

< 논 문 >

2층 탄성기초위에 놓인 불균일 테이퍼진 보의 진동과 안정성

Vibration and Stability of Non-uniform Tapered Beams resting on a Two-Layered Elastic Foundation

류봉조* · 임경빈** · 이종원*** · 한재섭****

Bong-Jo Ryu, Kyung-Bin Yim, Jong-Won Lee and Jae-Sup Han

(1999년 4월 27일 접수 ; 1999년 5월 26일 심사완료)

Key Words : Two-layered Elastic Foundation(2층 탄성기초), Non-uniform Beam(불균일 보), Vibration and Stability(진동 및 안정성), Axial Force(축력)

ABSTRACT

The paper describes the vibration and the stability of nonuniform tapered beams resting on two-layered elastic foundations. The two-layered elastic foundations are constructed by distributed Winkler springs and shearing layers as often used in soil models. Governing equations are derived from energy expressions using Hamilton's Principle. The associated eigenvalue problems are solved to obtain the free vibration frequencies or the buckling loads. Numerical results for the vibration and the stability of beams under an axial force are presented and compared with other available solutions. Finally, vibration frequencies and critical forces are investigated for various thickness ratios, shear foundation parameters, Winkler foundation parameters, and boundary conditions of tapered beams.

1. 서 론

탄성기초(elastic foundation)위에 놓인 보 구조물의 진동과 안정성에 관한 연구는 기계공학, 토목공학 등의 구조역학분야에서 많은 연구자들의 관심의 대상이 되어져 왔다. 지반모델(soil model)에 대한 이전의 연구들⁽¹⁻³⁾에서는 지반모델에 대한 가정은 소위 Winkler 모델이라고 하는 단지 축방향으로 하중을 받는 선형 탄성 스프링계로 간주되었다.

공학적 관점에서 볼 때 지반 모델은 선형스프링의

독립적인 연속층(continuous layer)으로 간주될 수 있기 때문에 탄성기초에 대한 가정으로 많이 사용되어져 왔다. 그러나 선형 Winkler 탄성기초 모델만으로도 가정은 닫힌형태(closed form)의 간단한 해를 얻을 수 있다는 장점을 지니고 있기는 하지만, 실제 모델에 보다 더 접근된 충분한 정확도를 갖지는 못하는 것으로 알려져 왔다.

최근 이러한 Winkler 탄성기초 모델보다 좀 더 정확도를 갖는 2층 기초층(전단층과 Winkler 기초층), 소위 Pasternak 기초 위에 놓인 보 구조물의 진동과 안정성에 관한 연구들이 이루어져 왔다.

Zhaohua 와 Cook⁽⁴⁾은 cubic hermitian 형상함수에 근거한 유한요소법을 이용하여 2층 탄성기초를 갖는 보 구조물의 진동에 관한 연구를 하였고, Eisenberger와 Clastornik⁽⁵⁾는 다양한 형태의 Winkler

* 정희원, 대전산업대학교 기계설계공학과

** 동양공업전문대학 기계과

*** 충남대학교 대학원

**** 대전산업대학교 대학원

탄성기초위에 놓인 보가 축력을 받는 경우에 있어 보의 진동과 좌굴에 대한 연구를 하였다.

Franciosi와 Masi⁽⁶⁾는 행렬변위 접근법(matrix displacement approach)을 적용한 유한요소법을 사용하여 2층 파라미터 탄성 지반위에 놓인 보의 자유 진동에 대한 연구를 하였다.

이러한 연구들과 더불어 보의 회전관성과 전단변형 효과를 고려한 2층 탄성기초위의 보⁽⁷⁻⁹⁾ 또는 테이퍼진 불균일 보⁽¹⁰⁾에 대한 진동관련 연구들도 이루어져 왔다.

그러나 위의 연구들은 탄성기초가 없는 테이퍼진 불균일 보의 진동해석이거나, 2층 탄성기초 또는 Winkler 탄성기초 위에 놓인 균일보의 안정성 및 진동에 대한 연구들이다.

