구조물 동특성 변경 관련 연구 분야 및 동향 (II)

박 윤 식 · 박 용 화
(한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어 연구센터)

5. 본 론

지난 호에서 언급한 구조 변경법의 분류 기준을 토대로 지금까지의 연구 내용, 사용되는 수식, 적용 사례 및 장단점 등을 서술하면 다음과 같다.

Problem 1 :
Given K, M, ΔK and $\Delta M \Rightarrow$Find $\overline{\Lambda}$ and $\overline{\Phi}$

이 문제는 구조 변경 후의 질량과 강성 행렬을 구성하고 변경된 모드 특성을 구하는 전형적인 고유치 해석(eigenvalue analysis) 문제이다. 여기에는 다음과 같이 수치적 방법과 해석적 방법의 두 가지가 있다.

1.1 수치적 방법을 이용한 고유치 해석

이 문제는 일반적인 수치 해석법에서 다루는 고유치 해석 문제이다. 강성행렬과 질량행렬 변화를 유한요소법을 통해 수립한 후 다음과 같은 고유치 문제를 풀어 변경된 고유치 및 고유형상을 직접 구한다.

$$[K+\Delta K-\bar{\lambda}(M+\Delta M)]\bar{\phi}=[\overline{K}-\bar{\lambda}\overline{M}]\bar{\phi}=0 \quad (1\text{-}1)$$

고유치 해석을 위해 자코비 방법(Jaccobi method), Inverse Iteration Method, Subspace Iteration Method 및 이를 개선한 다양한 방법들이 소개 되고 있다[1-1-1,2]. 이 방법들에서는 일반적으로 구조 변경후의 질량 및 강성 행렬($\overline{K}$, $\overline{M}$)에 행렬 변환을 연속적으로 취하여 대각행렬로 만들고 대수방정식을 풀어 고유치와 고유형상을 구한다. 변환 행렬, T는 연속된 변환행렬의 단순 곱으로 표현되며 결과적으로 다음과 같은 행렬 변환을 얻는다.

$$T^T\overline{K}T=\overline{\Lambda} \quad (1\text{-}2)$$

$$T^T\overline{M}T=I \quad (1\text{-}3)$$

원하는 모드 특성을 만족하는 구조변경을 얻기 위하여 다양한 구조변경을 반복적으로 시도하고 고유치 해석하는 과정을 거친다. 이 방법은 유한요소방법을 이용하여 다양한 구조 변경을 고려할 수 있는 장점이 있지만 반복적인 고유치 해석에 소요되는 수치 계산양이 많은 단점으로 인해서 수치 해석의 수렴성을 높이기 위한 연구가 중점적으로 진행되어 왔다.

수렴성은 초기의 변환행렬을 어떻게 잡느냐에 따라 민감하게 결정된다. 초기 변환 행렬은 주로 질량의 밀도가 높은 자유도에 큰 값을 주거나 assumed mode를 변환 행렬의 열벡터로 주는 방법으로 수렴성을 높인다[1-1-2]. Subspace Iteration Method는 수렴성을 높이기 위해 변환행렬 T의 열의 수를 관심 있는 저차 모드 몇 개로 한정하여, 식 (1-1)의 고유치 문제의 자유도를 축약 후에 고유치 해석을 수행한다. 이 방법은 ANSYS, NASTRAN등의 일반적인 진동 해석용 상용 유한요소 S/W에 적용되고 있다. 한편 Mass Condensation, Stiffness Condensation, Guyan Reduction 등의 각종 자유도 축약 방법은 시스템 행렬인 $\overline{M}$, $\overline{K}$의 자유도를 줄인 후 근사해를 구함으로써 수치 해석의 계산량을 줄이는 방법이다[1-1-3]. 이때 주 자유도 (master DOF)를 잡은 방법이 수치 계산의

효율성을 높이는데 중요한 관건이며 Shah 등은 해석적으로 주 자유도를 잡은 방법을 연구했다[1-1-4]. 상기의 상용 S/W에서는 밀도가 높은 자유도를 주 자유도로 자동으로 선정하는 알고리듬이 추가되어 있다.

