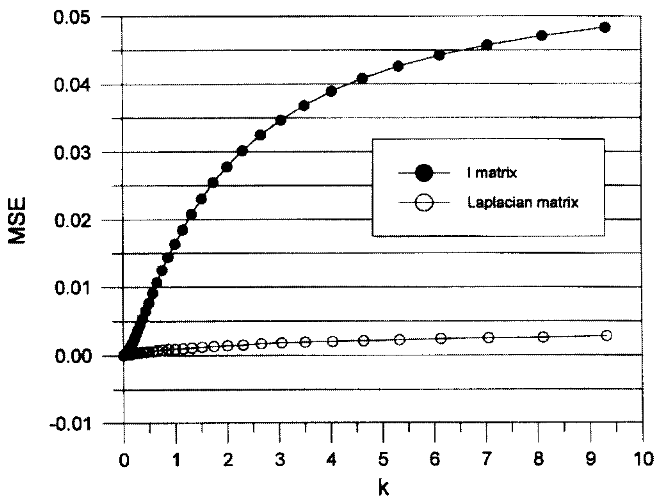

그림 6. 조정변수와 평균제곱오차와의 관계 (실제자료)

식 (11)을 이용하였으며 가중행렬은 단위행렬과 Laplacian 행렬 모두를 적용하여 비교하였다. 본 연구에 이용된 사상은 평창강 수계 이목정 소유역에 발생한 '89년 7월 11일 사상으로 34시간의 기저시간이 관측되었고 첨두는 강우 개시후 8시간에 발생하였으며 그 양은 17.7cms 인 사상이다. 그런데 이 사상은 식 (2)의 HTH가 약하게 악화되어 있으며 정규방정식을 이용하여 응답을 추정할 경우 다소의 진동이 발생하는 사상이다(성기원과 심명필, 1997). 이 사상에 대하여 C_L 통계량을 이용하여 추정된 응답(순간단위유량도)을 그림 5에 수록하였다.

그림 5를 보면 Laplacian 행렬을 이용하는 경우 응답이 현저하게 평활화된 것을 발견할 수 있다. 그리고 추정된 조정변수의 민감도를 분석한 결과를 그림 6에 도시하였다.

그림 6을 보면 k의 변화에 따라 단위행렬을 이용하는 경우 평균제곱오차의 민감도는 대단히 크지만 Laplacian 행렬의 경우는 안정적이다. 이와 같은 경향은 합성 자료의 분석에서 발견한 결과와 일치한다.

4. 결 론

강우-유출 사상으로부터 단위유량도를 추정하는 것은 모든 수문분석의 기본이 되는 중요한 작업이다. 따라서 이 작업은 정확하고 합리적인 절차에 의하여 이루어져야 한다. 본 연구는 이를 지원하는 연구로서 다음과 같은 결론을 제시할 수 있다.

(1) Mallows의 C_L 통계량을 이용한 분석은 전기공학의 신호처리 해석을 위하여 제시되었으나 수문응답의 추정에도 효과적으로 이용될 수 있었다. 이 통계량의 최적화는 비교적 간단하게 수행될 수 있으므로 실무적으로도 적용성이 크다고 판단된다.

(2) 능형회귀모형의 가중행렬을 전통적으로 이용되는 단위행렬 및 에너지의 제어 개념에서 이용되는 Laplacian 행렬에 대하여 적용하고 응답을 비교한 결과 현저한 차이를 발견할 수 있었다. Laplacian 행렬을 이용하는 경우 응답의 진동이 효과적으로 완화되었으며, 특히 조정변수와의 민감도도 작기 때문에 Laplacian 행렬을 이용하는 절차를 추천한다.

(3) 전통적인 능형회귀분석 기법인 단위행렬을 이용하는 방법은 오차분산의 추정방법에 따라 응답의 변화에 대한 유의성이 있었지만 Laplacian 행렬을 이용하는 경우 상대적으로 적었다. 그렇지만 모형의 자유도에 대한 이론에 따라 편기 수정된 추정치를 이용하는 것이 적절하다고 본다. 특히 자료의 크기가 작을수록 C_L 통계량은 예측오차에 대한 최소평균제곱 추정치로부터 벌어지게 되고 따라서 오차분산의 중요성이 커지기 때문에 이를 고려하여야 한다. 단위유량도를 효과적으로 도출할 수 있는 사상은 짧은 기간 내에 집중적으로 발생하는 호우에 의한 것이므로 자료의 크기가 작다. 따라서 본 연구에서 이용한 식 (11)과 식 (12)와 같은 편기 수정된 오차분산 추정치를 이용할 것을 추천한다.

참 고 문 헌

서병하, 김 승, 정성원, 김현준, 김창완, 김형섭, 강태호, 김혜순, 박현정, 김민아 (1993). 수자원관리 기법개발연구조사 보고서. 연구보고서, 건설부.

성기원, 심명필 (1997). "수문응답 분리에 대한 조정변수의 효과적인 결정 지원방법." 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, 제17권, 제II-3호, pp. 235-242.

Bhargava, U.K., Kashyap, R.L., and Goodman, D.M. (1987). "Two nonparametric methods for identifying the impulse response of linear systems." *IEEE Trans. Acoust, Speech Signal Process*, Vol. ASSP-35, No. 7, pp. 974-986.

Bruen, M., and Dooge, J.C.I. (1984). "An effective and robust method for estimating unit hydrograph ordinates." *Journal of Hydrology*, Vol. 70, pp. 1-24.

Golub, G.H., Heath, M., and Wahba, G. (1979). "Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter." *Technometrics*, Vol. 21, No. 2, pp. 215-223.

Mallows, C.L. (1973). "Some comments on CP." *Technometrics*, Vol. 15, No. 4, pp. 661-675.

Moody, J.E. (1992). "The effective number of parameters: An analysis of generalization in nonlinear learning systems." *Neural information process system* 4, Edited by Moody, J.E., Hanson, S.J., and Lippmann, R.P., Morgan Kaufmann, pp. 847-854.

Rao, A.R., and Tirtotjondro, W. (1995). "Computation of unit hydrographs by a

Bayesian method." *Journal of Hydrology*, Vol. 164, pp. 325-344.
Schwarz, G. (1978). "Estimating the dimension of a model." *Annals of Statistics*, Vol. 6, pp. 461-464.

(논문번호:99-021/접수:1999.03.09/심사완료:1999.06.10)