

〈논 문〉

홀로그래피를 이용한 실내 음장의 재구성에서 발생하는 수치 오차

Numerical Errors in Digital Holographic Reconstruction of Interior Sound Fields

김 영 기* · 김 양 한**

Young-Key Kim and Yang-Hann Kim

(1998년 12월 21일 접수 : 1999년 7월 8일 심사완료)

Key Words : Nearfield Acoustic Holography(근접장 음향 홀로그래피), Numerical Errors(수치오차), Inverse Matrix(역행렬), Boundary Element Method(경계요소법)

ABSTRACT

Digital holographic reconstruction method [W. A. Veronesi, et al, 1989, JASA, Vol. 85, pp. 588~598] reconstructs a whole sound field by using measured sound pressure. This paper reports numerical errors of the method that occur at specific frequencies. The errors occur due to the truncation errors included in the calculation of transfer matrixes. The frequencies of the errors depend on the size of boundary element surfaces. Moreover, a modified calculation technique is proposed in the paper. The technique prevents the truncation errors by employing an indirect calculation procedure.

1. 서 론

역문제(inverse problem)에서 특이행렬(singular matrix)이라고 부르는 것은 일반적으로 행렬의 특이값(singular value) 중 몇 개가 아주 작은 값을 갖는 행렬을 뜻한다. 작은 특이값들은 역변환 과정에서 측정 오차를 크게 증폭할 수 있으므로 필터링 과정을 통해 이를 제거한다⁽¹⁾. 반면, 다른 특이값에 비해 상대적으로 크기가 큰 몇 개의 특이값을 포함한 특이행렬은 특별한 고려 없이 역변환하여 사용한다. 크기가 큰 특이값은 역변환시 그 크기가 아주 작아 지므로 이론적으로 역문제의 오차에 영향을 주지 않는다.

하지만 실제 수치 모델을 사용할 경우, 이러한 특이행렬에 대한 일반적인 이해는 수정되어야 한다.

특이값이 무한히 커지는 경우에는 이론적으로 특이값의 역이 0이 되지만, 실제 수치 계산 과정에서는 큰 값의 계산에 따른 수치적인 오차(truncation error)가 포함된다. 따라서 수치 역문제에서는 이러한 경우에 대한 특별한 고려가 필요하다.

경계요소법에 근거한 근접장 음향 홀로그래피 방법⁽²⁾에서는 수치 오차 문제가 일반적인 수치 역문제에 비하여 특별히 부각 될 수 있다. 일반적인 역문제에서는 전달계의 공진주파수에서 수치 오차에 비해 보다 근본적인 오차가 발생한다. 공진 주파수에서는 하나의 모드(mode)가 크게 가진되어 낮은 신호대잡음비(signal-to-noise ratio) 문제^(1,3)가 발생하므로, 앞서 설명한 수치 오차 문제는 일반적으로 크게 부각되지 않는다. 하지만, 경계요소법에 근거한 근접장 음향 홀로그래피 방법에서는 전달함수의 특이 주파수가 실제 계의 공진 주파수와 일반적으로 다르게 분포한다. 경계요소법에 근거한 근접장 음향 홀로그래피 방법은 물리적인 계의 경계에 대한 엄밀한 표현을 필요로 하지 않으며, 홀로그래피에서 가

* 한국과학기술원 기계공학과

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

정하는 공간의 경계가 실제 경계와 동일할 필요가 없다. 따라서, 경계요소법에 근거한 근접장 음향 홀로그래피 방법의 수치 오차는 실제계의 공진 주파수에서 나타나는 낮은 신호대잡음비(signal-to-noise ratio)에 의한 오차와는 구별되는 독립적인 오차를 발생시킬 수 있다.

본 논문에서는 경계요소법에 근거한 홀로그래피 방법의 유도과정을 통해 전달행렬의 특성을 살펴본다. 또한, 큰 특이값에 의해 발생하는 수치오차를 근본적으로 없애기 위해, 가상의 흡음이 있는 경계조건을 이용한 홀로그래피 방법을 유도한다.