최적 설계는 고유치 해석과 민감도 해석을 통합하여 구조물을 설계하는 방법이다. 이때 복잡한 구조물에 대해서는 유한요소해석 과정에서 많은 자유도가 필요하므로 상기의 방법으로 수치해석의 수렴성을 높여도 구조물의 고유치 해석에는 막대한 계산량이 소요된다. 이것은 식 (1-1)의 고유치 문제를 직접 다루기 때문에 발생하는 문제이다. 따라서 고유치 해석을 최적 설계의 매 단계 마다 하는 대신 전단계에서 계산된 고유치 해석 결과를 사용하여 다음 단계의 모드 특성을 간단한 계산으로 예측하는 고유치 재해석 방법에 관해서 많은 연구가 수행되어 왔다. 다음의 Problem 2에서 설명되는 고유치 재해석 방법은 이와 같은 필요에 의해서 개발된 방법이다.

1.2 해석적 방법을 이용한 고유치 해석

이 문제는 주로 수학적인 모델 수립이 가능한 보, 평판 구조물에 질량, 강성 및 경계조건의 변화가 있을 때 고유치의 변화를 수학적으로 구한다.

보의 경우, 구조 변경후의 고유치 변화를 그린 함수 방법(Green's function method), 변분 원리(variational principle)를 이용한 적분 방법(integral method) 등을 사용해서 구한다. Tzioufas와 Kaljevic는 보 위에 분산된 점질량-선강성-선감쇠 계가 있을 때 고유치 변화를 연구했다[1-2-1,2]. Bergman은 같은 문제에 대한 주파수 응답 함수의 변화를 고찰했다[1-2-3]. Kulkla는 평행한 두 보가 선형 스프링으로 연결되있을 때 연결위치와 고유진동수의 변화의 관계를 연구하였다[1-2-4]. Chondros는 보 위에 균열이 있을 때 고유진동수를 계산하는 방법을 연구하였다[1-2-5].

평판의 경우에, Bhat는 레이라이-리츠 방법(Rayleigh-Ritz method)을 통해서 평판의 고유진동수를 구하는 방법을 제시했으며[1-2-6], Liew는 Assumed Mode Method를 사용해서 평판의 고정 경계가 불균일 할 경우의 고유진동수를 예측했다[1-2-7]. Ingber는 그린 함수 방법을 사용해 집중 질량과 강성이 있을 경우에 고유진동수 변화를 관찰하고 결과를 실험으로 검증하기도 했다[1-2-8].

위의 연구들은 해석적인 관점에서 제한된 구조물의 구조변경 효과를 예측했다는 점에서 일반적 구조물의 변경에 적용하는 데는 부족하나 이론적 고찰 및 기타 구조변경 방법과의 비교 연구로서 유용하다.

Problem 2 :

Given Λ, Φ, ΔK and $\Delta M \Rightarrow$ Find $\bar{\Lambda}$ and $\bar{\Phi}$

이 문제는 구조 변경전 구조물의 동특성을 이용하여 구조 변경후의 모드 특성을 구하는 방법이다. 변경후의 고유치 문제는 본 원고 (I)편의 식 (2)와 식 (3)을 이용하여 다음과 같이 변경전 구조물의 모드 특성, 그리고 질량 행렬 및 강성 행렬의 변화로 나타낼 수 있다.

$$(\Lambda - \bar{\lambda} I + \Phi^T \Delta K \Phi - \bar{\lambda} \Phi^T \Delta M \Phi)\bar{\phi} = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

위의 고유치 문제는 변경전 구조물의 수치 모델이 필요 없이 고유치 해석을 할 수 있으므로 고유치 재해석과 실험적 구조 변경법에 가장 많이 이용되었다. 여기서 $\Phi^T \Delta K \Phi$와 $\Phi^T \Delta M \Phi$는 일반적으로 행렬의 각 요소가 가득한 행렬이 되므로 식 (2-1)의 고유치 문제를 직접 풀지 않고 몇 가지 가정을 도입하여 구조변경을 수행 한다. 식 (2-1)에 도입한 가정에 따라 미소 구조 변경법(small modification method), 모드 합성법(modal synthesis method), 국부 구조 변경법(localized modification method) 그리고 라그랑지 승수법(lagrange multiplier method)으로 구조 변경법을 대별할 수 있다.

