

< 논 문 >

압축된 고무재료의 정적 변형 해석과 동특성 예측

Static Deformation Analysis and Dynamic Characteristics Prediction of Compressed Rubber Materials

김 국 원* · 임 중 락** · 손 희 기** · 안 태 길***

Kug Weon Kim, Jong Rak Lim, Heui Gi Son and Tae-Kil Ahn

(1998년 11월 3일 접수 ; 1999년 4월 27일 심사완료)

Key Words : Compressed Rubber Material(압축된 고무재료), Finite Element Method(유한요소법), Static Deformation(정적변형), Dynamic Characteristic(동특성)

ABSTRACT

The effect of static preload on the dynamic properties of rubber materials is rather important, especially when good isolation characteristics are required at high frequencies. However, there are still few papers for dynamic characteristics of compressed rubber components. It was demonstrated in reference (4) that for bonded rubber material of a cylindrical shape, a simplified theory equation between linear dynamic and nonlinear static behavior of rubber material was useful to predict their combined effects. This paper presents the second part of the study. It is confirmed that for the compressed rubber material, the stress can be factored into a function of frequency and a function of strain(stretch). The finite element method is applied to analyze non-linear large deformation of rubber material and its results are compared with those of a simplified theory equation. The predicted dynamic material properties based on non-linear static finite element analyses have a good agreement of experimental results and those based on simplified theory equation.

1. 서 론

고무재료의 물성치는 여러 요인에 의해 영향을 받는데, 보통 온도와 주파수 의존성이 높으므로 주로 이들에 관한 연구가 중점적으로 이루어져 왔다⁽¹⁻³⁾. 그러나 대부분의 고무부품의 설계에 있어서는 지지하고 있는 시스템의 무게에 의해 또는 의도적으로

가해지는, 압축하중에 따라 고무부품의 강성이 변화되므로 이의 영향을 고려하는 일이 매우 중요하다. 지난 수십 년 동안 고무부품 설계에 대해 실험적으로나 이론적으로 많은 노력이 이루어져 왔으나, 아직까지 압축된 고무재료에 대한 연구내용은 그리 많지 않다. 실제로 고무부품에는 압축하중이 많이 적용되는데, 진동, 충격, 소음제어, 동력전달부품 등이 그러하고, 이는 압축된 고무부품이 전단하중을 받는 부품에 비교해서 훨씬 높은 유효탄성계수와 허용응력을 보이기 때문이다.

저자의 이전 연구⁽⁴⁾에서는 압축하중을 받는 고무의 동적 물성치 특성에 대하여 실험을 통한 분석과

* 정회원, 천안공업대학 용접기술과

** LG전자 디지털미디어 연구소

*** 정회원, 호서대학교 기계공학과

파수 함수와 변형률(신장률) 함수의 곱으로 분리할 수 있다는 가정이다. 본 연구에서는 이 가정의 타당성을 더욱 심도있게 분석하기 위해 고무의 정적 변형을 유한요소법을 이용하여 계산하였다. 공학 전 분야에서 다양한 문제 해석의 도구로 사용되고 있는 유한요소법은 최근 고무부품의 기계적 특성 분석에도 활발히 이용되고 있다⁽⁵⁾. 유한요소법을 이용함으로써 고무의 양 끝단 경계조건(접착)을 비교적 정확히 고려할 수 있으며, 보다 정확한 압축변형 거동을 묘사할 수 있다. 유한요소해석 결과를 바탕으로 동적 물성치를 예측하였으며, 이전 연구에서의 실험 및 단순화된 이론식의 결과와 비교, 검토하였다.

2. 압축된 고무의 정적거동 해석

2.1 단순화된 이론적 수식

고무재료의 거동을 예측하기 위해서 사용되는 방법중의 하나는 변형률에너지 함수, U 의 개념을 이용하는 것이다. 이 경우 고무재료는 초탄성, 등방성, 비압축성이라 가정한다. 일반적으로 변형률에너지 함수는 다음과 같은 다항함수 형태로 가정한다.

$$U = \sum_{i+j=1}^N C_{ij}(I_1-3)^i(I_2-3)^j \quad (1)$$

여기서 N 은 에너지 함수의 차수이며, C_{ij} 는 실험으로부터 결정되어지는 재료상수이다. 가장 많이 사용되는 형태는 Mooney-Rivlin 모델($N=2$)이다.

$$U = C_1(I_1-3) + C_2(I_2-3) \quad (2)$$

Mooney-Rivlin 모델은 150% 변형률까지는 실제 거동을 잘 묘사한다고 알려져 있다. 본 연구에서 고찰하는 고무재료는 부틸계 경도 40, 50, 60의 고무들이며 인장시험결과로 계산되는 Mooney-Rivlin 재료상수는 Table 1과 같다⁽⁴⁾.