따라서 본 연구에서는 최근 지반모델로 많이 가정되고 있는 2층 탄성기초를 갖고, 축력을 받는 테이퍼진 불균일 보의 임계하중과 진동주파수(vibration frequency)를 테이퍼진 보의 두께비(thickness ratio)의 변화, 전단기초 파라미터(shear foundation parameter), Winkler 기초 파라미터의 변화에 따라 구함으로써 진동과 안정성 해석을 하는데 연구의 목적이 있다.

2. 이론해석

2.1 수학적 모델과 지배방정식

축방향으로 하중을 받으며, 2층 탄성기초위에 놓인 폭이 일정한 보의 수학적 모델은 Fig. 1과 같다.

Fig. 1에서 P 는 일정크기의 축력을 나타내고, L 은 보의 전체길이, k_w 는 Winkler 기초상수(Winkler foundation modulus), k_s 는 전단기초 상수(shear foundation modulus), x 와 u 는 각각 축방향과 횡방

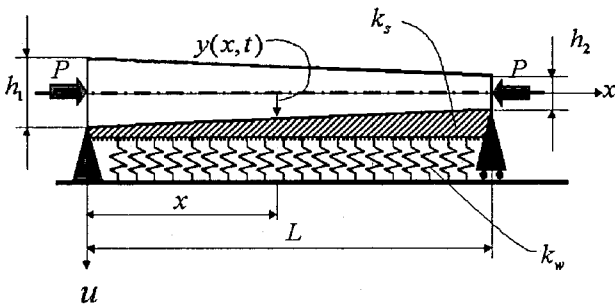


Fig. 1 A tapered beam resting on two-layered elastic foundations under a axial force

향좌표, h_1 과 h_2 는 각각 테이퍼진 보의 두께, $y(x, t)$ 는 위치 x 와 시간 t 에 있어서의 횡방향 변위를 나타낸다.

Fig. 1 모델에 대한 지배방정식을 유도하기 위해 계의 탄성변형률 에너지(elastic strain energy) U , 운동에너지 T , 축력 P 에 의해 하여진 일 W 를 나타내면 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x)y_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_w y^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_s y_x^2 dx \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x)y_t^2 dx \quad (2)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L P y_x^2 dx \quad (3)$$

식 (1)~(3)에서 E 는 영률(Young's modulus), $A(x)$ 는 보의 축 방향 길이에 따라 변하는 단면적(cross-sectional area), $I(x)$ 는 단면의 2차 모멘트, ρ 는 보의 밀도(density), 하첨자 x 와 t 는 각각 위치와 시간에 대한 미분을 나타낸다.

식 (1)~(3)을 해밀턴원리(Hamilton's principle)에 대입하고 변분을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_0^L \left\{ \rho A_1 \left(D + (1-D) \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right) y_{tt} \delta y + EI_1 \left(D + (1-D) \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right)^3 y_{xx} \delta y_{xx} + k_w y \delta y + k_s y_x \delta y_x - P y_x \delta y_x \right\} dx = 0 \quad (4)$$

여기서, D 는 $\frac{h_2}{h_1}$ 로서 두께 비(thickness ratio)를 나타내고 A_1 과 I_1 은 각각 테이퍼진 보의 두꺼운 쪽 두께의 단면적과 단면의 2차 모멘트를 나타낸다.

2.2 유한요소해석

식 (4)에 유한요소법을 적용시키기 위해 보를 일정한 유한길이 l 인 N 개의 요소로 분할하며 분할된 그림은 Fig. 2와 같다.

Fig. 2에서 원문자는 요소번호(element number)를 나타내고, l 은 요소길이를 나타낸다. 계산상의 편의를 위해 다음과 같은 무차원화된 좌표와 국부좌표들

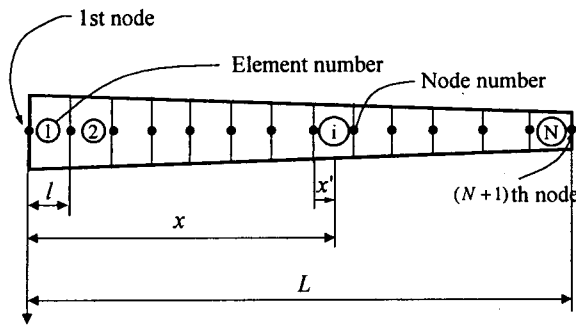


Fig. 2 A finite element model

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{x'}{l}, \quad x' = x - (i-1)l \quad (5)$$