미소 구조 변경법은 구조 변경, 즉 ΔM과 ΔK의 크기가 작은 경우를 가정하고 모드 특성 변화를 예측하는 방법이다. 레이라이 지수법(Rayleigh quotient method), 섭동법(perturbation method) 그리고 민감도 해석법(sensitivity analysis method) 등이 이 방법에 속한다. 이 방법들은 서로 비슷한 특성을 공유하고 있으며 경우에 따라 같은 수식으로 나타낼 수 있다. 모드 합성법은 식 (2-1)의 고유치 문제를 저차 모드로 축약하여

다루는 방법이다. 불완전 모드 모델(incomplete modal model)을 이용한 모드 합성법과 실험적 구조 변경법의 하나인 Dual Modal Space Method(DMSM) 등이 이 방법에 속한다. 국부 구조 변경법은 선강성 및 점질량 등의 국부적인 구조변경을 다룬다. 라그랑지 승수법은 구조물의 변위 구속조건이 변경되는 특별한 경우에 모드 특성 변화를 계산하는 방법이다. 위 구조 변경법들의 기본 수식 및 고유치 해석법, 그리고 적용사례와 장단점을 서술하면 다음과 같다.

2.1 레이라이 지수법

작은 구조변경이 있을 경우에 모드 형상의 변화가 작으므로 모드 형상 변화를 무시하고 레이라이 지수법을 사용해 변경된 고유치 $\bar{\lambda}$ 및 고유진동수의 변화량 $\Delta\omega_n$을 계산하면 다음과 같다.

$$\bar{\lambda}=\frac{\phi^T(K+\Delta K)\phi}{\phi^T(M+\Delta M)\phi}=\frac{\lambda+\phi^T\Delta K\phi}{1+\phi^T\Delta M\phi} \quad (2\text{-}2)$$

$$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_n}=\frac{\phi^T\Delta K\phi-\lambda\phi^T\Delta M\phi}{2\lambda} \quad (2\text{-}3)$$

초기의 연구로서 Irons은 유한 요소 방법을 이용한 고유치 재해석 시에 이 방법을 이용하였다[2-1-1]. Wang과 Pilkey는 선강성, 점질량, 트러스 강성변화 등의 국부 구조변경이 있을 때의 다양한 고유치 변화식을 유도하였다[2-1-2]. 최근에 Pilkey와 Schramm은 주파수에 따라 질량과 강성의 변동이 있는 구조물에 대해서 식 (2-2)을 적용하여 반복계산을 통해 고유진동수를 계산하는 방법을 제시하였다[2-1-3]. Carne은 구조물의 연결을 강성연결로 모델하고 고유진동수 변화를 계산하였다[2-1-4]. 레이라이 지수법은 고유치 변화를 비교적 간단한 수식으로 예측할 수 있다는 장점이 있으나 작은 구조 변경에 적합하고 선강성, 점질량 등의 단순 구조변경에 주로 적용되고 있다.

2.2 섭동법

섭동법은 구조변경 행렬, ΔM과 ΔK를 변경전 구조물의 시스템 행렬 K, M의 섭동(perturbation)으로 표현하고 모드 특성 변화, 즉 $\Delta\lambda$과 $\Delta\phi$를 차수 분석(order analysis)을 통하여 구하는 방법이다. 구조변경 후의 고유치 문제는 본 원고 (I)편의 식 (3)으로부터 다음과 같이 변경전 구조물의 시스템 행렬과 모드 특성의 섭동으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}(\Phi+\Delta\Phi)^T(K+\Delta K)(\Phi+\Delta\Phi)\\ =(\Phi+\Delta\Phi)^T(M+\Delta M)(\Phi+\Delta\Phi)(\Lambda+\Delta\Lambda)\end{aligned} \quad (2\text{-}4)$$

모드 형상 변화를 다음과 같이 대각행렬 I와 비대각행렬 C를 사용하여 나타내고,

$$\Phi+\Delta\Phi=\Phi(I+C)^T \quad (2\text{-}5)$$

식 (2-4)의 좌우변의 1차항을 비교하면 다음과 같다.

$$\Phi^T\Delta K\Phi-\Lambda\Phi^T\Delta M\Phi=\Delta\Lambda+C^T\Lambda-\Lambda C^T \quad (2\text{-}6)$$

식 (2-6)의 좌변은 구조변경과 관계되고 우변은 고유치 변경과 관계된 항이다. 우변의 $\Delta\Lambda$는 대각 행렬이고 나머지 항은 모드 형상 변화에 의해 유발되는 비대각 행렬의 항이다. 섭동양이 작다는 가정하에 양변의 대각성분을 비교하면 다음과 같이 i번째 고유치 변화를 구할 수 있다.

$$\Delta\lambda_i=\phi_i^T\Delta K\phi_i-\lambda\phi_i^T\Delta M\phi_i \quad (2\text{-}7)$$