Cauchy 응력텐서 T 는 변형률에너지 함수를 변형률에 대해 편미분한 것으로 정의할 수 있다⁽⁶⁾.

Table 1 Mooney-Rivlin model material constant
[unit : N/m²]

Hardness	Material constants
Duro 40	$C_1 = 1.34 \times 10^5, C_2 = 8.73 \times 10^4$
Duro 50	$C_1 = 2.31 \times 10^5, C_2 = 4.83 \times 10^4$
Duro 60	$C_1 = 2.73 \times 10^5, C_2 = 1.57 \times 10^5$

$$T = 2 \left(\frac{\partial U}{\partial I_1} B - \frac{\partial U}{\partial I_2} B^{-1} \right) - p I \quad (3)$$

여기서 P 는 정압을 나타낸다. 단축인장의 경우, 식 (3)에서 $T_2 = T_3 = 0$ 이며, 주신장률도 비압축성조건에 의하면, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$ 의 관계식이 성립한다. 따라서 응력 σ 와 신장률 λ 사이에는 다음의 관계식이 성립한다.

$$\sigma = 2(\lambda - \lambda^{-2})(C_1\lambda + C_2) \quad (4)$$

탄성계수는 신장률에 대해 다음 식으로 정의된다.

$$E(\lambda) = \lambda \frac{d\sigma}{d\lambda} \quad (5)$$

따라서 고무의 탄성계수는 다음과 같이 표현된다.

$$E(\lambda) = [C_1 F_1(\lambda) + C_2 F_2(\lambda)] \quad (6)$$

$$F_1(\lambda) = 2 \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda} \right), \quad (7)$$

$$F_2(\lambda) = 2 \left(\lambda + \frac{2}{\lambda^2} \right)$$

실제 사용되는 탄성계수는 공칭응력에 대한 값이며, '공칭응력 = 진응력/신장률'의 관계가 성립하므로 식 (6)의 우변을 신장률을 나누어 주어야 한다. 또한 압축되는 원통형 고무시편의 양 끝단이 접착제로 완전히 고정되었기 때문에 형상계수, S 의 영향이 고려되어야 한다. 고무와 금속이 붙어있고 접촉 단면적이 원형일 때 탄성계수와 형상계수사이의 다음의 관계식이 알려져 있다⁽⁷⁾.

$$E_c = E(1 + 2S^2) \quad (8)$$

여기서 E_c 는 양 끝단 고정이 고려된 겉보기 탄성계수이고, 형상계수 S 는 원통형의 경우 $d/4H$ 이다. 여기서 d 는 직경, H 는 높이를 나타낸다.

따라서 최종적으로, 양 끝단 고정의 영향이 고려되어 얻어지는 고무의 겉보기 탄성계수는 실제 탄성계수와 다음의 관계식을 보인다.

$$E_c = (1 + 2S^2) \frac{1}{\lambda} E(\lambda) \quad (9)$$

2.2 유한요소해석

앞 절의 내용은 고무가 변형될 때, 순수히 일축 응력만이 존재한다고 가정한 경우이다. 그러나 고무의 양 끝단이 고정된 상태에서는 이러한 가정은 엄밀히 보아 성립될 수 없다. 비록 양 끝단 고정의 영

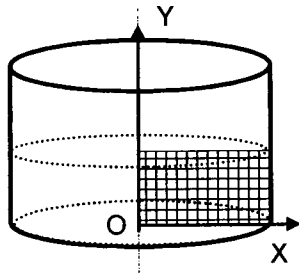
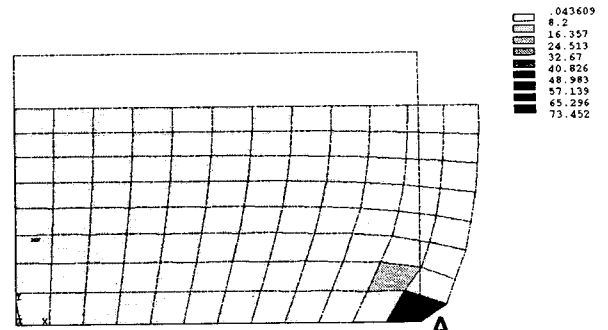