을 도입하고, i 번째 요소에 대해 무차원화된 변위 함수를 다음과 같이 가정한다.

$$\eta(\xi)^{(i)} = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad (6)$$

유한요소들간의 적합성(compatibility condition)을 만족시키도록 식 (6)의 계수를 구하여 $\eta(\xi)^{(i)}$ 를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\eta(\xi)^{(i)} = \{N_w\}^T \{H\}^{(i)} \quad (7)$$

여기서, 상첨자 T 는 transpose를 의미하고, $\{H\}^{(i)}$ 는 일반화된 요소절점벡터(element nodal vector), $\{N_w\}^T$ 는 형상함수 벡터(shape function vector)로써 다음과 같다.

$$\{N_w\}^T = \{1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad \xi - 2\xi^2 + \xi^3, \quad 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ -\xi^2 + \xi^3\} \quad (8)$$

식 (5)에서 (8)의 관계들을 이용하여 보 전체의 N 개 요소에 대해 조합하면 다음과 같은 행렬 형태의 고유치 방정식을 얻게된다.

$$[[K] - \Omega^2[M]]\{q\} = \{0\} \quad (9)$$

여기서 $[K]$ 와 $[M]$ 은 각각 조합강성행렬(global stiffness matrix)과 조합질량행렬(global mass matrix)을 나타내고 $\{q\}$ 는 모달벡터(modal vector)를 나타낸다.

한편, 본 연구의 수치해를 얻기 위해 사용된 무차원화된 파라미터들은 다음과 같다.

$$\Omega^2 = \frac{\rho A_1 L^4}{EI_1} \omega^2, \quad K_s = \frac{k_s L^2}{EI_1}, \quad K_w = \frac{k_w L^4}{EI_1},$$

$$Q = \frac{PL^2}{EI_1}, \quad D = \frac{h_2}{h_1} \quad (10)$$

여기서 Ω 는 진동수 파라미터, K_s 는 전단기초 파라미터, K_w 는 Winkler 기초 파라미터(Winkler foundation parameter) Q 는 축력 파라미터(axial force parameter), D 는 테이퍼진 보의 두께비(thickness ratio)를 나타낸다.

3. 수치해석 결과 및 검토

본 연구의 수치해는 보 길이를 20개의 유한요소로 나누어 얻었으며, 수치해의 타당성을 검토하기 위해 다양한 경계조건을 갖는 참고문헌 (7) 및 (9)의 균일보(uniform beam)결과들과 비교하여 아주 근사한 결과를 얻었으며, Table 1은 이 비교 결과를 보이고 있다.

두가지 경계조건(양단힌지, 한단힌지-타단고정)에 대해 무차원 파라미터들 K_w/π^4 , Q_{cr}/π^2 , K_s/π^2 의 고정된 값에서 1차 모드(first mode)부터 3차 모드(3rd mode)까지의 고유진동수 값을 비교한 것이다. 참고문헌 (7)의 엄밀해와의 비교에서는 모두 0.2% 이내의 오차를 나타내었고, 엄밀해가 없는 경우는 참고문헌 (9)의 유한요소 8일때의 값과 0.93% 이내의 오차를 보였다.

Table 1 Comparison present results with other available results for the lowest three natural frequencies

Method		Exact	8 element	20 element
B. C.	Parameter	ref. (7)	ref. (9)	present
Both hinged	$K_w/\pi^4 = 0.0$	9.87	9.87	9.870
	$K_s/\pi^2 = 0.0$	39.48	39.49	39.478
	$Q/\pi^2 = 0.0$	88.83	88.94	88.826
	$K_w/\pi^4 = 0.6$	9.87	9.87	9.870
	$K_s/\pi^2 = 0.0$	37.19	37.20	37.191
	$Q/\pi^2 = 0.6$	86.15	86.27	86.154
Hinged clamped	$K_w/\pi^4 = 0.0$	15.42	15.42	15.418
	$K_s/\pi^2 = 0.0$	49.96	49.99	49.964
	$Q/\pi^2 = 0.0$	104.25	104.43	104.25
	$K_w/\pi^4 = 0.6$	-	15.09	15.087
	$K_s/\pi^2 = 0.0$	-	47.99	47.966
	$Q/\pi^2 = 0.6$	-	102.02	101.83