식 (2.4)와 식 (2.5)로부터 i번째 고유벡터의 섭동을 구하면 다음과 같다.

$$\Delta\phi_i=\sum_{j=1,i\neq j}^{N}p_{ij}\phi_j \quad (2\text{-}8)$$

여기서 $p_{ij}=(\phi_j^T\Delta K\phi_j-\lambda_i\phi_j^T\Delta M\phi_j)/(\lambda_i-\lambda_j)$

이 방법은 최초로 Rayleigh에 의해 제시된 후[2-2-1], 유한요소법을 이용한 재해석 분야에서 최근까지 많은 연구 및 적용이 있었다[2-2-2,3]. 고유치 예측의 정확도를 높이기 위해서 Eldred, Chen등은 고차항을 고려한 방법을 제안했다[2-2-4,5]. 섭동법은 실험적 구조변경 분야에서 고유진동수와 모드 형상 변화를 구하는 일반적인 방법론 중의 하나로 사용되고 있으며 선강성 및 점질량 변경의 위치선정[2-2-6], 감쇠 효과 예측 등에 적용되었다[2-2-7]. 섭동법은 모드 특성 변경의 예측이 용이하지만 모드 형상의 변화가 클 경우에는

식 (2-6)에서 볼 수 있듯이 비대각 성분인 C의 값이 커지고 따라서 식 (2-7)과 식 (2-8)의 1차항의 섭동은 정확하지 않은 결과를 준다. 따라서 기본적으로 이 방법은 국부적이고 적은 양의 구조변경에 적합하다. Problem 8에서 설명될 최적 설계의 경우에는 이와 같은 단점을 보완하고 큰 양의 구조변경을 다루기 위해 수치 반복 계산과 predictor-corrector 방법을 이용하는 nonlinear inverse perturbation방법이 제시되었다[2-2-8].

2.3 민감도 해석법

민감도 해석법은 유한요소법을 이용한 구조물의 최적설계 기법으로 많이 연구 되었다. 이 방법의 주된 목적은 설계변수 변경에 대한 동특성의 변경을 예측하는 것이다. 본 원고 (I)편의 식 (1)에서 정의된 변경전 구조물의 고유치 문제를 설계변수에 대해서 미분하고 본 원고 (I)편의 식 (3)의 관계식을 이용하면 다음과 같은 설계변수에 대한 고유진동수와 모드 형상의 민감도를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial b} = \phi_i^T \left(\frac{\partial K}{\partial b} - \lambda \frac{\partial M}{\partial b} \right) \phi_i \qquad (2\text{-}9)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial b} = \sum_{j=1, i \neq j}^{N} p_{ij} \phi_j \qquad (2\text{-}10)$$

여기서 $p_{ij} = \phi_j^T \left(\frac{\partial K}{\partial b} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial b} \right) \phi_j / (\lambda_i - \lambda_j)$

위의 민감도 정식은 초창기에 Fox, Rogers, Rudisill 등에 의해서 고유치 문제의 직접 미분 관점에서 연구되었다[2-3-1,2,3]. 유한요소 해석의 관점에서 Haug와 Choi는 변분 원리(variational principle)를 사용해서 민감도를 정식화했다[2-3-4,5]. 한편 Yoon은 반복계산을 통해서 민감도를 구하는 방법을 제시하였다[2-3-6].

고유치는 설계변수에 대해서 비선형적인 변동을 보이므로 고유치 변화가 클 경우의 정확한 예측을 위해서 2차 민감도 정식이 필요하다. Belle, Jankovic, Brandon등은 고차의 민감도 정식을 제시 했으며[2-3-7~9] 최근에 Zeng은 민감도 식을 상태공간(state space)형태로 나타내고 수치적분을 통해서 구조 변경 양이 큰 경우에도 정확한 고유치 변동을 예측하도록 하였다[2-3-10].

초창기의 최적설계에서는 고유진동수 만을 주된 목적함수로 고려하였으나 최근에는 모드 형상도 진동응답의 저감 관점에서 중요한 목적함수가 되고 있다. 이를 위해서 최근까지 Nelson, Lim, Wang, Sutter, Alvin, Zhang, Zhang 등에 의해서 모드 형상의 민감도에 관한 많은 연구가 이루어 졌다[2-3-11~17].