2. 홀로그래피 방법 및 전달행렬의 특이성

2.1 경계요소법에 근거한 홀로그래피 방법

공간 내부의 임의의 한 점 r 에서(Fig. 1)의 음압 $p(r)$ 은 헬름홀츠(Helmholtz)의 적분방정식⁽⁴⁾으로부터, 공간을 둘러싼 벽면의 음압 $p(r_s)$ 과 수직 속도 $V_n(r_s)$ 를 이용해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\gamma(r)p(r) = - \int_S p(r_s) \frac{\partial G}{\partial n}(r-r_s) dS + i\rho ck \int_S v_n(r_s) G(r-r_s) dS \quad (1)$$

여기서, $G(r-r_s)$ 는 공간에서의 그린함수(Green's function)를 뜻한다. 또한 i 는, $\sqrt{-1}$, c 는 음파의 속도, ρ 는 매질의 밀도를 나타내며, $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ 이다(여기서 ω 는 각 주파수, λ 는 파장). 계수 $\gamma(r)$ 은 점 r 에서의 고체각(solid angle)을 나타낸다⁽⁵⁾.

경계요소법⁽⁵⁾은 식 (1)의 적분을 수치적으로 수행

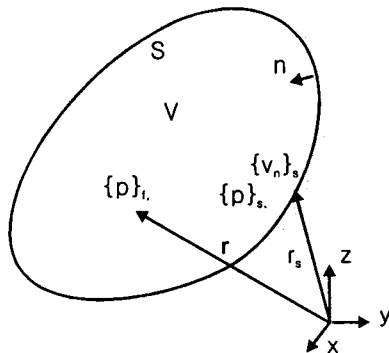


Fig. 1 The definition of geometric conditions and acoustic variables in a cavity

하는 것이며, 경계면을 유한개의 요소(element)로 나누어 적분을 수행한다. 이산화 방법⁽⁴⁾에 따라 얻어지는 방정식의 정확도는 달라질 수 있으나, 벽면에서의 음압과 수직방향 속도를 각각 $\{p\}_s$ 와 $\{v_n\}_s$ 라 하고, 공간 내부에서의 음압을 $\{p\}_r$ 라하면 다음과 같은 형태의 행렬식으로 표현 가능하다.

$$\{p\}_r = [D]_r \{p\}_s + [M]_r \{v_n\}_s \quad (2)$$

또한, 식 (1)에서 공간 내부의 점 r 을 경계위의 임의의 한점 r_s 으로 가져가면, 다음과 같은 경계에서의 음압 $\{p\}_s$ 와 속도 $\{v_n\}_s$ 의 관계 얻을 수 있다.

$$[D]_s \{p\}_s = [M]_s \{v_n\}_s \quad (3)$$

따라서, 벽면의 음압 혹은 속도 중의 하나가 경계조건으로 주어지는 경우, 식 (3)으로부터 나머지 하나의 경계조건을 얻을 수 있으며, 식 (2)로부터 임의의 공간내의 음압을 얻을 수 있다.

가장 간단한 경계조건의 형태인 속도조건(neumann condition) 혹은 음압조건(dirichlet condition)을 사용한 경우, 다음 두 개의 식을 통해 공간 내부의 임의의 점에서의 음압을 얻을 수 있다.

$$\{p\}_r = ([M]_r + [D]_r [D]_s^{-1} [M]_s) \{v_n\}_s \equiv [T]_r \{v_n\}_s \quad (4)$$

$$\{p\}_r = ([D]_r + [M]_r [M]_s^{-1} [D]_s) \{p\}_s \equiv [T]_r \{p\}_s \quad (5)$$

경계요소법에 근거한 근접장 음향 홀로그래피 방법은 위의 두 식의 역과정을 의미한다. 즉, 공간상의 음압 $\{p\}_r$ 를 측정하여 경계조건 $\{p\}_s$ 혹은 $\{v_n\}_s$ 를 추정하고 이로부터 측정하지 않은 임의의 지점의 음압을 계산하는 것이다. 엄밀히 말하면, 벽면에서 가정한 노드의 수 N 보다 많은 수의 지점에서 음압 $\{p\}_r$ 를 측정하여 음압 $\{p\}_s$ 와 속도 $\{v_n\}_s$ 를 예측하는 것이 기본적인 경계요소법에 근거한 근접장 음향 홀로그래피 방법이다.

