

< 논 문 >

다단 연속 회전체 베어링 계의 일반화된 모드 해석

A Generalized Modal Analysis for Multi-Stepped, Distributed-Parameter Rotor-Bearing Systems

박 종 혁* · 홍 성 욱**

Jong-Heuck Park and Seong-Wook Hong

(1999년 1월 22일 접수 : 1999년 3월 5일 심사완료)

Key Words : Rotor-Bearing System(회전체 베어링 계), Distributed-Parameter System(분포변수계:연속계), Timoshenko Shaft Model(Timoshenko 축 모델), Internal Damping(내부감쇠), Complex Coordinates System(복소 좌표계), Generalized Modal Analysis(일반화된 모드 해석)

ABSTRACT

The present paper proposes a generalized modal analysis procedure for non-uniform, distributed-parameter rotor-bearing systems. An exact element matrix is derived for a Timoshenko shaft model which contains rotary inertia, shear deformation, gyroscopic effect and internal damping. Complex coordinates system is adopted for the convenience in formulation. A generalized orthogonality condition is provided to make the modal decomposition possible. The generalized modal analysis by using a modal decomposition delivers exact and closed form solutions both for frequency and time responses. Two numerical examples are presented for illustrating the proposed method. The numerical study proves that the proposed method is very efficient and useful for the analysis of distributed-parameter rotor-bearing systems.

1. 서 론

연속체계에 대한 엄밀해는 시스템 특성의 이해에 큰 도움이 되기 때문에 단순 연속체에 대한 엄밀해를 근거로 회전체계의 동특성을 이해하고자 하는 많은 연구가 있어 왔다^(1~5). 그러나 형상과 경계조건이 복잡한 실제 회전체에 대한 해를 구하기 쉽지 않기 때문에 연속체계로서의 해석보다는 이산화 모델을 이용한 해석이 일반화 된 실정이다. 참고문헌

(6)에서는 연속체계에 대한 엄밀한 해석이 가능하도록 일반적인 다단 연속 회전체 베어링 계에 대해 엄밀해를 구할 수 있는 모델링 방법과 직접 해법을 제안하여 그 타당성을 보인 바 있다. 그러나 주파수 영역 해석에 있어서의 직접적인 계산에 국한되었으며 운동방정식이 라플라스 영역에서 표현되므로 직접적인 시간 영역 해석이 불가능하다는 문제점이 있었다. 따라서 고유치 문제 및 고유벡터의 직교성에 근거한 확장정리 적용으로 이어지는 모드 해석 과정 등의 이론적인 보완이 필요하다.

본 논문에서는 기 제안된 엄밀한 모델링 방법을 확장, 보완하여 다단 연속 회전체 베어링 계의 일반적인 해석에 모두 활용할 수 있도록 가장 일반적인

* 정회원, 금오공과대학교 대학원

** 정회원, 금오공과대학교 기계공학부

경우의 모드 해석 및 모드 확장에 의한 주파수 응답 및 시간 응답 계산 방법을 제안하였다. 참고문헌 (6)에서 제안한 회전관성, 자이로 모멘트, 전단변형을 포함한 Timoshenko 축요소의 운동방정식에 추가로 축 내부 점성감쇠 및 구조감쇠 항을 포함시키고 공간좌표에 관한 상태방정식으로 유도하였다. 유도과정의 편의를 위하여 복소좌표계 운동방정식을 이용하였다. 시간 및 공간에 관한 라플라스 변환을 실행한 후 라플라스 영역에서 다시 공간좌표에 관한 라플라스 역변환 과정을 통해 외력과 응답에 관한 엄밀한 관계식을 유도하였다. 회전체 베어링 계의 나머지 두 요소인 베어링 및 강체 디스크의 라플라스 영역 운동방정식과 이미 구해진 축요소의 라플라스 영역 동특성 행렬을 조합하여 라플라스 영역에서 전체 운동방정식을 구축하였다. 일반적인 외력과 비등방성을 고려하기 위해 공역인 운동방정식에 대한 관계식을 동시에 구축하였다.

이와 같이 얻어진 엄밀한 동적 모델은 기존의 일반적인 모드 해석 기법을 활용할 수 없기 때문에 여기서는 라플라스 변수에 대한 다항식 형태로 표현되는 경우에 적용되는 일반화된 고유치 문제 및 관련 정리를 확장하여 새로운 모드 해석 방법을 개발하였다. 모드 해석을 위해 필요한 직교 조건(orthogonality condition)을 유도하였으며 이 직교 조건을 이용하여 주파수 응답 및 시간 응답을 모드 확장에 의해 계산하는 방법을 제안하였다. 한편 제안한 방법에서 직접 제공하지 못하는 절점 사이의 임의 위치 응답을 얻을 수 있는 식을 제안함으로써 연속계에 대한 완전한 해가 될 수 있도록 하였다. 마지막으로 제안한 방법의 타당성과 유용성을 검증하기 위해 두 가지 수치예제를 도입하였다.