최적설계 시에 구조물이 대칭형태의 최적치에 수렴하는 경우가 많다. 이때 구조물은 중근의 고유치를 가질 수가 있는데, 이 경우에 민감도 정식화를 위해서는 특별한 유도 과정이 필요하다. Chen 등은 중근의 고유치(repeated eigenvalue)의 민감도를 효과적으로 구하는 방법을 연구하였다[2-3-18].

민감도 정식인 식 (2-9)와 식 (2-10)으로부터 설계변수의 변동 에 대한 고유진동수와 고유형상의 변동은 1차 Tayler 급수를 사용하여 다음과 같이 구해진다.

$$\Delta\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial b} \Delta b, \qquad \Delta\phi = \frac{\partial \phi}{\partial b} \Delta b \qquad (2\text{-}11)$$

식 (2-11)를 이용하여 구조변경의 효과를 예측할 수 있으며 이를 실험적 구조 변경에 적용하는 연구가 진행되어 왔다. Rizai와 Raju는 보의 단면 변화에 대한 고유진동수 변화를 예측했다[2-3-19,20]. Patrick은 자동차 조인트 부위의 선강성 변화가 자동차의 S비틀림 모드에 주는 영향을 실험적으로 관찰했다[2-3-21]. Ai-Qun는 기어박스 셀의 변경에 의한 고유진동수 변화를 관찰하였다[2-3-22]. Wang은 H형 구조물의 변경에 2차 민감도를 적용하였다[2-3-23]. 한편 Heo 등은 부분구조에 변경이 있을 때의 민감도를 효과적으로 계산하는 방법을 제시하였다[2-3-24].

식 (2-11)의 동특성 예측치는 식 (2-7)과 식 (2-8)의 섭동법을 이용한 예측치와 동일한 값을 가진다. 따라서 위의 방법은 섭동법과 같이 모드 특성 변화가 큰 경우에는 부정확한 결과를 준다. 민감도가 큰 설계변수는 적은 양으로 효과적인 동특성 변경을 얻을 수 있는 설계변수이므로, 민감도는 효과적인 구조변경의 위치와 종류를 선정하는데 있어

서 유용하다. 이 방법은 설계변수에 대한 질량 및 강성 행렬의 미분치가 해석적으로 밝혀져 있는 단순 구조물의 변경이나 유한요소 모델과 연계한 구조변경의 경우에 유용하므로 실험적 구조 변경에 있어서는 대개 선강성, 점질량, 보, 평판의 단순 구조물의 변경에 적용되어 왔다.

2.4 모드 합성법

모드 합성법은 구조물의 제한된 수의 저차 모드(incomplete modal model 또는 truncated modal data)를 사용하여 모드 형상 행렬, $\Phi_{N\times m}$을 구성하고 이를 이용해서 고유치 문제(2-1)를 축약하여 푸는 레이라이-리츠 방법의 일종이다. 여기서 N은 구조물의 자유도이며 m은 고려하는 저차 모드의 개수이다. 다음과 같이 물리 좌표(physical coordinate), $x_{N\times 1}$를 $\Phi_{N\times m}$를 이용하여 일반좌표(generalized coordinate), $P_{m\times 1}$로 변환한다.

$$x_{N\times 1} = \Phi_{N\times m} p_{m\times 1} \qquad (2\text{-}12)$$

위의 변환식으로 식 (2-1)의 고유치 문제를 축약하면 다음과 같이 표현된다.

$$(\Lambda_{m\times m} - \bar{\lambda} I_{m\times m} + \Phi_{N\times m}{}^T \Delta K \Phi_{N\times m} - \bar{\lambda}\Phi_{N\times m}{}^T \Delta M \Phi_{N\times m})\bar{p}_{m\times 1} = 0 \qquad (2\text{-}13)$$

$\bar{P}_{m\times 1}$는 축약된 모드 공간(modal space)에서 정의된 고유벡터이며 변경후의 모드 형상은 다음과 같이 구해진다.

$$\bar{\Phi}_{N\times m} = \Phi_{N\times m} \bar{P}_{m\times m} \qquad (2\text{-}14)$$

