

< 논 문 >

유니버설 조인트에 의해 구동되는 회전축의 횡진동과 비틀림진동의 연성진동

- 운동방정식의 유도 및 안정성해석 -

Coupled Vibration of Lateral and Torsional Vibrations in a Rotating Shaft Driven through a Universal Joint

- Derivation of Equations of Motion and Stability Analysis -

김 정 렬* · 전 승 환** · 이 돈 출***

J. R. Kim, S. H. Jun and D. C. Lee

(1998년 11월 12일 접수 ; 1999년 5월 6일 심사완료)

Key words : Vibration of Rotating Body(회전체 진동), Universal Joint(유니버설 조인트), Asymptotic Method(점근법), Unstable Region(불안정 영역), Growth Factor(성장계수)

ABSTRACT

This paper presents theoretical analyses for unstable vibrations caused by the couple of bending and torsion in a rotating shaft driven through a universal joint. A driving shaft is assumed to be rigid and to rotate with a constant angular velocity. The driven shaft system consists of a flexible shaft with a circular section and a symmetrical rotor attached at a point between the shaft ends. Equations of motion derived hold with an accuracy of the second order of shaft deformations, and are analyzed by the asymptotic method. The vibrations become unstable when the driving shaft rotates with the angular velocity to be approximately equal to half of the sum of the natural frequencies for whirling and torsional vibrations.

기 호 설 명

c_1, c_2, c_3 : 점성마찰계수
 I : 직경관성 모멘트
 I_p : 극관성 모멘트
 l : 종동축 길이
 m : 회전체 질량
 p : 고유각 진동수

t : 시간
 θ_a : 종동축 회전각
 ψ : 구동축 회전각
 α_a : 유니버설 조인트 엇각
 $\alpha, \delta, \gamma, \delta_t$: 강성계수
 τ : 무차원 시간
 ω : 구동축 각속도

1. 서 론

구동축과 어떤 각을 가지고 설치되어 있는 축(중

* 정회원, 한국해양대학교 기관시스템공학부

** 한국해양대학교 해사수송과학부

*** 정회원, 목포해양대학교 기관공학부

동축)을 구동할 때, 그 접속부분에 유니버설 조인트(이하 조인트라고도 한다)가 종종 사용되어진다. 이러한 유니버설 조인트에 의해 구동되는 회전축을 대상으로, 횡진동의 불안정성에 대해서는 Wehrli의 연구⁽¹⁾, 西郷의 연구⁽²⁾, 비틀림진동의 불안정성에 대해서는 Zeman의 연구⁽³⁾ 등이 있다.

유니버설 조인트에 의해 구동되는 회전축의 경우, 구동축이 일정한 각속도로 회전하여도 조인트의 종동축 요크에는 조인트의 엇각(joint angle)에 의해서 정해지는 각속도 변동이 발생한다. 이 각속도 변동분은 종동축의 비틀림진동에 영향을 미치고, 게다가 그 축의 회전에 대한 부하 토크에 의해 조인트 부분에 2차 모멘트⁽⁴⁾를 유발시킨다. 그 힘의 모멘트는 종동축에 대해 횡진동을 일으키는 원인이 되고, 또한 발생한 횡진동은 조인트의 엇각을 변화시켜 비틀림진동에 영향을 미친다. 따라서 종동축에는 횡진동과 비틀림진동의 연성에 의해 불안정진동이 발생할 가능성이 있다.

본 논문에서는 축의 처짐을 고려한 횡진동 및 비틀림진동에 관한 운동방정식을 유도하고, Kryloff-Bogoliubov의 점근법(asymptotic method)⁽⁵⁾을 이용하여 운동방정식의 근사해를 구해서 종동축의 안정성을 조사하였다. 그 결과, 구동축의 회전속도가 종동축의 횡진동에 관한 고유진동수와 비틀림진동에 관한 고유진동수의 산술평균치에 일치하는 부근에서 불안정진동이 발생하는 것을 확인하였다.