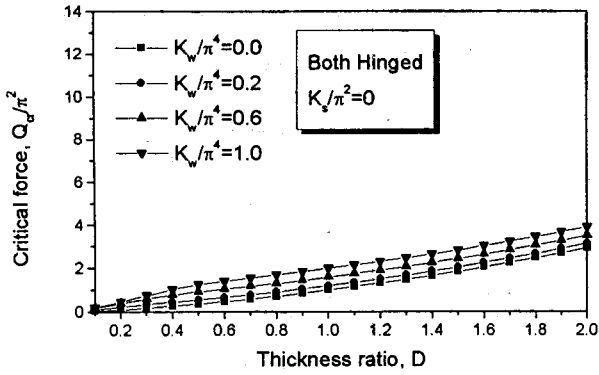


Fig. 3 Critical force depending on thickness ratio and Winkler foundation parameter for both-hinged boundary condition

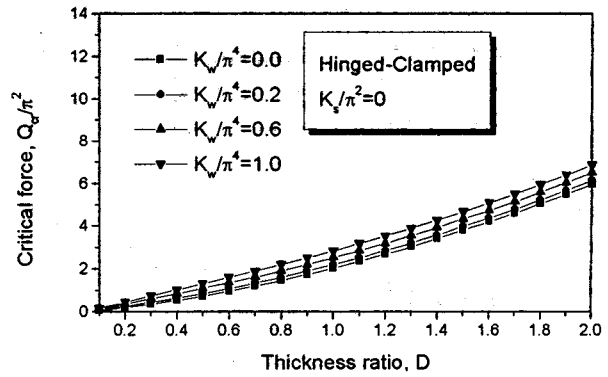


Fig. 5 Critical force depending on thickness ratio and Winkler foundation parameter for hinged-clamped boundary condition

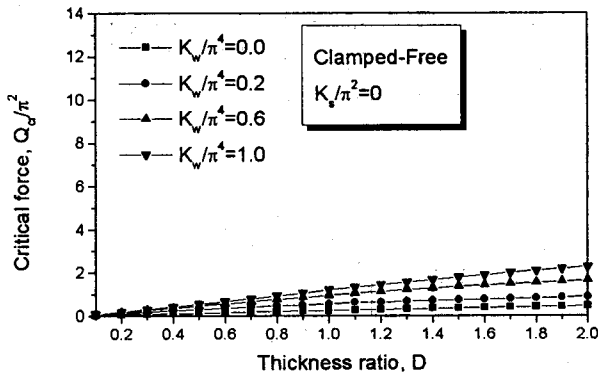


Fig. 4 Critical force depending on thickness ratio and Winkler foundation parameter for clamped-free boundary condition

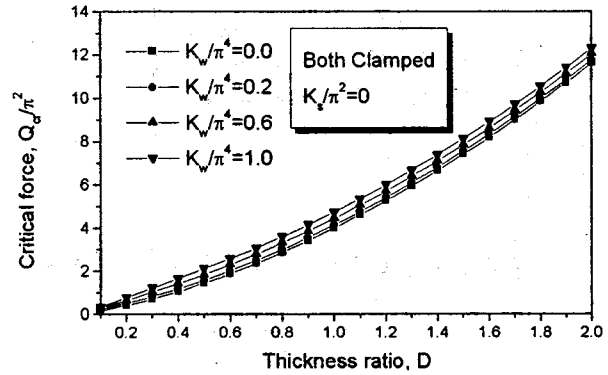


Fig. 6 Critical force depending on thickness ratio and Winkler foundation parameter for both-clamped boundary condition

물론, 본 연구의 유한요소수는 20요소이므로 참고 문헌 (9)보다는 엄밀해에 더 가까운 결과를 얻은 것으로 사료된다.