2. 회전체계의 모델링

2.1 내부감쇠를 갖는 Timoshenko 축 요소의 모델링

Timoshenko 축 요소에 자이로 효과와 내부 감쇠를 고려하면 복소 좌표계 운동 방정식이 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \phi - \frac{f}{kAG} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{m}{EI_{dm}} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\rho A \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - C_d \left(\frac{\partial p}{\partial t} - j\Omega p \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} = f + \rho I_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - j\Omega \rho I_p \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

여기서, x, p 및 ϕ 는 각각 축방향 좌표 및 복소 횡변위 그리고 복소 회전 변위이고 f, m 은 복소 전단력 및 복소 모멘트이다. 또 ρ, A, G, E, k 는 각각 밀도, 단면적, 전단 강성 계수(shear modulus), 영률(Young's modulus), 단면 형상 보정 계수(shape factor, 사각형 5/6, 원형 9/10), I_p, I_d 는 극면적관성 모멘트와 직경면적관성 모멘트(polar and diametral area moment of inertia), 그리고 Ω 는 회전속도이다. $I_{dm} (= I_d \frac{1-j\epsilon}{\sqrt{1+\epsilon^2}})$ 는 내부구조감쇠를 고려하기 위하여 도입된 수정된 직경면적관성 모멘트이고, C_d 는 점성 내부감쇠계수이다(부록 참조). 위 식을 먼저 시간에 대해 라플라스 변환하고 행렬 형식으로 표현하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = B\Psi \quad (2)$$

$$\Psi(x, s) = \begin{Bmatrix} P \\ \Phi \\ F \\ M \end{Bmatrix}, \quad B(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서 대문자는 소문자 변수에 대한 라플라스 변환 결과식을 의미한다.

단, 행렬 $B(s)$ 에 포함되어 있는 요소는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} a &= \rho I_d s^2 - j\Omega \rho I_p s, & b &= \frac{1}{EI_{dm}}, \\ c &= \rho A s^2 + C_d s - j\Omega C_d, & d &= \frac{1}{kAG} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 s 는 시간변수에 관한 라플라스 변수이다.

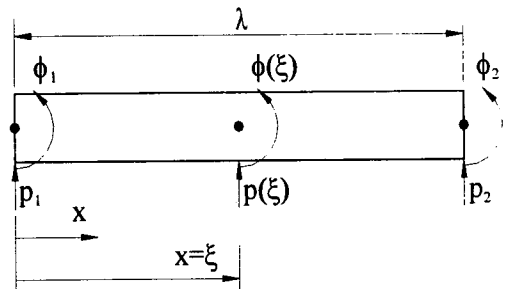


Fig. 1 A uniform shaft element and sign conventions

식 (2)를 공간변수 (x)에 대하여 라플라스 변환한 후 단순화하여 역변환하면 다음 식을 얻는다⁽⁶⁾.

$$\Psi(x, s) = C(x, s)\Psi(0, s) \quad (4)$$

여기서, $C(x, s)$ 는 부록의 식 (A1)과 같이 얻어지게 된다. Fig. 1과 같이 균일한 축 요소에 대해 양 끝 절점 부호를 설정하여 식 (4)에 대입한 후 다시 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다⁽⁶⁾.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F(\xi) \\ M(\xi) \end{Bmatrix} = d^s(\xi) \begin{Bmatrix} P_1 \\ \Phi_1 \\ P(\xi) \\ \Phi(\xi) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서,

$$d^s(\xi) = \begin{bmatrix} d_{11}^s(\xi) & d_{12}^s(\xi) \\ d_{21}^s(\xi) & d_{22}^s(\xi) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{bmatrix} d_1(\xi) & d_2(\xi) & d_4(\xi) & d_5(\xi) \\ d_2(\xi) & d_3(\xi) & -d_5(\xi) & d_6(\xi) \\ d_4(\xi) & -d_5(\xi) & d_1(\xi) & -d_2(\xi) \\ d_5(\xi) & d_6(\xi) & -d_2(\xi) & d_3(\xi) \end{bmatrix}$$

이때,

$$\Delta = \frac{1}{a^2 - \beta^2} \{ 2b(1 - \cosh a\xi \cosh \beta\xi) + \frac{a\beta}{c} \{ \mu^2 + \nu^2 \} \sinh a\xi \sinh \beta\xi \}$$

$$d_1 = \frac{1}{\Delta} \{ -\mu \sinh a\xi \cosh \beta\xi + \nu \sinh \beta\xi \cosh a\xi \}$$

$$d_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{(\beta\mu + \alpha\nu)}{a^2 - \beta^2} \sinh a\xi \sinh \beta\xi - \frac{ab - cd}{a^2 - \beta^2} (1 - \cosh a\xi \cosh \beta\xi) \right\}$$

$$d_3 = \frac{1}{\Delta} \frac{a\beta}{bc} \{ \nu \sinh a\xi \cosh \beta\xi - \mu \sinh \beta\xi \cosh a\xi \}$$

$$d_4 = \frac{1}{\Delta} \{ \mu \sinh a\xi - \nu \sinh \beta\xi \}$$

$$d_5 = \frac{1}{\Delta} \{ \cosh a\xi - \cosh \beta\xi \}$$

$$d_6 = \frac{1}{\Delta} \frac{a\beta}{bc} \{ -\nu \sinh a\xi + \mu \sinh \beta\xi \}$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) + \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) - \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

$$\mu = \frac{(cd - a^2)}{a}, \quad \nu = \frac{(cd - \beta^2)}{\beta}$$

따라서 Fig. 1과 같은 요소에 대해 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = d^s(\ell) \begin{Bmatrix} P_1 \\ \Phi_1 \\ P_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

식 (1)에 대해 공액인 편미분 방정식에 대해 앞에서와 마찬가지로 식을 전개하면 식 (3)에 대응되는 요소는 다음과 같다.