2. 운동방정식

Fig. 1에 보이는 바와 같이 양단 A, B에서 지지되어 있는 원형단면의 탄성축(종동축)을 생각한다. 탄성축의 점 S에는 대칭회전체 D가 설치되어 있다. 또한, 축의 분포질량은 무시하고, 초기속도가 없

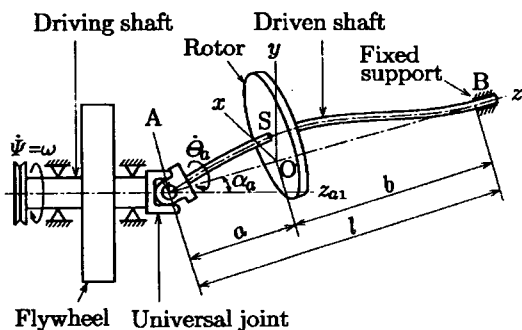


Fig. 1 Rotor-shaft and coordinate systems

는 축으로 가정한다. 점 A에서는 조인트에 의한 z축방향의 모멘트와 z축에 수직인 방향의 모멘트(2차모멘트)가 작용하고, AS사이의 축에는 처짐과 비틀림이 동시에 발생하는 것으로 한다. 강성구동축의 축심을 Az_{a1} , 처짐이 발생하지 않을 때의 종동축의 축심을 Az 라 하고, 이들 두 축심은 조인트의 중심 A에서 엇각 α_a 로서 교차하고 있는 것으로 한다. 정지직교좌표계 $O-xyz$ 의 xy 평면은 축이 미소진동할 때 점 S의 운동면과 일치한다.

탄성축 Az 에 대해 재료역학 및 탄성학의 이론⁽⁶⁾으로부터 축의 처짐, 처짐각, 비틀림각을 축에 작용하는 힘 및 모멘트에 대해서 구한다음, 오일러 운동방정식에 적용하여 회전체 D의 병진운동 x, y , 경사운동 θ_x, θ_y 및 회전운동 θ_t 에 관한 운동방정식을 구하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + c_1\dot{x} + ax + \gamma\theta_x &= F_x \\
 m\ddot{y} + c_1\dot{y} + ay + \gamma\theta_y &= F_y \\
 I\ddot{\theta}_x + c_2\dot{\theta}_x + I_p\ddot{\theta}_y(\dot{\theta}_a + \dot{\theta}_t) \\
 + \delta\theta_x + \gamma x &= M_x \\
 I\ddot{\theta}_y + c_2\dot{\theta}_y - I_p\ddot{\theta}_x(\dot{\theta}_a + \dot{\theta}_t) \\
 + \delta\theta_y + \gamma y &= M_y \\
 I_p\ddot{\theta}_t + c_3(\dot{\theta}_a + \dot{\theta}_t) + \delta_t\theta_t &= M_t
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, α, δ, γ 는 각각 회전체의 병진운동, 경사운동 및 이들의 연성에 관한 강성계수, δ_t 는 비틀림진동에 관한 축의 강성계수이다. 또한 c_1, c_2, c_3 는 회전체의 병진운동, 경사운동, 극축 둘레의 회전운동에 대한 점성마찰계수이고, 도트기호는 시간 t 에 관한 미분을 의미한다.

점 A에 있어서의 축의 회전속도 $\dot{\theta}_a$ 는 축의 구동조건에 의해서 정해진다. 여기에서는 축단 A에 있어서 유니버설 조인트가 사용되고 있으므로, 이 경우 구동축 편 방향의 단위벡터를 p , 종동축 편 방향의 단위벡터를 q 라 하면, θ_a 는 조인트 십자편의 직교조건

$$p \cdot q = 0 \tag{2}$$

에 의해서 정해진다.