Fig. 3부터 Fig. 6은 4가지 경계조건에 대해 전단기초가 없고, Winkler 기초만이 있는 경우, 무차원화된 Winkler 기초 파라미터 K_w/π^4 값과 두께비 D 의 변화에 따른 임계하중 값을 나타낸 그림들이다.

4가지 경계조건 모두에 있어 두께비 D 가 증가될수록, 또한, K_w/π^4 값이 증가될수록 임계하중값은 증가됨을 알 수 있고, 동일 두께비와 동일 K_w/π^4 값에 대해 Fig. 6의 양단고정된 경계조건쪽의 임계하중값이 다른 경계조건쪽의 임계하중값보다 크음을 알 수 있다.

Fig. 7부터 10까지는 Winkler 기초가 없고 전단기초만이 존재하는 경우 두께비 D 와 전단기초 파라미터 K_s/π^2 값의 변화에 따른 임계하중값을 보이고

있다. 두께비 D 의 증가와 전단기초 파라미터 값의 증가에 따라 임계하중값은 증가됨을 알 수 있는데, 특이한 것은 K_s/π^2 값의 증가량만큼 임계하중값의 증가를 보이는 것이다. 예를들면, Fig. 7의 양단단순지지보에서 두께비 D 가 $D=0.1$ 의 경우, $K_s/\pi^2 = 0.2$ 이면 $Q_{cr}/\pi^2 = 0.248$, $K_s/\pi^2 = 0.6$ 이면 $Q_{cr}/\pi^2 = 0.648$, $K_s/\pi^2 = 1.0$ 이면 $Q_{cr}/\pi^2 = 1.048$ 이다. 즉 $K_s/\pi^2 = 0.2$ 에서 0.6으로 0.4증가하면, Q_{cr}/π^2 값도 0.4 증가된다.

이러한 양상은 Fig. 8, 9, 10의 다른 경계조건에서도 동일하고 어떤 두께비에 대해서도 동일한 경향이 나타난다.

Fig. 11부터 14는 2층(Winkler 기초층과 전단기초층)으로 가정된 기초를 갖는 보에 축력이 작용되는 경우, 태이퍼 두께비와 2층 기초 파라미터 값의 변화에 따른 임계하중값을 나타낸 그림들이다.

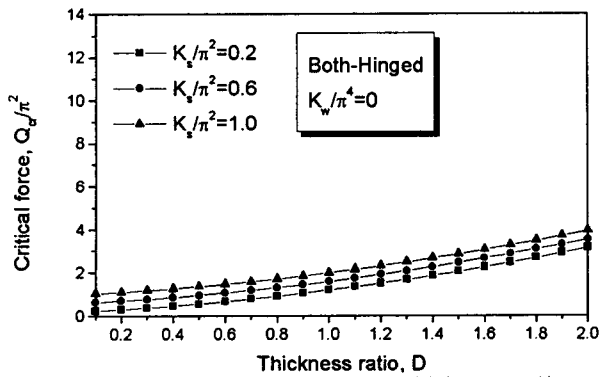


Fig. 7 Critical force depending on thickness ratio and shear foundation parameter for both-hinged boundary condition

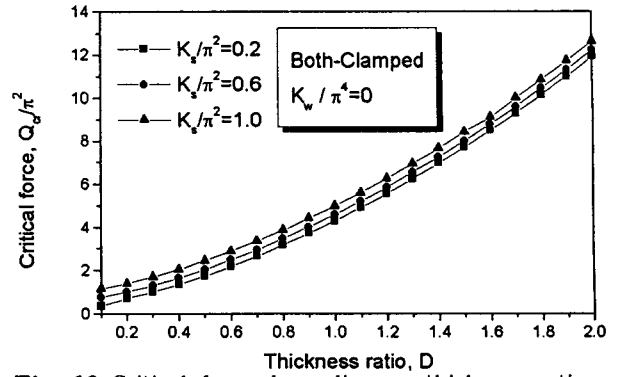


Fig. 10 Critical force depending on thickness ratio and shear foundation parameter for both-clamped boundary condition