$$\hat{a} = \rho I_d s^2 + j\Omega \rho I_p s, \quad \hat{b} = \bar{b} = \frac{1}{E I_{dm}}, \quad (8)$$

$$\hat{c} = \rho A s^2 + C_d s + j\Omega C_d, \quad \hat{d} = d = \frac{1}{kAG}$$

여기서 ($\hat{\cdot}$)는 공액인 변수에 대한 특성치를 의미한다. 이를 적용하여 다음 식과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{F}(\xi) \\ \hat{M}(\xi) \end{Bmatrix} = \hat{d}^s(\xi) \begin{Bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{\Phi}_1 \\ \hat{P}(\xi) \\ \hat{\Phi}(\xi) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기서

$$\hat{d}^s(\xi) = \begin{bmatrix} \hat{d}_{11}^s(\xi) & \hat{d}_{12}^s(\xi) \\ \hat{d}_{21}^s(\xi) & \hat{d}_{22}^s(\xi) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{d}_1(\xi) & \hat{d}_2(\xi) & \hat{d}_4(\xi) & \hat{d}_5(\xi) \\ \hat{d}_2(\xi) & \hat{d}_3(\xi) & -\hat{d}_5(\xi) & \hat{d}_6(\xi) \\ \hat{d}_4(\xi) & -\hat{d}_5(\xi) & \hat{d}_1(\xi) & -\hat{d}_2(\xi) \\ \hat{d}_5(\xi) & \hat{d}_6(\xi) & -\hat{d}_2(\xi) & \hat{d}_3(\xi) \end{bmatrix}$$

이 때,

$$\hat{a}^2 = \frac{1}{2} \{ (\hat{a}\hat{b} + \hat{c}\hat{d}) + \sqrt{(\hat{a}\hat{b} + \hat{c}\hat{d})^2 - 4(\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} + \hat{b}\hat{c})} \}$$

$$\hat{\beta}^2 = \frac{1}{2} \{ (\hat{a}\hat{b} + \hat{c}\hat{d}) - \sqrt{(\hat{a}\hat{b} + \hat{c}\hat{d})^2 - 4(\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} + \hat{b}\hat{c})} \}$$

로 두고 식 (6)에 변경된 값을 대입하여 식 (10)의 각 요소를 결정할 수 있다.

2.2 요소 내부 표현

식 (5), (7)을 이용하면 축요소 위 임의의 위치에 서의 변위값을 다음 식에서 볼 수 있는 바와 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} P(\xi) \\ \Phi(\xi) \end{Bmatrix} = d_{12}^{-1}(\xi) [d_{11}^s(\ell) - d_{11}^s(\xi) \quad d_{12}^s(\ell)] \begin{Bmatrix} P_1 \\ \Phi_1 \\ P_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

따라서 요소의 양 절점에서의 값을 알면 임의 위치

에서의 값을 오차 없이 결정할 수 있다. 마찬가지로 식 (9)를 이용하여 공액인 변수값을 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\left\{ \begin{matrix} \hat{P}_1(\xi) \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{matrix} \right\} = \{\hat{d}_{12}(\xi)\}^{-1} [\hat{d}_{11}(\ell) - \hat{d}_{11}(\xi) \hat{d}_{12}(\ell)] \left\{ \begin{matrix} \hat{P}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{matrix} \right\} \quad (12)$$

2.3 시스템 행렬의 구성

강체 디스크에 대한 운동 방정식과 이에 공액인 운동방정식을 라플라스 변환 후 정렬하면 다음과 같은 디스크 요소 운동방정식을 얻는다.

$$\begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} = d^d \begin{Bmatrix} P \\ \phi \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \hat{F} \\ \hat{M} \end{Bmatrix} = \hat{d}^d \begin{Bmatrix} \hat{P} \\ \hat{\phi} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서

$$d^d = \begin{bmatrix} m_s s^2 & 0 \\ 0 & J_s s^2 - i\Omega J_{ps} \end{bmatrix}, \quad \hat{d}^d = \begin{bmatrix} m_s s^2 & 0 \\ 0 & J_s s^2 + i\Omega J_{ps} \end{bmatrix}$$

여기서 F, M, P, ϕ 는 각각 f, m, p, ϕ 의 라플라스 변환이며 ($\hat{\quad}$)는 해당 변수의 공액에 대한 라플라스 변환이다. 여기서 m^d, J_s^d, J_p^d 는 각각 디스크 질량, 반경 및 극 질량 관성 모멘트(diametral and polar mass moment of inertia)이다.

한편 베어링 요소에 대한 운동 방정식 및 공액인 운동 방정식으로부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F \\ \hat{F} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_f^b & d_b^b \\ \hat{d}_f^b & \hat{d}_b^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ \hat{P} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

여기서,

$$d_f^b = (c_{fs} + k_f), \quad d_b^b = (c_{bs} + k_b) \\ \hat{d}_f^b = (\bar{c}_{fs} + \bar{k}_f), \quad \hat{d}_b^b = (\bar{c}_{bs} + \bar{k}_b)$$

또

$$2c_f = c_{yy} + c_{zz} - j(c_{yz} - c_{zy}) \\ 2c_b = c_{yy} - c_{zz} + j(c_{yz} + c_{zy}) \\ 2k_f = k_{yy} + k_{zz} - j(k_{yz} - k_{zy}) \\ 2k_b = k_{yy} - k_{zz} + j(k_{yz} + k_{zy})$$