2.2 전달함수의 특이성

일반적으로 경계요소법에 근거한 홀로그래피 방법에서의 경계조건 $\{p\}_s$ 와 $\{v_n\}_s$ 는 실제 물리적인 경계조건과 일치하지 않는다. 앞 절에서 살펴볼 수 있듯이, 홀로그래피 방법에서의 경계조건은 단순히 측정된 음장을 가장 잘 표현해주는 등가의 경계조건이다. 따라서, 실제 물리적인 경계조건을 모르는 경우

에도 등가의 속도조건 혹은 음압조건을 이용하여 공간내부의 음장을 얻을 수 있다.

하지만, 등가의 경계조건은 경계요소법을 위해 가정한 공간내의 공진 주파수에서는 문제점을 나타낼 수 있다. 등가의 경계조건을 사용하면 실제 물리적인 상황과 관계없이 공진 현상이 발생하는 주파수를 포함하게 된다. 따라서 이러한 주파수에서는 전달행렬 $[T]_{v_n}$ 와 $[T]_p$ 도 크기가 무한히 커지며, 앞서 설명한 수치 오차가 포함될 수 있다.

이러한 전달행렬의 특이성은 식 (3)을 이용해 좀더 구체적으로 보여질 수 있다. 공진이 발생하는 두 가지 경우를 살펴보기 위하여, 각각의 벽면에 음압 혹은 수직 방향 속도가 0인 경우 ($\{p\}_s = 0$, $\{v_n\}_s = 0$)를 가정하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]_s \{v_n\}_s = 0 \quad (6)$$

$$[D]_s \{p\}_s = 0 \quad (7)$$

이 방정식들은 행렬 $[D]_s$ 와 $[M]_s$ 가 각각의 공진 주파수에서 랭크(rank)가 부족한 행렬이 됨을 말해준다. 따라서, 공진주파수에서 이 행렬들의 역행렬들은 수학적으로 존재하지 않는다. 결과적으로, 이러한 역행렬을 포함한 전달행렬 $[T]_{v_n}$ 과 $[T]_p$ 도 하나의 모드가 크게 발산하는 특이성을 보이게 된다.

3. 가상 흡음을 이용한 특이성의 감소방법

3.1 가상의 흡음을 포함한 경계조건

개념적으로 전달행렬의 특이성은 적절하지 못한 등가 음원의 설정에서 비롯되었다고 할 수 있다. 즉, 실제 공진이 일어나지 않는 계에서 공진이 일어나는 모델을 이용해 음장을 표현하기 때문에 이러한 문제가 발생한다. 따라서, 본 연구에서는 홀로그래피에서 사용하는 등가의 음원 표면에 가상의 흡음을 추가하여 새로운 등가 음원을 형성하고, 이를 통해 전달행렬의 특이성을 감소시키고자 한다.

표면에 흡음물질이 부착된 속도음원은 수학적인 경계조건을 이용해 다음과 같이 표현할 수 있다^(6~8).

$$v_n(\mathbf{r}_s) = S(\mathbf{r}_s) + A(\mathbf{r}_s)p(\mathbf{r}_s) \quad (8)$$

여기서, $S(\mathbf{r}_s)$ 은 벽면에 분포된 소음원의 크기를 나타내며, $A(\mathbf{r}_s)$ 는 벽면에 부착된 흡음 물질의 어드미턴스(admittance)를 나타낸다. 물리적으로는, 벽면의 속도가 소음원에서의 직접적인 방사의 영향뿐

만 아니라 흡음 물질의 수동적 반응에 의해서도 결정됨을 나타낸다. 수학적으로는 코시 문제(Cauchy problem)의 일반적인 경계조건 형태이다⁽⁹⁾.

식 (1)을 경계요소법에서 사용하기 위하여 이산화하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{v_n\}_s = \{S\}_s + [A]\{p\}_s \quad (9)$$

여기서, $[A]$ 는 어드미턴스 행렬로서, 중심항만을 갖는 행렬(diagonal matrix)이다. 또한 $\{S\}_s$ 는 소음원을 뜻한다.