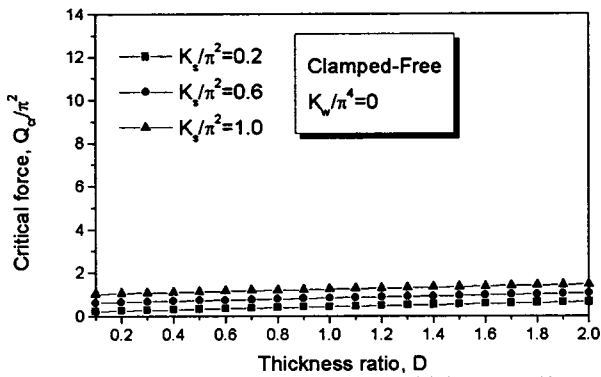


Fig. 8 Critical force depending on thickness ratio and shear foundation parameter for clamped-free boundary condition

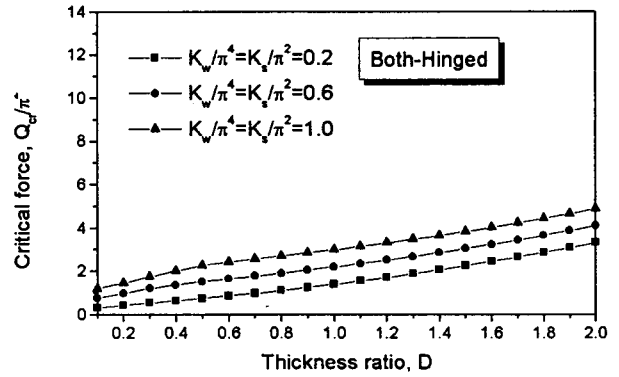


Fig. 11 Critical force depending on thickness ratio and two-layered foundation parameter for both-hinged boundary condition

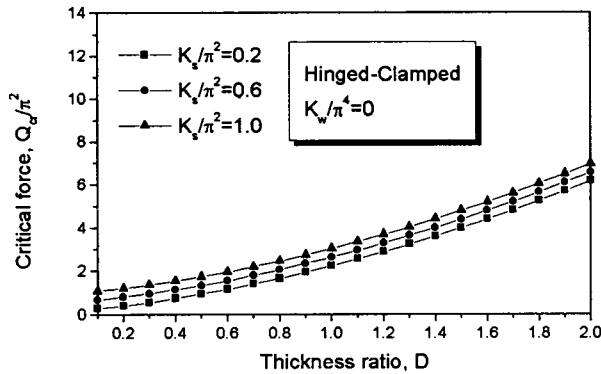


Fig. 9 Critical force depending on thickness ratio and shear foundation parameter for hinged-clamped boundary condition

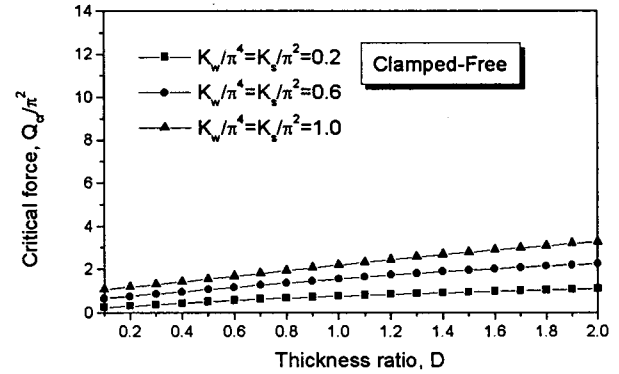


Fig. 12 Critical force depending on thickness ratio and two-layered foundation parameter for clamped-free boundary condition

2층 구조로 가정된 보의 임계하중값은 한층 (Winkler 기초층 또는 전단기초층)만으로 가정된 기초를 갖는 경우에 비해 강성행렬의 증가로 더 큰 임계하중 값을 갖는다는 것을 알 수 있었다.

또한, 2층 구조의 경우 Winkler 기초만이 가정된 경우의 임계하중값에 전단기초 파라미터 K_s/π^2 의

증가량만큼을 더하면 2층 구조의 경우 임계하중값이 됨을 알 수 있었다.