따라서 주어진 회전체에서 축 직경이 균일한 부분을

하나의 요소로 고려하는 이산화한 후 앞에서 얻어진 축요소, 디스크 요소, 베어링 요소의 동특성 행렬을 이용하여 전체 시스템에 대해 s 영역(즉, 시간에 관한 라플라스 변수 영역)에서 합성(assembly)하면 다음의 응답 관계식을 얻는다.

$$\begin{Bmatrix} F \\ \hat{F} \end{Bmatrix} = D(s) \begin{Bmatrix} Q \\ \hat{Q} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

여기서

$$D(s) = \begin{bmatrix} D^s + D^d + D_f^b & D_b^b \\ \hat{D}_b^b & \hat{D}^s + \hat{D}^d + \hat{D}_f^b \end{bmatrix}$$

이며, Q, \hat{Q} 는 각각 전역 좌표 벡터의 라플라스 변환 및 전역 벡터의 공액 벡터에 대한 라플라스 변환이며 F, \hat{F} 는 이에 대응되는 힘 벡터들이다. 또한 $D^i, \hat{D}^i, i=s, d, b$ 로 표현되는 부분 동특성 행렬들은 축요소, 디스크 요소 및 베어링 요소에 대한 요소 행렬을 합성하여 얻어지게 된다.

3. 일반화된 모드 해석

3.1 고유치 문제

식 (15)로 부터 고유치 문제 (eigenvalue problem) 및 그 수반 문제(the adjoint problem)는 다음과 같이 정의된다.

$$D(s)R = 0 \quad (16)$$

$$\{\bar{D}(s)\}^T L = 0 \quad (17)$$

여기서 R 과 L 은 각각 우측 및 좌측 고유벡터를 의미한다. 따라서 고유치는 다음의 식을 만족하는 s 를 결정하여 얻을 수 있다.

$$\det\{D(s)\} = 0 \quad (18)$$

고유치 문제로부터 일반적인 특성을 모두 포함하는 축 대칭 회전체 베어링 계에 대한 엄밀한 고유치를 결정할 수 있다.

3.2 직교 조건 및 모드 확장

$D(s)$ 는 초월함수를 포함하기 때문에 무한히 미분 가능하므로 테일러 급수(Taylor's series expansion)를 이용하여 무한차수의 행렬 다항식(matrix polynomial)으로 전개할 수 있다. 따라서 행렬 다항식에서 적용되는 원리가 적용될 수 있다. 여기서는 참

고문헌 (7)에서 증명된 행렬 다항식에 관한 여러 가지 정리를 활용하도록 한다. 먼저 $D(s)$ 에 대해 증근인 고유치가 없다고 가정하면 구해진 좌측 및 우측 고유벡터는 다음과 같은 직교조건을 만족한다⁽⁷⁾.

$$\overline{L}_i^T (D(s_i) - D(s_k)) R_k = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, \infty \quad (19)$$

한편 각 고유벡터는 다음의 조건을 통해 표준화하면 편리하다.

$$\overline{L}_i^T \left\{ \frac{dD(s)}{ds} \Big|_{s=s_i} \right\} R_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad (20)$$

또한 이와 같이 주어진 직교조건 및 표준화 조건의 결과를 이용하여 다음과 같이 모드 분리식에 의해 표현된 전달함수 행렬을 구할 수 있다⁽⁷⁾.

$$H(s) = \{D(s)\}^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{U_i}{s - s_i} \quad (21)$$

여기서 $H(s)$ 는 전달함수 행렬을 의미하며, U_i 는 다음과 같이 정의된다.

$$U_i = R_i \overline{L}_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad (22)$$

3.3 주파수 영역 해석

식 (21)에서 모든 고유치의 실수부 값이 음수라고 하면, 즉 시스템이 안정하다고 하면 주파수 응답 함수 행렬은 다음과 같이 계산되어 질 수 있다.

$$H(j\omega) = \{D(j\omega)\}^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{U_i}{j\omega - s_i} \quad (23)$$

여기서 ω 는 주파수이다. 이와 같이 계산된 주파수 응답 행렬은 닫힌 꼴(closed form)의 형태를 갖게 되므로 직접 계산 방식에 의해 계산하는 것 보다 큰 장점을 갖게 되지만 궁극적으로 유한개의 항만을 고려해야 하기 때문에 계산오차가 유발될 수 있다.

3.4 시간 영역 해석

식 (21)에 대해 역 라플라스 변환을 수행하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$G(t) = L^{-1} \{ H(s) \} = \sum_{i=1}^{\infty} U_i e^{s_i t}, \quad t \geq 0 \\ = 0, \quad t < 0 \quad (24)$$

따라서 식 (24)를 이용하여 중합적분을 고려하면 일반적인 시간응답을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} q(t) \\ \overline{q}(t) \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) \begin{Bmatrix} f(\tau) \\ \overline{f}(\tau) \end{Bmatrix} d\tau \quad (25)$$