위의 고유치 문제 (2-13)의 특성을 해석적으로 고찰하기위해 Braun과 Ram은 레이라이-리츠 방법 관점에서 문제를 다루었다[2-4-1~2]. 이때 식 (2-13)의 축약된 고유치 문제에 사용된 불완전 모드 모델, $\Phi_{N\times m}$이 최적의 리츠 벡터(Ritz vector)임을 보였다[2-4-1]. 또한 근사적으로 구한 고유치를 사용하여 고유치 참값의 상한과 하한을 구하였다[2-4-2,3]. 이때 누락된 고차 모드가 사용된 저차 모드의 모드 형상과 선형적으로 유사성이 작을수록 모드 자름 오차(modal truncation error)는 커짐을 보이고 이를 이용하여 구조변경 결과의 성능을 예측하였다[2-4-4]. 이 방법은 불완전 모드 모델을 사용한 근사치 해석방법이지만 윗 절의 미소 구조변경법과는 달리 관심 있는 특정 모드만이 아니라 충분한 개수의 저차 모드를 동시에 다루므로 더욱 정확한 모드 특성 예측 결과를 줄 수 있다.

Wang, B. P.과 Wang, W.는 모드 합성법을 유한요소법을 이용한 최적설계시의 고유치 재해석 방법으로 다루었으며 다른 방법과의 비교를 통해 적은 계산으로 정확한 결과를 얻을 수 있음을 고찰하였다[2-4-5,6].

한편 실험적 구조변경의 분야에서 Braun은 고차 모드 벡터를 다양하게 고려하여 실험적 구조변경에 적용하였고[2-4-7] Xiuqing은 차량의 구조변경에 적용하였다[2-4-8]. 한편 Wallack은 리브 보강재(rib-stiffener)의 구조변경에 적용했으며 이때, 리브의 회전 자유도를 직선 자유도의 조합으로 나타내어 다루었다[2-4-9]. Cafeo는 회전자유도의 동특성을 레이저 변위 측정기를 사용하여 측정하고 보 구조물의 구조변경에 적용하였다[2-4-10].

이 방법은 실험적 구조변경에 가장 많이 적용된 방법으로서 상용 S/W인 SMS-STAR MODAL과 SYSTUNE등의 구조변경 routine에 적용되어 점질량, 선강성, 간단한 외형의 보 구조변경 등에 응용되고 있다.

실험적 구조변경에 있어서 실제적으로는 연속체 구조물인 보, 평판 등의 구조변경이 요구된다. 이때 회전자유도의 동특성에 대한 파악이 중요하며 회전자유도의 진동을 직접 구하거나 직선자유도를 통하여 곡선 접합(curve fitting)을 해주는 다양한 방법이 소개 되었다. 이에 관한 연구는 추후에 서술할 Problem 14에서 별도로 자세히 다룰 것이다.

2.5 Dual Modal Space Method (DMSM)

DMSM는 강제진동 해석 및 고유치 재해석을 위해서 식 (2-13)의 고유치 문제를 모드 공간 I과 모드 공간 II 로 나누어 풀어주는 모드 합성법의 일종이다. 여기서 모드 공간 I과 모드 공간 II는 각각 식 (2-14)의 행렬, $\Phi_{N\times m}$와 $\bar{P}_{m\times m}$의 열벡터를 기본 벡터로 하는 선형 공간을 의미한다.

위의 불완전 모드 모델을 이용한 모드 합성법과 이론적으로는 동일하나 모드 공간 변

환(modal space transformation) 관점에서 문제를 다루어 실험적 구조변경법과 오차해석에 적용하였다는 점에서 차이가 있다. 식 (2-12)의 변환 식에 의해서 물리 좌표 x는 모드 좌표 q를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$x = \Phi_{N\times m}\overline{P}_{m\times m}q = \overline{\Phi}_{N\times m}q \tag{2-15}$$

따라서 구조변경 후의 강제진동해석, 고유치 해석 등을 축약된 모드 영역상에서 해석해주고 구한 모드 좌표 q를 이용하여 물리적인 변수, x로 환원해줄 수 있다.

DMSM는 Luk 과 Mitchell에 의해서 제시 되었으며 구조물의 질량 및 강성 행렬 규명[(2-5-1)]과 점질량과 선강성의 구조변경[(2-5-2)], 구조물 결합 시의 연결 강성 변경 등에 적용되었다[(2-5-3)]. Deel은 실험적 모드 해석시의 잡음이 동특성 예측 결과에 미치는 영향을 DMSM를 이용하여 고찰하였다[(2-5-4)]. Elliot은 보를 질량과 강성 행렬대신 회전 자유도를 포함한 전달 행렬(transfer matrix)로 모델하고 구조변경을 시도하였다[(2-5-5)].