Table 2는 4개의 경계조건을 갖는 테이퍼진 보에 대해, 첫째 축력, 전단기초, Winkler 기초가 모두 존재하지 않는 경우, 둘째 Winkler 기초가 없고 축력 파라미터 Q/π^2 값과 전단기초 파라미터 K_s/π^2 값이

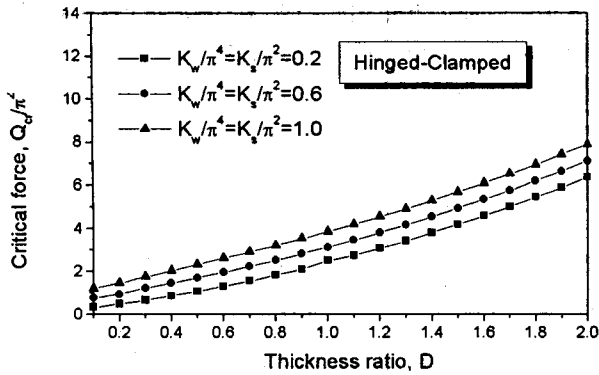


Fig. 13 Critical force depending on thickness ratio and two-layered foundation parameter for hinged-clamped boundary condition

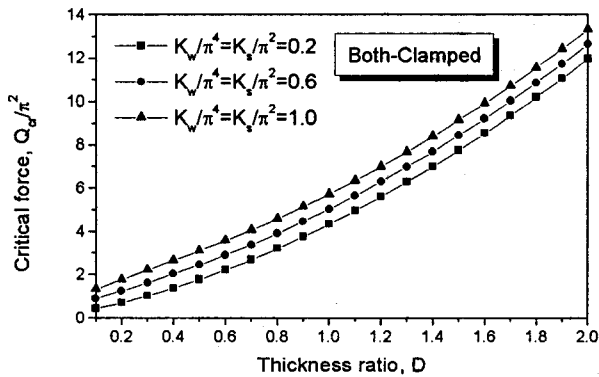


Fig. 14 Critical force depending on thickness ratio and two-layered foundation parameter for both-clamped boundary condition

동일한 경우, 세째 전단기초가 없고 축력 파라미터 Q/π^2 값과 Winkler 기초 파라미터 K_w/π^4 값이 동일한 때에 있어서, 2가지 테이퍼 두께비에 대한 고유진동수 변화를 나타낸 표이다.

여기서 알 수 있는 것은 Winkler 기초가 없고 축력파라미터 Q/π^2 값과 전단기초 파라미터 K_s/π^2 값이 동일한 경우의 1, 2, 3차 고유진동수는 축력과 기초층이 전혀없는 보의 고유진동수와 완전한 일치로 보이는 것이다. 이는 어떤 두께비, 어떤 경계조건에서도 동일한 경향을 보이고 있는데, 이것은 인장축력(tensile axial force)과 같은 크기의 강성효과(stiffning effect)가 전단기초층에 의해 야기되어, 가해진 압축력과 서로 상쇄되어 버리는 결과라고 인지된다. 그러나 전단기초층이 없고 Winkler 기초와 축력만이 존재하는 경우에 있어서, 축력 파라미터 Q/π^2 값과 Winkler 기초 파라미터 값 K_w/π^4 값이 동일한 때에는 오로지 양단힌지의 경계조건에서의 1차 고유진동수만이 기초가 전혀없고 축력도 없는 계

Table 2 First three lowest natural frequencies Ω_i for the change of thickness ratios and boundary conditions