4. 수치예제 및 토의

본 연구에서는 Matlab⁽⁸⁾을 이용하여 일반적인 다단 연속 회전체 베어링 계의 모드 해석 프로그램을 구성하였다. 고유치 문제 식 (18)을 풀기 위해 수정된 축차이분법(modified bisection method)을 이용하였다. 초기치는 직접계산법으로 얻어지는 전달함수의 피크치를 이용하였으며 그 근처를 축차이분법에 의해 조밀하게 탐색하여 고유치를 결정하였다. 제안한 방법 및 개발된 프로그램의 타당성과 응용성을 보이기 위해 다음과 같은 2가지 예제를 제시하였다. 첫 번째 예제는 3개의 디스크를 가진 회전체에 대하여 제안한 방법으로 고유치, 고유벡터를 구하고 그 결과를 유한요소법과 비교하였으며 요소 내부 표현식을 이용하여 엄밀한 고유함수를 그릴 수 있었다. 유한요소법은 Hashish 등⁽⁹⁾이 제안한 식을 이용하였다. 두 번째 예제에서는 다단 연속 회전축으로 이루어진 회전축 계의 동특성 해석 과정을 제시하였다.

4.1 수치 예제 1

본 예제에서 고려한 시스템은 Fig. 2와 Table 1의 사양에 보인 바와 같이 균일 직경의 축과 3개의 강성 디스크로 이루어져 있으며 2개의 동일한 비등방성 베어링으로 지지되는 회전체로서 회전속도는 3,000 rpm으로 하였다. 제안한 방법과 Timoshenko 축요소를 갖는 유한요소법을 이용한 경우에 구해진 하위 10개의 고유치를 Table 2에서 비교하였다. 제안한 방법에서는 균일 직경의 축을 1개 요소로 모델링할 수 있지만 디스크 요소의 특성을 부가하기 위하여 4개의 요소로 축을 모델링하여 엄밀해를 구하였다. 유한요소법에서는 4개, 8개, 12개로 요소의

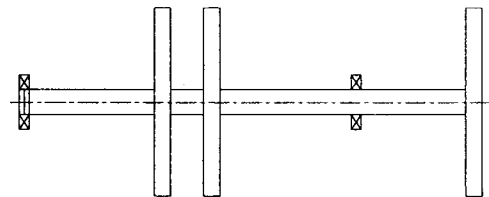


Fig. 2 Numerical model 1

Table 1 Specifications for numerical model 1

Elements	Property	Data
Shaft	Length	1.20 m
	Diameter	4 cm
	Density	8000 kg/m ³
	Young's modulus	2.0x10 ¹¹ N/m ²
Disk (3 identical)	Mass	20 kg
	Polar moment of inertia	0.163 kg-m ²
	Diametral moment of inertia	0.085 kg-m ²
Bearing (2 identical)	Stiffness	$k_{xy} = 20$ MN/m $k_{zz} = 25$ MN/m $k_{yz} = kzy = 0$
	Damping	$c_{yy} = 12$ kNs/m $c_{zz} = 16$ kNs/m $c_{yz} = czy = 0$

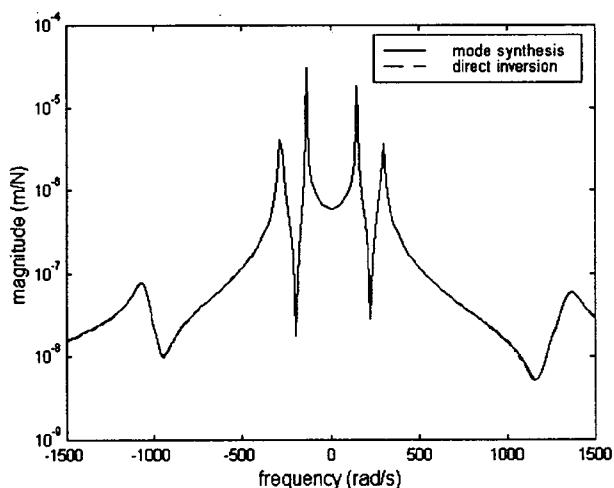


Fig. 3 Comparison of direct driving point FRFs at node 3 for numerical model 1 by the modal synthesis method and the direct computational method

수를 증가시키면서 상태공간에서 고유치를 구하였다. 유한요소수가 늘어날수록 제안된 방법에 의해 계산된 엄밀해에 근접함을 알 수 있다. 고유치의 허수부에 해당하는 고유진동수가 모드에 상관없이 요소수의 증가에 따라 감소하면서 엄밀해에 수렴해가는 반면 실수부는 모드에 따라 수렴 특성이 다소 차이가 나고 있음을 볼 수 있다.

Table 2 Comparison of eigenvalues calculated from the proposed method and FEM for numerical model 1

Mode	eigenvalue $\lambda_k = \sigma_k + j\omega_k$ (rad/s)			
	σ_k/ω_k			
	FEM 4 elements	FEM 8 elements	FEM 12 elements	Proposed 4 elements
1B*	-0.0886/ 134.0959	-0.0886/ 134.0953	-0.0886/ 134.0953	-0.0886/ 134.0953
1F*	-0.1140/ 151.8884	-0.1148/ 151.8873	-0.1148/ 151.8873	-0.1148/ 151.8872
2B	-3.6258/ 279.5419	-3.6256/ 279.5343	-3.6256/ 279.5339	-3.6256/ 279.5338
2F	-4.8179/ 296.6805	-4.8177/ 296.6724	-4.8177/ 296.6720	-4.8177/ 296.6719
3B	-37.9645/ 1063.7127	-37.9779/ 1061.5706	-37.9824/ 1061.4903	-37.9828/ 1061.4732
3F	-54.7912/ 1360.7760	-54.8833/ 1354.7704	-54.9005/ 1354.5500	-54.9019/ 1354.5026
4B	-120.8053/ 1383.6861	-120.7260/ 1382.9560	-120.7320/ 1382.8930	-120.7319/ 1382.8686
4F	-165.5525/ 1962.7868	-166.5999/ 1960.1670	-166.7490/ 1960.0110	-166.7790/ 1959.9398
5B	-70.9276/ 2407.3158	-75.7458/ 2383.5196	-76.0236/ 2382.6317	-76.0729/ 2382.4422
5F	-107.6180/ 2936.7060	-124.1753/ 2879.3000	-125.1764/ 2877.1907	-125.3456/ 2876.7222

*B and F denote the backward and forward modes, respectively.