3. 근사해석

운동방정식 (1)에 대한 엄밀해를 구하는 것은 거의 불가능하므로 근사해석하기 위해 다음 식으로 정의되는 미소 파라미터 ϵ_α 를 도입한다.

$$\epsilon_\alpha = \sin \alpha_a \quad (3)$$

단, $\epsilon_\alpha > 0$, 즉 $\pi > \alpha_a > 0$ 라 한다. 변수 $x, y, \theta_x, \theta_y, \theta_t, c_1, c_2, c_3$ 는 ϵ_α^2 정도의 미소량이라고 가정하여

$$\begin{aligned} x &= \epsilon_\alpha^2 X, \quad y = \epsilon_\alpha^2 Y, \quad \theta_x = \epsilon_\alpha^2 \Theta_X, \\ \theta_y &= \epsilon_\alpha^2 \Theta_Y, \quad \theta_t = \epsilon_\alpha^2 \Theta_t, \end{aligned} \quad (4)$$

$$c_1 = \epsilon_\alpha^2 C_1, \quad c_2 = \epsilon_\alpha^2 C_2, \quad c_3 = \epsilon_\alpha^2 C_3$$

와 같이 놓고, 식 (1)을 무차원화한 다음, 식 (4)를 적용하여 ϵ_α^2 의 정밀도로 기준좌표 표시에 의한 운동방정식으로 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{X}_j + p_j^2 X_j &= \epsilon_\alpha Q_j^{(1)} + \epsilon_\alpha^2 Q_j^{(2)} \\ (j &= 1 \sim 5) \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서는 횡진동과 비틀림진동이 연성하여 동시에 발생하는 경우에 대해서 검토한다. 횡진동에 관해서는 단일모드로 공진하는 것으로 하고, p_i ($i=1\sim4$) 중 하나의 진동을 생각한다. 횡진동, 비틀림진동에 관해서 각각 p_i, p_5 부근의 진동수 ω_i, ω_5 의 진동을 취급하기 위해서,

$$p_k^2 = \omega_k^2 + \epsilon_\alpha d_k \quad (k = i, 5) \quad (6)$$

로 놓는다. 여기서 $\epsilon_\alpha d_k$ 는 離調(detuning)를 나타내는 미소량이다. 식 (6)을 식 (5)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \ddot{X}_k + \omega_k^2 X_k &= \epsilon_\alpha (Q_k^{(1)} - d_k X_k) + \epsilon_\alpha^2 Q_k^{(2)} \\ \ddot{X}_j + \omega_j^2 X_j &= \epsilon_\alpha Q_j^{(1)} + \epsilon_\alpha^2 Q_j^{(2)} \\ (k &= i, 5; j \neq k) \end{aligned} \quad (7)$$

점근법을 이용하여 식 (7)의 해를 구하기 위해, 다음 식과 같이 해를 공진의 경우에 대응하는 점근전개의 형으로 놓는다.

$$\begin{aligned} X_k &= A_k \cos \Psi_k \\ &+ \epsilon_\alpha U_k^{(1)}(A_i, \Phi_i, A_5, \Phi_5, \tau) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

$$X_j = \epsilon_\alpha U_j^{(1)}(A_i, \Phi_i, A_5, \Phi_5, \tau) + \dots$$

여기서,

$$\Psi_k = \omega_k \tau + \Phi_k \quad (9)$$

이고, A_k 와 Φ_k 는 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} A_k &= \epsilon_\alpha R_k^{(1)}(A_i, \Phi_i, A_5, \Phi_5) \\ &+ \epsilon_\alpha^2 R_k^{(2)}(A_i, \Phi_i, A_5, \Phi_5) + \dots \\ Q_k &= \epsilon_\alpha S_k^{(1)}(A_i, \Phi_i, A_5, \Phi_5) \\ &+ \epsilon_\alpha^2 S_k^{(2)}(A_i, \Phi_i, A_5, \Phi_5) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

식 (8)을 식 (7)에 대입하면, 회전축계에는 다음 양식의 합차형진동이 발생할 가능성이 있음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} (a) 2\omega &= \omega_i + \omega_5 & (b) 2\omega &= -\omega_i - \omega_5 \\ (c) 2\omega &= \omega_i - \omega_5 & (d) 2\omega &= -\omega_i + \omega_5 \end{aligned} \quad (11)$$