Fig. 1 Cylindrical rubber specimen

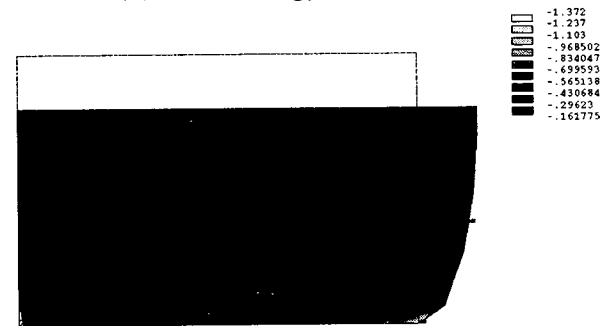
항을 형상계수의 고려로 보상하고 있지만, 이는 단순히 양 끝단 자유와 양 끝단 고정의 경계조건 차이를 보상하는 수식일 뿐 고무의 내부 응력상태에 대해서는 여전히 정확하게 고려하지 못한다. 본 절에서는 상용 유한요소해석 프로그램인 ANSYS⁽⁸⁾를 이용하여 원통형 고무시편의 형상 모델링을 수행하고 끝단 고정의 경계조건을 부과하여 압축시 고무시편의 응력상태를 살펴보았다.

해석은 Duro 40, 50, 60 각각의 원통형 고무시편에 대해 압축률 20%까지의 해석을 수행하여 변위 하중에 대한 양끝단의 반력을 계산하고 이에 따른 각 압축률에서의 강성을 계산하게 된다. 계산된 강성값을 고무의 초기 단면적으로 나누면 겉보기 탄성계수값을 구할 수 있다. 원통형 고무시편의 모델링은 Fig. 1에 보이는 바와 같이 형상 및 하중의 대칭성 덕분에 축대칭 및 1/2 형상만 모델링 하였다. 사용된 요소는 ANSYS에서 제공하는 HYPER 56이며, 이 요소는 Mooney-Rivlin 재료 모델의 해석 전용 요소이다. 사용된 요소의 수는 96개이며, 포아송비는 0.499의 값을 사용하였다.

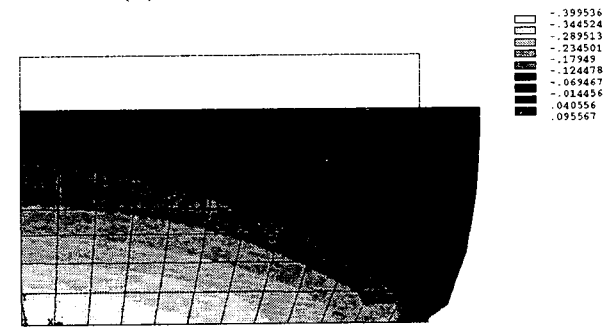
Fig. 2(a), (b), (c)는 Duro 40 고무의 압축률 20%인 경우에 대해 각각 변형률 에너지 분포, 축방향 응력분포, 반경방향 응력분포를 나타낸다. 변형률 에너지의 경우 대부분의 영역에서 일정한 값을 보이지만, 양 끝단이 고정되었기 때문에 끝단 경계부(그림에서 A부분)에서 변형률에너지가 매우 높으며, 집중되어 있음을 알 수 있다. 축방향 응력분포의 경우 고무시편 전 영역에서 압축응력을 보이고 있으며, 특히 끝단 고정의 영향으로 끝단 경계부에서 가장 큰 압축응력을 보이고 있다. 반경방향 응력분포의 경우 끝단 중심으로 압축응력이 증가하며, 고무시편의 중간 바깥쪽에서는 약한 인장응력을 나타낸다. 또한 끝단 경계부에서 가장 큰 인장응력을 보이고 있다. 따라서 고무시편의 양 끝단 경계부분에서는



(a) Strain energy [unit : Nmm]



(b) Axial stress [unit : N/mm²]



(c) Radial stress [unit : N/mm²]

Fig. 2 Finite element analysis at 20% compressed strain state of Duro 40 rubber specimen

축방향으로 가장 큰 압축응력, 반경방향으로 가장 큰 인장응력을 나타내며, 에너지가 집중되는 부분이다. 일반적으로 고무의 파손은 다른 물체와의 접촉된 부분의 경계면에서 종종 발생하는데, 이는 본 해석결과에서 나타난 바와 같이 이 부분에서 에너지가 집중되고 인장응력이 발생하기 때문이다.

3. 압축된 고무의 동특성 예측

3.1 정적 변형과 동적 물성치와의 관계

고무부품이 정적변형상태에서 작은 진폭의 동적하중이 부가될 때, 고무재료의 응력은 주파수 함수와 변형률 함수로 분리할 수 있다고 가정한다⁽⁹⁾.