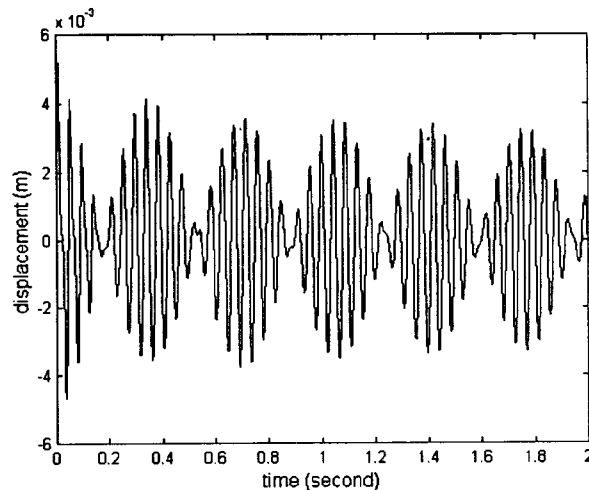


Fig. 4 Impulse response excited and measured at node 3 in the y-direction for numerical model 1

Fig. 3은 구해진 10개의 고유치와 각각의 좌, 우 축 고유벡터를 이용한 모드합성법과 시스템 동강성 행렬에 의한 직접 계산 방법을 통해 얻어진 주파수 응답 계산 결과를 비교한 것이다. 고차모드를 고려

하지 않았지만 모드합성법 결과가 엄밀한 응답함수에 거의 일치하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 4는 식 (24)의 시간영역 응답식을 이용하여 구한 시간영역의 임펄스 응답 함수로서 첫 번째 전방 및 후방 모