단, 실제로 발생하는 진동의 진동수는 ω_i, ω_5 가 아니고, $\omega_i + \Phi_i, \omega_5 + \Phi_5$ 로 주어진다. 또한, 계산에 이용한 무차원 파라미터 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} I &= 0.0228, \quad I_p = 0.0455, \quad \gamma = 0.1459, \\ \delta &= 0.0648, \quad \delta_t = 0.0053 \end{aligned} \quad (12)$$

4. 안정성평가

4.1 $2\omega = \omega_i + \omega_5$ 양식의 진동

Figs. 2, 3은 $i=2$ 의 경우, 즉 $2\omega \approx p_2 + p_5$ 가 성립하는 부근에 있어서, 제 2근사해에 의해서 주어지는 식 (10)을 이용해서 안정판별한 결과인데, $\omega=0.59$ 부근에서 불안정영역이 나타난다. Fig. 2에 보이는 바와 같이 조인트의 엇각이 어느 일정치보다 작은 영역에서는 이러한 양식의 불안정진동은 발생하지 않는다. 또한 엇각이 커질수록 불안정영역이 발생하는 한계도 넓어지고, 진동의 성장속도를 나타내는 성장계수 μ 도 일정한 각속도에 대해서 더욱 커짐을 알 수 있다.

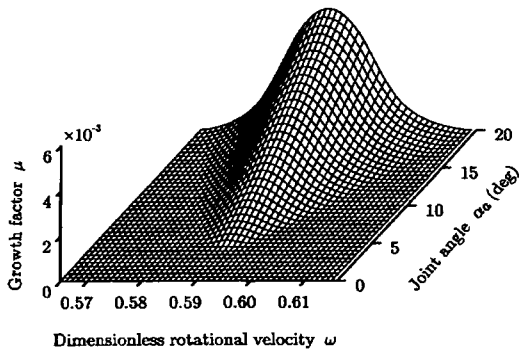


Fig. 2 Influence of joint angle α_a on unstable vibration of $2\omega = \omega_2 + \omega_5$ type ($c_1 = c_2 = 4 \times 10^{-3}$, $c_3 = 0.04 \times 10^{-3}$)

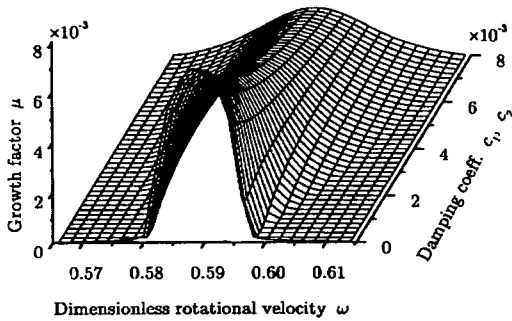


Fig. 3 Influence of damping coefficients c_1 and c_2 on unstable vibration of $2\omega = \omega_2 + \omega_5$ type ($\alpha_a = 15.0^\circ$)

Fig. 3은 잇각 $\alpha_a = 15.0^\circ$ 및 비틀림진동의 감쇠계수 $c_3 = 0.04 \times 10^{-3}$ 일 때 감쇠계수 c_1, c_2 의 영향을 보이고 있는데, 감쇠계수의 증가와 더불어 성장계수 μ 는 작아지지만, 불안정영역은 오히려 넓어지고 있음을 알 수 있다. 그림에서는 보이고 있지 않지만, 비틀림진동의 감쇠계수 c_3 를 바꾸었을 때의 불안정영역 및 성장계수의 변화는 통상의 경향을 보인다. 즉, c_3 가 크게 되면 불안정영역의 폭은 좁게 되고, μ 의 값도 작게 된다. 이와 같이 $2\omega = \omega_2 + \omega_5$ 양식의 합형진동을 가능한 한 억제하기 위해서는, 비틀림진동의 감쇠계수는 크게 하는 쪽이 좋지만, 처짐 및 처짐각진동의 감쇠계수 c_1, c_2 에 대해서는 한마디로 말하기 어렵다.