위의 불완전 모드 모델을 이용한 근사치 해석법과 DMSM는 모드 합성법으로서, 변경전 구조물의 모드 공간으로 문제를 축약하여 푸는 레이라이-리츠 방법의 일종이다. 따라서 고려되는 모드의 개수가 불충분 하거나 또는 모드 형상의 변화가 큰 구조변경이 발생할 경우에는 부정확한 결과를 줄 수 있다. 이 오차는 근본적으로 고차 모드 형상의 누락으로 발생하며 모드 자름 오차라고 명칭한다. 모드 자름 오차는 측정점의 개수가 측정 모드의 개수보다 일반적으로 매우 크므로 실험적 구조변경에서는 필연적으로 발생하는 오차이다. Elliot과 Avitabile은 모드 자름 오차를 DMSM관점에서 다루었으며 고차 모드의 누락이 고유치 해석의 오차에 미치는 영향을 해석하였다[(2-5-6,7)]. 고려되는 저차 모드와 누락된 고차 모드가 선형적으로 유사성이 작은 구조물일수록 모드 자름 오차는 크게 된다. 따라서 모드 해석시 모드 형상을 관찰하여 변경후 구조물의 거동을 충분히 나타낼 수 있도록 모드의 개수를 선정할 필요가 있다.

2.6 국부 구조 변경법

이 방법은 특별한 구조 변경의 하나인 국부적인 구조변경 즉, 선강성과 점질량의 구조변경을 다루며 상기의 미소 구조변경법과는 달리 구조변경 양에는 제한이 없이 정확한 고유치를 구할 수 있는 방법이다. 설명을 위해서 하나의 선강성 변경이 있는 경우를 고려하여 서술한다. 강성변화는 다음과 같이 강성의 크기, k와 부착 위치, i를 나타내는 벡터의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\Delta K = kl_i l_i^T \tag{2-16}$$

이때 벡터 l_i는 변경 위치 i에서 1의 값을 가지고 나머지는 0인 벡터이다. 식 (2-16)의 구조변경이 있을 경우에 식 (2-1)의 변경후의 고유치 문제는 다음과 같이 표현된다.

$$(\Lambda - \overline{\lambda}I + kuu^T)\overline{\phi} = 0 \tag{2-17}$$

여기서 벡터 는 다음과 같이 변경전 구조물의 i번째 절점의 모드 형상이다.

$$u = \Phi^T l_i \tag{2-18}$$

식 (2-17)이 비자명해(non-trivial solution)를 갖는 조건으로부터 다음과 같은 주파수 방정식을 얻는다.

$$\sum_{m=1}^{N}\frac{u_m^{\,2}}{\lambda_m - \overline{\lambda}} = -\frac{1}{k} \tag{2-19}$$

위의 주파수 방정식의 근인 $\overline{\Lambda}$는 변경후의 고유치이며 일반적으로 Newton-Raphson 방법을 통하여 구한다. 구한 고유치에 대해서 식 (2-17)의 비자명해(non-trivial solution)를 구하여 변경된 모드 형상을 구한다.

이 방법은 초기에 Weissenburger와 Pomazal에 의해서 제안된 후로 Hallquist와 Snyder에 의해 주로 구조물간의 선강성 연결, 점질량 변경 등에 적용되었다[(2-6-1~6)]. 실험적 구조변경법으로서 O'Callahan이 3차원 보 구조물의 변경에 적용했다[(2-6-7)].

이 방법은 변경전 구조물의 모드 데이터를 사용하나 식 (2-19)에서 볼 수 있듯이 정성적으로는 구조물의 주파수 응답 함수의 결합 관계를 통해서 주파수 방정식을 얻는 리셉턴스 방법(receptance method)으로 볼 수가 있다. Ram은 현(string)에 점질량-선강성 시스템(lumped mass-stiffness system)이

부착될 때의 고유진동수 변화를 리셉턴스 방법 관점에서 수학적으로 고찰하였다[2-6-8]. Wang은 주파수 응답 함수로부터 식 (2-19)를 유도하였으며 선강성 변화가 있을 때 고유치 변경의 한계에 대해서 고찰 하였다[2-6-9].

한편 Kashiwagi는 식 (2-19)의 주파수 방정식의 풀이를 위해 Newton-Raphson방법 대신에 Sturm Sequence Property를 이용하여 정확한 고유치를 효율적으로 구하는 연구를 하였다[2-6-10,11].