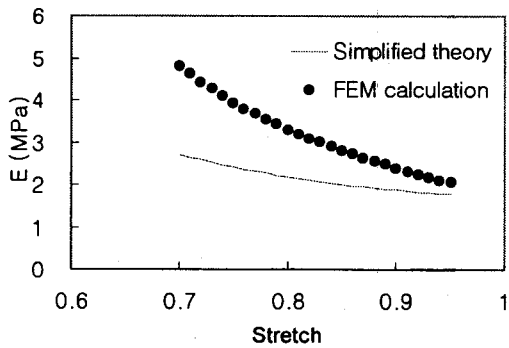


Fig. 3 Elastic modulus variations of simplified theory and FEM calculation for Duro 40 rubber

$$\sigma(\omega, \lambda) = F(\lambda)G(\omega) \quad (10)$$

앞 절의 이론적 수식을 따라, 공칭응력에 대한 겔보기 저장탄성계수는 최종 다음과 같이 표현될 수 있다.

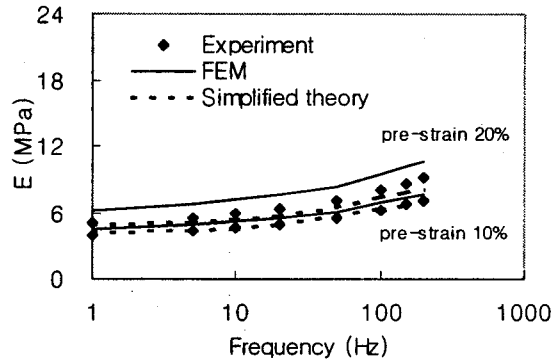
$$E(\omega, \lambda) = E_c \cdot G(\omega) \quad (11)$$

유한요소해석을 이용할 경우, 각 신장률에 대한 반력의 값을 계산한 후 얻고자 하는 변형을 부근의 미소신장률에 대한 반력의 변화를 계산하고 이를 초기 단면적으로 나눔으로써 탄성계수(또는 강성, E_c)를 얻을 수 있다.

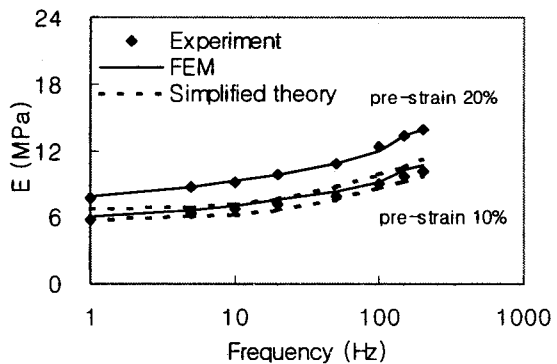
Fig. 3은 신장률의 변화에 따른 겔보기 탄성계수를 이론적 수식[식 (9)]과 유한요소해석에 의한 결과를 비교한 그림이다. 관심있는 신장률은 0.7에서 0.95사이인 압축영역이다. 그림에서 알 수 있듯이 고무의 압축이 증가하면 이론적 수식[식 (9)]과 유한요소해석 모두 겔보기 탄성계수값이 증가하는 결과를 보인다. 그러나 유한요소해석의 결과가 이론적 수식에 비해 더욱 큰 값을 보이며, 압축이 증가할수록(즉, 신장률이 감소할수록) 그 차이는 더욱 커짐을 알 수 있다.

3.2 실험치와의 비교

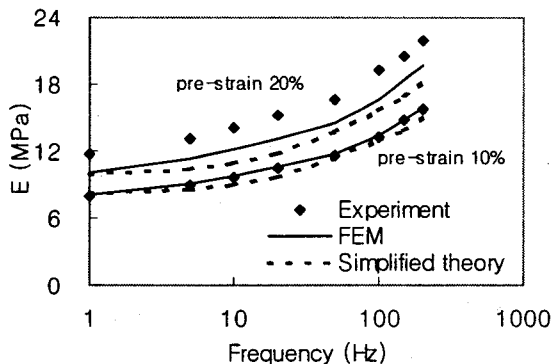
본 절에서는 압축된 고무의 동적 물성치에 대한 이론식[식 (10)]의 타당성을 검토하였다. 이전의 연구⁽⁴⁾에서 수행한 압축된 상태에서의 고무시편의 동적 물성치에 대한 실험자료를 근거로, 이론적 수식 및 유한요소해석에 근거한 계산결과를 비교하였다. 기준되는 동특성 자료는 5% 압축에서의 주파수 변화에 따른 탄성계수값들이며, 이를 이용하여 10%, 20% 압축에서의 주파수 의존 탄성계수값들을 계산하였다.