3.2 가상 흡음을 포함한 홀로그래피 방법

식 (9)에 표현된 경계조건을 식 (2)와 (3)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\{p\}_f = ([D]_f + [M]_f[A])\{p\}_s + [M]_f\{S\}_s \quad (10)$$

$$([D]_s - [M]_s[A])\{p\}_s = [M]_s\{S\}_s \quad (11)$$

또한, 식 (10)와 (11)에서 벽면에서의 음압 $\{p\}_s$ 를 소거하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\{p\}_f = ([M]_f + ([D]_f + [M]_f[A])([D]_s - [M]_s[A])^{-1}[M]_s)\{S\}_s \quad (12)$$

결과적으로 식 (12)는 공간상의 음압 $\{p\}_f$ 와 벽면에 분포된 가상의 소음원의 크기 $\{S\}_s$ 의 관계를 나타낸다. 따라서, 공간상의 음압 $\{p\}_f$ 를 측정하면, 벽면에 분포된 가상의 소음원의 크기를 추정할 수 있으며(식 (12)), 이 소음원의 크기로부터 공간상의 임의의 위치에서 음장의 계산이 가능하다(식 (9)).

3.3 전달행렬의 특이성 감소

흡음이 포함되어 전달행렬의 특이성이 감소하는 것은 공진이 발생하는 대부분의 물리계에서 관찰할 수 있다. 예를 들어 1자유도 진동계의 경우, 공진을 일으키는 주파수에 댐핑을 첨가하면, 감쇠비 ζ 의 증가에 따라, 계의 응답이 크게 감소하는 것을 확인할 수 있다⁽¹⁰⁾. 가상의 흡음을 포함한 음향 홀로그래피 방법도 동일한 개념에서 특이성이 감소할 것임을 예상할 수 있다.

수학적으로 가상의 흡음을 포함한 홀로그래피 방법의 전달행렬에서 특이성이 감소하는 것은 식 (11)을 이용하여 확인할 수 있다. 식 (6), (7)을 통해 전달행렬의 특이성을 확인하였던 것과 마찬가지로(2.2절), 이 경우에도 식 (11)에 포함된 행렬 $([D]_s - [M]_s[A])$

의 특이성이 가상 흡음을 통해 사라짐을 확인할 수 있다. 이것은 수학적으로 $([D]_s - [M]_s[A])$ 가 의미 없는 해(trivial solution)만을 갖는 것을 증명하는 것과 동일하다.

$$([D]_s - [M]_s[A])\{p\}_s = 0 \quad (13)$$

즉, 행렬 $([D]_s - [M]_s[A])$ 의 랭크(rank)가 행렬의 크기와 같아서 역행렬을 구하는 경우 0으로 나뉘지는 일이 없어짐을 보이면 된다.

증명은 다음과 같다.

(1) 흡음이 존재하는 공간내에 소음원이 존재하지 않으면, 공간 내부 및 표면의 음압은 항상 0이다.

(2) 식 (13)을 식 (11)과 비교하여 보면, 식 (13)은 흡음이 존재하는 공간에서 소음원의 크기가 0인 경우를 표현한다. 따라서 공간상의 음압은 항상 0이다.

(3) 만약 식 (13)이 의미있는 해(non-trivial solution)를 갖는다면, 식 (13)은 $\{p_s\} \neq 0$ 로 물리적인 사실에 위배된다. 즉, 소음원이 없음에도 불구하고 음압이 존재하는 모순을 낳는다.

(3) 따라서 식 (12)는 항상 의미없는 해를 갖게 되며, $([D]_s - [M]_s[A])$ 는 모든 주파수에서 역행렬을 갖는다.

4. 구(sphere) 내부의 음장에 대한 수치 예제

수치 예제로는 해석적인 해가 존재하고 비교적 표면의 모양이 간단한 구(sphere) 내부의 음장을 사용하였다. 특이성을 비교적 쉽게 관찰할 수 있는 공간으로 직육면체 내부의 공간을 생각할 수 있으나, 정확한 이론해를 구하기 어렵다는 문제점이 있다. 구의 내부표면에 동일한 크기의 속도 음원이 분포한다