4.2 기타 양식의 진동

$2\omega = -\omega_i - \omega_5$ 및 $2\omega = -\omega_i + \omega_5$ 양식의 진동에 대해서는 제 2근사의 해석결과로부터 항상 $A_5 < 0$ 가

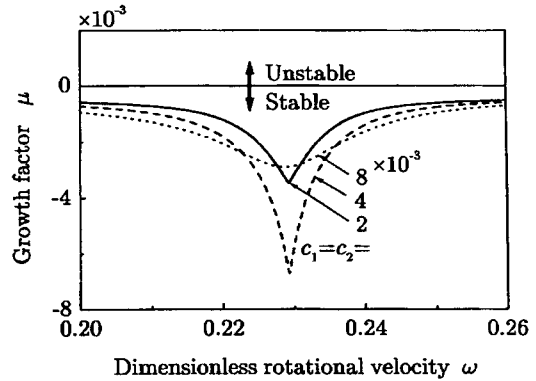


Fig. 4 Influence of damping coefficients c_1 and c_2 on unstable vibration of $2\omega = \omega_2 - \omega_5$ type ($\alpha_a = 15.0^\circ$)

되는 것을 보아 이런 양식의 불안정진동은 발생하지 않는다는 것을 알 수 있다.

$2\omega = \omega_i - \omega_5$ 양식의 진동은 상기 두 양식의 경우와 같이 바로 안정성을 알 수 없지만, 수치계산에 의해 불안정이 발생하지 않는 것을 알 수 있다. $i=2$ 의 경우에 대해서 성장계수 μ 의 값을 나타내면 Fig. 4와 같다. 이 부근에서 μ 는 항상 음의 값이고, 공진점 부근에서 오히려 안정성이 강함을 알 수 있다.

5. 결 론

유니버설 조인트에 의해서 구동되는 축의 굽힘과 비틀림이 연성해서 발생하는 진동에 대해서 해석으로부터 얻은 주요한 결과는 다음과 같다.

(1) 일반적으로 각속도가 변동하는 회전축계의 운동방정식은 좌표의 2차의 미소량의 정밀도로 유도하면 식 (1)로 주어진다.

(2) 구동축의 각속도 ω 가 중동축계의 횡진동에 관한 고유각진동수 p_i ($i=1\sim 4$) 중의 하나와 비틀림진동에 관한 고유각진동수 p_5 와의 사이에 $2\omega \approx p_i + p_5$ 의 관계를 만족하는 값을 취할 때, 중동축계는 횡진동과 비틀림진동이 동시에 불안정이 되는 합형진동이 발생한다.

(3) 이 불안정진동이 발생하는 회전속도의 범위, 즉 불안정영역은 조인트의 잇각 α_a 를 크게 하면 넓어진다. 또한, 불안정영역은 비틀림진동에 대한 점성감쇠가 크게 되면 좁아지지만, 횡진동에 대한 감쇠의 증가에 대해서는 반드시 좁아진다고는 할 수 없다.

(4) 구동축의 각속도 ω 가 $2\omega \approx \pm p_i - p_5$, $2\omega \approx -p_i + p_5$ 의 관계를 만족하는 값을 취하는 곳에서 회전축계가 불안정이 되는 일은 없다.

참고 문헌

- (1) Wehrli, Ch., Z. 1964, "Dynamisches Verhalten Einer Einfach Besetzten Rotierenden Welle Mit Kardangelenken", Z. Angew Math. Phys, Vol. 15, SS.154-166.
- (2) 西郷·岩壺, 1983, 칼ダン継手を介して駆動されるロータ軸の横振動, 日本機械學會論文集 (C編), 第 49 卷, 第 442 號, pp. 921~928.
- (3) Zeman, V., 1977, "Stability of Motion of Mechanical Systems with Joints", Acta Technia CSAV, Vol. 22, No. 1, pp. 52~62.
- (4) 太田·加藤, 1984, "自在継手による駆動回轉軸の横振動(第1報, 二次モーメントによる偶數倍振動の發生)", 日本機械學會論文集 (C編), 第 50 卷, 第 449 號, pp. 101~105.
- (5) Bogoliubov, N. and Mitropolsky, Y., 1961, Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations, p.298-317, Gordon and Breach, New York.
- (6) Love, A. E. H., 1944, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th Ed., pp. 381~388, Dover Publications, New York.