(a) Duro 40



(b) Duro 50



(c) Duro 60

Fig. 4 Comparison of simplified theory⁽⁴⁾ and finite element method for predicting elastic modulus of compressed

Fig. 4의 (a), (b), (c)는 각각 Duro 40, 50, 60의 고무시편에 대해 10%, 20% 압축상태에서의 주파수 의존 탄성계수값들을 계산한 결과들이다. 앞절에서의 비선형 정적거동시 탄성계수값을 계산한 결과(Fig. 3참조)에서 예측되듯이 유한요소법을 이용해 계산된 결과는 단순화된 이론식보다 약간씩 큰 값들을 보이고 있다. 따라서 단순화된 이론식으로는 실

험값에 비해 훨씬 작은 값을 예측하는 Duro 50, 60 고무시편에 대해서, 유한요소법을 이용한 결과가 더욱 높은 정확성을 가진다. 그러나 이론식으로 비교적 정확한 예측이 가능하였던 Duro 40에 대해서는 유한요소법을 이용한 결과가 더욱 큰 오차를 보이고 있다. 또한 모든 그림에서 1 Hz부근에서 실험값과 계산값(이론식 및 유한요소해석)이 잘 일치하는 경우, 고려된 전 주파수에서 계산값은 실험값을 잘 표현하고 있음을 알 수 있다. 따라서 압축된 고무의 동적 물성치 예측은 무엇보다도 압축된 정적 상태의 탄성계수를 정확히 계산하는 것이 가장 중요함을 알 수 있다. 결론적으로 이론식을 이용한 경우와 유한요소법을 이용한 경우 모두 주파수에 대한 변화정도는 잘 나타내고 있다고 보여지며, 이는 압축된 고무의 동특성을 예측할 때, 정적변형과 동적물성치와의 가정된 관계식[식 (10)]이 본 연구에서 수행한 실험조건(압축률 20%까지, 동적 진폭 10%)에서는 충분히 이용될 수 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는, 정적상태에서의 신장률에 대한 고무의 탄성계수의 변화와 주파수에 따른 고무의 탄성계수 변화는 서로 독립적이라는 가정에 성립하는 식 (10)의 타당성을 검토하였다. 3가지 정도의 고무에 대하여 5% 압축된 실험결과를 이용하여 10%, 20% 압축된 고무의 동적 물성치를 추정하였으며, 그 결과 식 (10)의 타당성을 확인할 수 있었다. 비선형 정적 거동을 계산함에 있어서 유한요소해석의 결과가 이론식에 비해 더욱 큰 결보기 탄성계수값을 보였으며, 압축정도가 심해질수록 더욱 그러하였다. 이러한 특성의 차이로 전반적으로 고무의 동특성 추정에 있어서 유한요소법을 이용한 결과가 이론식에 비해 더욱 적합한 결과를 보였다. 실제 사용하는 고무부품의 경우, 본 연구에서처럼 단순한 원통형이 아니라 복잡한 형상임을 감안할 때, 정적인 거동은 유한요소법을 이용하고 동적인 거동은 한번의 동특성 실험을 수행함으로써 효과적인 설계를 이룰 수

있다고 생각된다.

참 고 문 헌

- (1) Jones, D. I. G., 1974, "Temperature-Frequency Dependence of Dynamic Properties of Damping Materials", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 33, No. 4, pp. 451~470.
- (2) Oyadiji, S. O. and Tomlinson, G. R., 1985, "Determination of the Complex Moduli of Viscoelastic Structural Elements by Resonance and Non-Resonance Methods", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 101, pp. 277~298.
- (3) Ahn, T. K. and Kim, K. J., 1994, "Sensitivity Analysis for Estimation of Complex Modulus of Viscoelastic Materials by Non-Resonance Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 176, No. 4, pp. 543~562.
- (4) 김국원, 임종락, 한용희, 손희기, 안태길, 1998, "압축하중을 받는 방진고무의 동특성 해석 및 실험", *한국소음진동공학회지* 제 8권 제 5호, pp. 900~907.
- (5) Morman, K. N. and Pan, T. Y., 1988, "Application of Finite Element Analysis in the Design of Application Elastomer Components", *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 61, pp. 503~533.
- (6) Treloar, L. R. G., 1975, *The Physics of Rubber Elasticity*, 3d Ed., Clarendon, Oxford.
- (7) Lindley, P. B., 1966, "Load-Compression Relationships of Rubber Units", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 1, No. 3, pp. 190~195.
- (8) ANSYS, Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, PA
- (9) Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., 1985, *Vibration Damping*, John Wiley & Son.