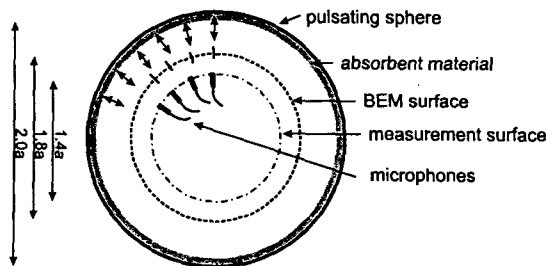


Fig. 2 A pulsating sphere for the numerical examples with microphones and the boundary surface being used in the acoustic holography

고 가정하고, 구내부 표면에 흡음($A_0 \times \rho c = 0.3$)이 존재한다고 가정하여 물리적인 공진이 약하게 발생하도록 하였다(Fig. 2). 이때, 구 내부의 임의의 위치에서의 음압은 다음과 같이 표현된다.

$$p(r) = \rho c S_s \frac{ka}{(i - A_0 \rho c ka) \sin ka - ika \cos ka} \frac{\sin kr}{r/a} \quad (14)$$

여기서, r 은 구의 중심으로부터 임의의 점까지의 거리를 나타내며, S_s 는 속도음원의 크기, A_0 는 벽면의 어드미턴스를 나타낸다. 벽면에 균일하게 소음원이 존재하므로, 비대칭적인 모드는 가진되지 않으며, $A_0 \approx 0$ 이라고 하면, 첫번째 공진은 $ka = 2.0816$ 에서 발생한다.

흡음을 포함한 음향 홀로그래피를 구현하기 위한 적정 흡음값에 대한 조건은 엄밀한 의미에서 사용하는 역행렬을 구하는 프로그램 및 컴퓨터의 정밀도를 바탕으로 결정된다. 즉, 안정적으로 역행렬을 구할 수 있는 특이성의 정도에 따라 사용할 수 있는 최소 어드미턴스가 결정된다. 하지만, 이 가상의 어드미턴스는 특별한 물리적인 의미를 갖는 양이 아니며, 어떠한 양으로 가정하여도 그에 해당하는 등가의 음원을 구할 수 있으므로, 충분히 큰 값으로 가정하면 일반적인 역행렬을 구하는 프로그램에서 큰 문제가 없을 것이다. 따라서, 본 연구에서는 충분히 큰 흡음률에 해당하는 평면파의 완전 흡음 조건, $A(r_s) = 1/\rho c$ 를 사용하기로 한다.

홀로그래피는 구내부에 반경이 $0.9a$ 인 구를 가정하고 그 내부에 적용하였다(Fig. 2). 구표면은 98개의 노드를 갖고, 162개의 삼각형 선형요소를 갖는 경계요소모델로 표현하였다. 곡면을 선형요소로 가정하면, 구내부의 체적이 실제 체적에 비해 작아지는 현상이 발생할 수 있는데⁽¹¹⁾, 이를 보정하기 위하여 실제 경계요소모델의 반경은 $0.917a$ 로 하였다. 음압의 측정이 이루어지는 공간상의 점들로는 반경이 $0.7a$ 인 구의 표면에 고르게 분포된 98개의 점을 사용하였다. 역행렬의 계산은 비교적 널리 사용되고 있는 IMSL Subroutine, LEQT1C를 사용하였다. 계산과정의 수치오차에 의한 영향을 알아보기 위해, 추정오차는 가정하지 않았다.

Fig. 3은 속도조건(neumann condition)에 바탕을 둔 기존의 경계요소법에 근거한 근접장 음향 홀로그래피 방법(식 (4))을 사용해 구내부의 임의의 한 점($r = 0.9a$)에서의 음압을 재구성한 것이다. 먼저 참값을 살펴보면, 음압의 실수부를 나타내는 실선은

홀로그래피 방법(식 (5))을 이용해 동일한 위치에서 음압을 재구성한 것이다. 이 경우도 역시, 공진 주파수 근처(pressure release condition, $ka=3.4906, 4.9927$)에서 큰 오차가 발생하고 있는 것을 알 수 있다. 하지만, $ka=0$ 근처에서는 공진을 보이지 않으므로, 저주파수에서 속도조건에 바탕을 둔 홀로그래피 방법에 비해 적은 오차를 보이고 있는 것을 알 수 있다. 반면, 이 경우도 Fig. 3와 마찬가지로, $ka=4.5$ 근처에서 측정 어레이 마이크로폰의 형태에 따른 오차가 동일하게 발생하는 것을 알 수 있다.