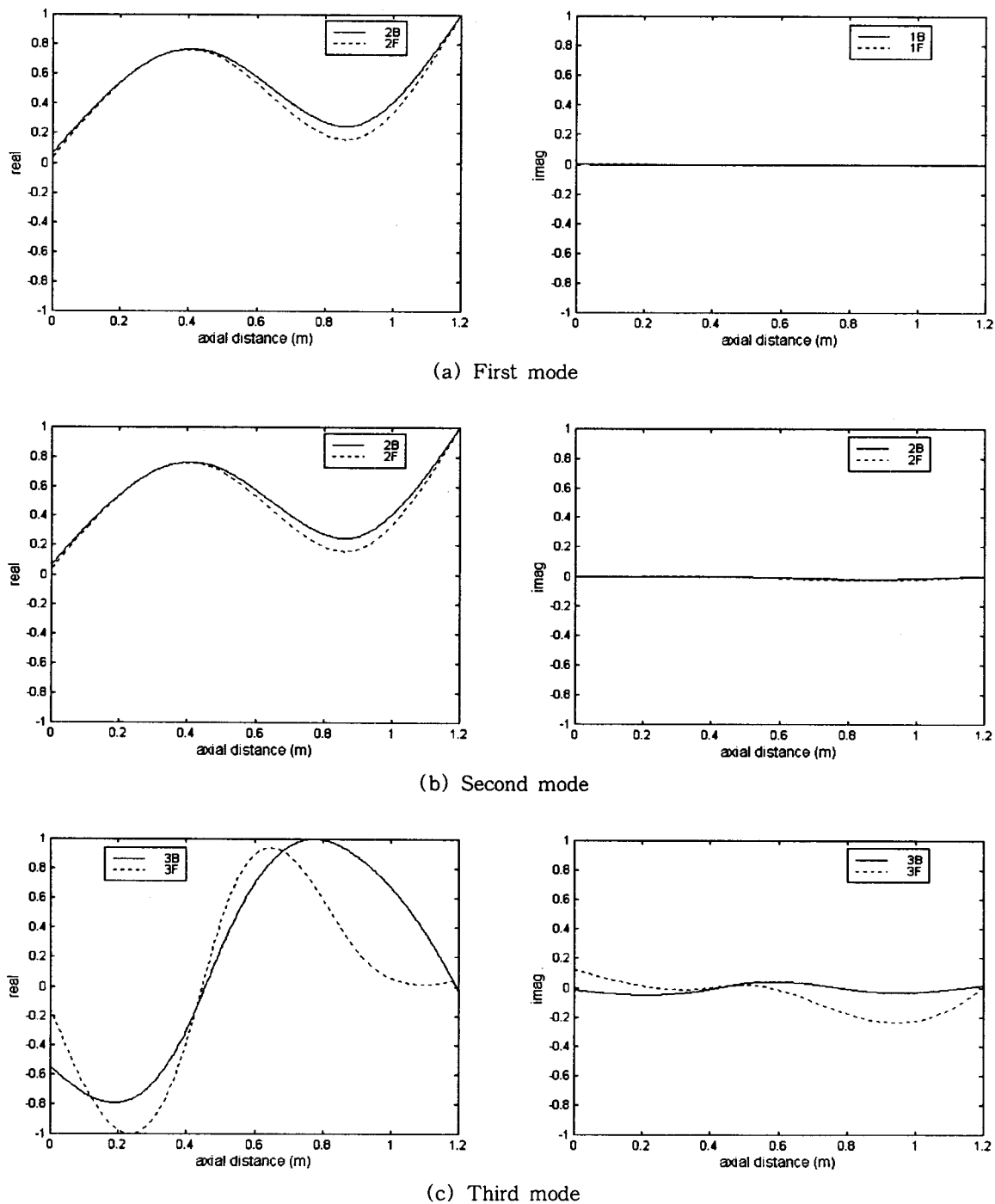


Fig. 5 Mode shape functions of first three modes for numerical model 1

드가 서로 가까이 있으며 감쇠도 작아 공명하는 형태가 지속되고 있음을 확인할 수 있다. 한편 Fig. 5는 고유치 문제에서 얻어진 고유벡터를 식 (11)로 주어진 요소 내부점에서의 관계식에 대입하여 얻어진 우측고유함수이며 여기서는 P 만을 그린 것이다.

4.2 수치 예제 2

제안된 방법의 응용성을 보이기 위해 복잡한 형상의 다단 회전체에 본 방법을 적용하였다. Fig. 6과 Table 3는 본 예제에서 고려한 회전체 베어링 계의 형태와 사양을 보여주고 있다. 이 회전체는 공작기계 주축의 한 예로서 6개의 단이 있는 복잡한 형상을 갖고 있으며 점성내부감쇠 $C_d=0.1$ 과 구조내부

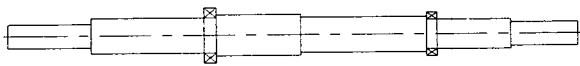


Fig. 6 Numerical model 2

Table 3 Specifications of the numerical model 2

Component	Element no.	Length (cm)	Outer radius (cm)	Inner radius (cm)	eigenvalue $\lambda_k = \sigma_k + j\omega_k$ (rad/s)				
					σ_k/ω_k				Proposed 6 elements
					FEM 6 elements	FEM 12 elements	FEM 18 elements		
Shaft	1	10	2	0.0					
	2	15	3	0.0					
	3	10	3.5	0.0					
	4	15	3	0.0					
	5	10	2.5	0.0					
	6	8	2	0.0					
Bearing	C_{yy} (Ns/m)	C_{yz} (Ns/m)	C_{zy} (Ns/m)	C_{zz} (Ns/m)	Node				
	600	0	0	600	3				
	600	0	0	600	5				
	K_{yy} (N/m)	K_{yz} (N/m)	K_{zy} (N/m)	K_{zz} (N/m)	Node				
	6×10^8	0	0	8×10^8	3				
	4×10^8	0	0	6×10^8	5				
Density (kg/m ³)	Young's Modulus (N/m ²)			Shear Modulus (N/m ²)					
7833	2.08×10^{11}			0.8×10^{11}					

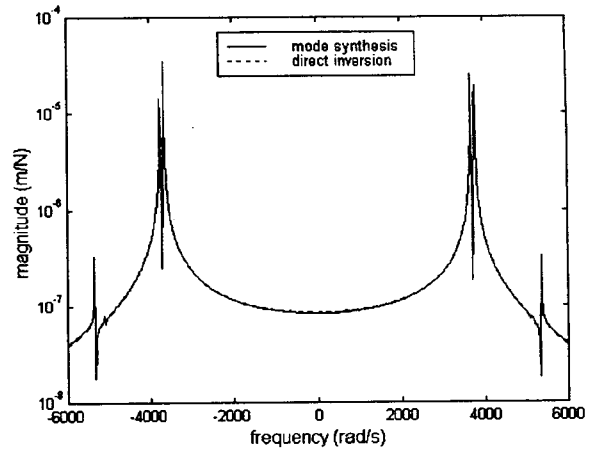


Fig. 7 Comparison of direct driving point FRFs at node 1 for numerical model 2 by the modal synthesis method and the direct computation method

Table 4 Comparison of eigenvalues calculated from the proposed method and FEM for numerical model 2

Mode	eigenvalue $\lambda_k = \sigma_k + j\omega_k$ (rad/s)			
	σ_k/ω_k			Proposed 6 elements
1B*	-1.7076/ 3676.2311	-1.7027/ 3672.6750	-1.7020/ 3672.1558	-1.6625/ 3671.7610
1F*	-0.5020/ 3770.3252	-0.5010/ 3766.5974	-0.5008/ 3766.0487	-0.4613/ 3765.6539
2B	-5.3197/ 5104.2927	-5.3008/ 5099.8885	-5.2980/ 5099.2028	-5.2585/ 5098.6502
2F	-2.9155/ 5356.8946	-2.9025/ 5351.7026	-2.9006/ 5350.9012	-2.8611/ 5350.3486
3B	-36.8295/ 8910.5892	-35.7354/ 8842.6686	-35.5929/ 8833.7407	-35.4744/ 8832.2407
3F	-30.9599/ 10098.8058	-29.8093/ 10001.2297	-29.6594/ 9988.4091	-29.5410/ 9986.9091
4B	-44.5766/ 14088.7319	-40.8906/ 13837.0696	-40.4649/ 13805.1717	-40.1886/ 13803.6717
4F	-32.7512/ 14971.4778	-29.9179/ 14660.4993	-29.5782/ 14621.6326	-29.3809/ 14620.1326
5B	-55.3516/ 19393.4815	-53.2003/ 19109.6453	-52.6840/ 19052.5540	-52.3287/ 19051.0540
5F	-64.1014/ 20403.3769	-60.0664/ 20082.0603	-59.3626/ 20017.4740	-58.7705/ 20015.9740

*B and F denote the backward and forward modes, respectively.