	Boundary conditions	Parameters	Both-Hinged	Clamped-Free	Hinged-Clamped	Both-Clamped
Thickness	$K_w/\pi^4 = 0.0$	$K_s/\pi^2 = 0.0$	4.92008	4.29249	9.80023	11.8438
		$Q/\pi^2 = 0.0$	21.3476	15.7427	28.2448	32.4854
			47.4973	36.8860	56.8925	63.5439
	$K_w/\pi^4 = 0.1$	$K_s/\pi^2 = 0.0$	4.56736	1.48962	8.85865	11.4003
		$Q/\pi^2 = 0.1$	19.1460	10.1192	26.0222	30.9475
			44.1460	31.5974	54.3081	61.5875
	$K_w/\pi^4 = 0.0$	$K_s/\pi^2 = 0.1$	4.92008	4.29249	9.80023	11.8438
		$Q/\pi^2 = 0.1$	21.3476	15.7427	28.2448	32.4854
			47.4973	36.8860	56.8925	63.5439
Ratio	$K_w/\pi^4 = 0.0$	$K_s/\pi^2 = 0.0$	12.1717	3.36692	18.0253	27.7040
		$Q/\pi^2 = 0.0$	48.9602	25.2728	60.8964	76.3358
			110.063	74.4994	128.078	149.623
	$K_w/\pi^4 = 0.1$	$K_s/\pi^2 = 0.0$	12.1689	3.90482	18.0026	27.6666
		$Q/\pi^2 = 0.1$	48.7109	24.9827	60.6895	76.1421
			109.767	74.1812	127.820	149.380
	$K_w/\pi^4 = 0.0$	$K_s/\pi^2 = 0.1$	12.1717	3.36692	18.0253	27.7040
		$Q/\pi^2 = 0.1$	48.9602	25.2728	60.8964	76.3358
			110.063	74.4994	128.078	149.623

의 1차 고유진동과 일치하고, 2차, 3차 및 다른 경계조건에서는 고유진동수가 모두 다른 값을 나타낸다.

4. 결론

축력을 받고 2층 탄성기초위에 놓인 불균일 테이퍼진 보의 안정성과 진동에 관한 연구결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 지반기초를 Winkler 기초만으로 가정한 경우에 비해 전단층을 포함한 2층 구조로 가정한 경우 임계하중값은 증가된다.
- (2) 테이퍼진 보의 두께비, 전단기초 파라미터, Winkler 기초 파라미터의 증가에 따라 임계하중값은 어떤 경계조건에서도 증가된다.
- (3) 전단기초 파라미터 K_s/π^2 값과 무차원 축력 파라미터 Q/π^2 값이 동일하고, Winkler 기초가 없는 경우, 어떤 경계조건 어떤 테이퍼 두께비에 대해서도 축력과 기초가 없는 보의 고유진동수와 완전히 일치한다. 또한 전단기초가 없고 축력 파라미터 Q/π^2 값과 Winkler 기초 파라미터

K_w/π^4 값이 동일한 경우는, 양단힌지 경계조건
의 1차 고유진동수만이 기초와 축력이 없는 보
의 고유진동수와 일치할 뿐 2, 3차 및 다른 경계
조건일 경우는 일치하지 않는다.

참 고 문 헌

- (1) Dodge, A., 1964, "Influence Functions for Beams on Elastic Foundations", Journal of Structure Division, ASCE, Vol. 90, pp. 63~101.
- (2) Franklin, J. N. and Scott, R. F., 1979, "Beams Equation with Variable Foundation Coefficient", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 105, pp. 811~827.
- (3) Clastornik, J., Eisenberger, M., Yankelevsky, D. Z. and Adin, M. A., 1986, "Beams on Variable Winkler Elastic Foundation", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 53, pp. 925~928.
- (4) Zhaohua, F. and Cook, R. D., 1986, "Beam Element on Two-Parameter Elastic Foundations", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 109, pp. 1390~1402.
- (5) Eisenberger, M. and Clastornik, J., 1987, "Vibrations and Buckling of a Beam on a Variable Winkler Elastic Foundation", Journal of Sound and Vibration, Vol.115, pp. 233~241.
- (6) Franciosi, C. and Masi, A., 1993, "Free Vibrations of Foundation Beams on Two-Parameter Elastic Soil", Computers and Structures, Vol. 47, pp. 419~426.
- (7) Cheng, F. Y. and Pantelides, C. P., 1988, "Dynamic Timoshenko Beam-Columns on Elastic Media", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 114, pp. 1524~1556.
- (8) Yokoyama, T., 1991, "Vibrations of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations", Earthquake Engineering Structural Dynamics, Vol. 20, pp. 355~370.
- (9) Yokoyama, T., 1996, "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations", Computers and Structures, Vol. 61, pp. 995~1007.
- (10) Rossi, R. E. and Laura, P. A. A., 1990, "A Note on Transverse Vibrations of a Timoshenko Beams of Non-uniform Thickness Clamped at one End and Carrying a Concentrated Mass at the Other", Journal of Sound and Vibration, Vol. 143, pp. 491~502.