Fig. 5는 본 연구에서 제안한 가상의 흡음을 포함한 홀로그래피 방법을 이용해 음장을 재구성한 결과이다. 그림에서 보는 바와 같이 마이크로폰 형태에 의해서 발생하는 오차($ka=4.5$)를 제외한 대부분의 오차가 사라진 것을 알 수 있다. 다만, 저주파수 부근에서 약간의 오차를 보이는 이유는 주파수가 낮아짐에 따라, 흡음의 효과가 줄어들기 때문이라고 생각할 수 있다.

5. 요약 및 결론

본 논문을 통해 경계요소법에 근거한 근접장 홀로그래피 방법의 수치 오차를 보고하고, 이의 해결 방법을 제시하였다. 이러한 수치 오차의 원인은 홀로그래피를 위해 가정한 경계조건이 물리적으로 타당하지 않기 때문에 발생한 것임을 확인하였으며, 이의 개선을 위해 가상의 흡음을 포함한 홀로그래피 방법을 제안하였다. 해석해가 존재하는 구 내부의 음장에 대한 수치 예제에서 이러한 사실의 확인할 수 있었다.

역행렬 계산과정에서 발생하는 수치오차는 사용하는 프로그램의 정확도와 깊은 관련을 맺고 있다. 정확도를 증가시키에 따라서 이러한 오차는 아주 작은 구간에서 발생하는 현상이 될 수 있다. 하지만, 어떠한 경우에도 행렬의 크기가 커지면 역행렬의 계산시에 수치오차가 포함될 수 있으며, 일반적으로 이러한 오차가 발생하는 주파수 영역을 예측하기 힘들다. 따라서, 이러한 오차의 발생 가능성을 근본적으로 해결하는 한 방법으로서 본 연구에서 제안한 가상의 흡음을 포함한 홀로그래피 방법이 사용될 수 있다.

참고 문헌

- (1) Tikhonov, A. N., and Arsenin, V. Y., 1977, *Solutions of Ill-posed Problems*, John Wiley & Sons, pp. 112~130.
- (2) Veronesi, W. A., and Maynard, J. D., 1989, "Digital Holographic Reconstruction of Sources with Arbitrarily Shaped Surfaces," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 85, pp. 588~598.
- (3) B.-K. Kim and J.-G. Ih, 1996, "On the Reconstruction of the Vibro-Acoustic Field Over the Surface Enclosing an Interior Space Using the Boundary Element Method," *J. of Acoust. Soc. Am.*, Vol. 100, pp. 3003~3016.
- (4) Morse, P. M., and Ingard, K. U., 1968, *Theoretical Acoustics*, McGraw Hill, New York, pp. 319~322.
- (5) Ciskowski, R. D., and Brebbia, C. A., 1991, *Boundary Element Methods in Acoustics*, Elsevier Applied Science, London, pp. 13~76 .
- (6) Suzuki, S., Maruyama, S., and Ido, H., 1989 "Boundary Element Analysis of Cavity Noise Problems with Complicated Boundary Conditions," *J. of Sound and Vib.*, Vol. 130, pp. 79~91.
- (7) 김영기, 김양한, 1998, "능동음원 및 벽면 어드미턴스의 재구성을 통한 실내 소음원의 정확한 규명 방법," *한국소음진동공학회지*, 제 8 권, 제 3 호, pp. 435~440.
- (8) Kim, Y.-K., and Kim, Y.-H., 1999, "Holographic Reconstruction of Active Sources and Surface Admittance in Enclosure," *J. of Acoust. Soc. Am.*, Vol. 105, pp. 2377~2383.
- (9) Morse, P. M., and Feshbach, H., 1968, *Method of Theoretical Physics, Part I*, McGraw-Hill, New York, pp. 676~679.
- (10) S. S. Rao, 1990, *Mechanical vibrations*, Addison-Wesley, New York, pp. 127~141.
- (11) Bernhard, R. J., Gardner, B. K., and Mollo, C. G., 1987, "Prediction of Sound Fields in Cavities Using Boundary-Element Methods," *AIAA Journal*, Vol. 25, pp. 1176~1183.
- (12) Blevins, R. D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, pp. 347~350.