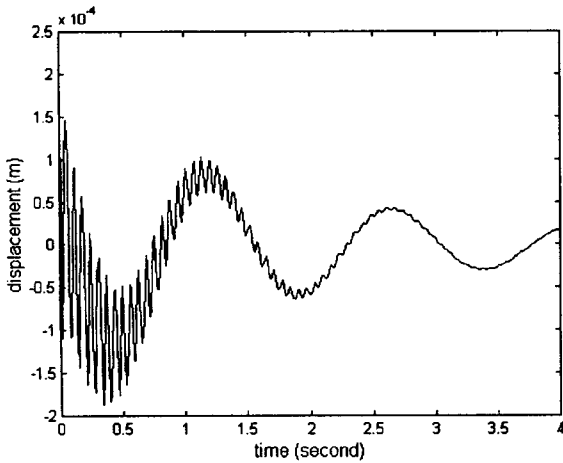


Fig. 8 Impulse response excited and measured at node 1 in the y direction for numerical model 2

감쇠 $\epsilon=0.001$ 이 포함되었다. Table 4는 6,000 rpm으로 회전하는 경우에 제안된 방법과 유한요소법으로 계산한 고유치를 비교한 것이다. 앞의 예제에 비하여 유한요소법에 의한 결과의 오차가 약간 크지만 요소의 수를 증가시키에 따라 제안된 방법의 결과에 수렴함을 알 수 있다. Fig. 7에서는 모드합성법과 직접계산법에 의해 계산된 주파수 응답 함수를 비교해서 보여 주고 있다. 10개의 모드를 합성하였으며 앞의 예제와 마찬가지로 직접 계산에 의한 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig. 8은 충격응답 함수로서 초기에는 저차와 고차 모드가 결합되어 나타나고 있지만 고차 모드의 감쇠가 비교적 커서 빠른 속도로 응답이 소멸하여 1차 모드의 효과만이 잔류하고 있음을 볼 수 있다.

5. 요약 및 결론

본 논문에서는 일반적인 다단 연속 회전체 베어링 계에 대해 엄밀해를 얻을 수 있는 일반화된 모드 해석 및 모드 확장에 의한 주파수 응답 및 시간 응답 계산 방법을 제안하였다. 회전관성, 자이로 모멘트, 전단변형을 포함한 Timoshenko 축요소의 운동방정식에 축 내부 점성감쇠 및 구조감쇠 항을 포함시킨 가장 일반적인 경우의 엄밀한 관계식을 유도하였다. 또한 절점에서의 값을 이용하여 절점 사이의 임의 위치에서의 응답을 계산할 수 있는 관계식도 유도하였다. 제안된 모델을 이용한 일반적인 모드 해석 방법을 제안하였으며 이를 이용하여 모든 동특성 및

응답을 계산할 수 있음을 보였다. 제안된 방법은 일반적인 회전체 베어링 계의 엄밀해를 필요로 하는 해석 분야에서 효과적으로 활용될 수 있을 것으로 기대된다. 또한 계 내의 균일 형상을 한 개의 요소로 모델링 하여도 에러를 유발하지 않게 되므로 설계나 진단 등의 실용적인 분야에서도 큰 활용가치가 있을 것으로 기대된다.

후 기

본 연구는 1998년 한국학술진흥재단 자유공모과제 결과의 일부이며 재단의 연구비 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Dimentberg, F.M., 1961, Flexural Vibrations of Rotating Shafts, London, Butterworth.
- (2) Lee, C.W., 1993, Vibration Analysis of Rotors, Kluwers Publishing Co.
- (3) Lee, C.W. and Jei, Y.G., 1988, "Modal Analysis of Continuous Rotor-Bearing Systems," Journal of Sound and Vibration, Vol. 126, No. 2, pp. 345~361.
- (4) Eshleman R.L. and Eubanks, R.A., 1969, "On the Critical Speed of Continuous Rotor," ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol. 91, pp. 1180~1188.
- (5) Meirovitch, L. and Silverberg, L.M., 1985, "Control of Non-Self-Adjoint Distributed-Parameter Systems," Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 47, pp. 77~90.
- (6) 박종혁, 홍성욱, 1999, "다단 회전체 베어링계를 위한 엄밀한 동적 해석 방법," 대한기계학회 논문집 A, 제 23 권, 제 2 호, pp. 254~263.
- (7) Lancaster, P., 1966, Lambda-Matrices and Vibrating Systems, Pergamon Press.
- (8) 1992, Matlab User's Guide, The Math-Works, Inc.
- (9) Hashish, E. and Sankar, T.S., 1984, "Finite Element and Modal Analyses of Rotor-Bearing Systems under Stochastic Loading Conditions," ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 106, pp. 80~89.