이 방법은 상기의 미소 구조 변경법이나 모드 합성법 등과는 달리 구조변경의 양에 제한이 없이 정확한 고유치 해석을 할 수 있으나 선강성과 질량 구조변경 등의 국부적인 구조변경에 제한되어 있다.

2.7 라그랑지 승수법

이 방법은 구조물 간의 연결로 인한 구속조건을 다루기 위하여 변경전 구조물의 모드 데이터와 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)를 사용하는 방법이다. 구조물의 점질량, 선강성 변경, 지지점 및 구조물간의 연결 문제 등, 변위의 구속조건을 변경하는 특별한 경우가 주로 연구되었다. 이 방법은 이론상 위의 국부 구조 변경법의 일반화된 방법론이다.

변경전 구조물에 부가 구조물 ΔK, ΔM이 결합하는 일반적인 경우에 라그랑지 승수를 사용하여 주파수 방정식을 구해보면 다음과 같다. 구조물이 조화 운동을 할 때 변경후 구조물의 운동에너지(T)와 위치에너지(U)는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 q^T \Phi^T M \Phi q + \frac{1}{2}\omega^2 x^T \Delta M x = \frac{1}{2}\omega^2 q^T q + \frac{1}{2}\omega^2 x^T \Delta M x \quad (2\text{-}20)$$

$$U = \frac{1}{2} q^T \Phi^T K \Phi q + \frac{1}{2} x^T \Delta K x = \frac{1}{2} q^T \Lambda q + \frac{1}{2} x^T \Delta K x \quad (2\text{-}21)$$

여기서 q는 변경전 구조물의 모드 좌표이고 x는 부가 구조물의 물리 좌표이다. 변경전 구조물과 부가 구조물의 결합관계를 다음과 같은 선형 구속조건으로 나타낸다.

$$B\Phi q - x = 0 \quad (2\text{-}22)$$

윗 식 (2-20), (2-21), (2-22)과 라그랑지 승수, f를 사용하여 라그랑지안(Lagrangian), L을 구성하면 다음과 같다.

$$L = T - U + f^T (B\Phi q - x) \quad (2\text{-}23)$$

식 (2-23)의 라그랑지안을 각각의 독립변수와 라그랑지 승수로 미분하고 f에 대해서 풀면 다음과 같은 주파수 방정식을 얻는다.

$$\left[B\Phi(\Lambda - \omega^2 I)^{-1}\Phi^T B^T + (\Delta K - \omega^2 \Delta M)^{-1}\right] f = G(\omega) f = 0 \quad (2\text{-}24)$$

이 문제의 특성 방정식은 다음과 같은 행렬식으로 정의되고 행렬식 탐색법을 통하여 고유치를 구한다.

$$det(G(\omega)) = 0 \quad (2\text{-}25)$$

특정 위치를 지지하는 경우는 지지되는 자유도의 강성 변경이 무한대 값을 가지므로 식 (2-24)의 구조변경 행렬에 해당하는 부분이 0행렬인 경우이다. 구조변경이 하나의 선강성인 경우, 식 (2-24)과 식 (2-25)는 국부 구조변경법의 결과인 식 (2-19)와 일치한다.

기존의 연구에서는 보나 평판 구조물에 단순 질량, 강성 구조변경이 있거나 특정지점을 고정할 경우의 고유치 변화를 다루었다. Dowell은 이 방법을 사용하여 평판의 고정문제, 감쇠문제, 비선형계의 고유치 문제, 점질량-선강성 시스템 간의 연결 및 분리 문제 등을 다양하게 다루었으며 고유치 변화의 특성 등을 주파수 응답 함수 관점에서 해석하기도 하였다[2-7-1~7]. Howell 등도 평판에 선 강성을 부착할 때의 구조변경을 주파수 응답 함수를 사용하여 다루었다[2-7-8]. 최근에는 Hu등이 평판에 리브 보강재를 부착하는 문제를 이 방법을 이용하여 다루었다[2-7-9]. Zeng은 보 구조물에 선 강성과 지지점이 동시에 변화할 때의 고유치 해석을 수행하였다[2-7-10].

식 (2-24)의 주파수 방정식의 행렬 $G(\omega)$는 변경전 구조물과 부착 구조물의 결합부위에서의 주파수 응답 함수와 일치하므로 리셉턴스 방법의 일종이라고 볼 수 있다. 라그랑지 승수, f는 결합 위치에서 구조물 간에 작용하는 내력이다. 리셉턴스 방법은 다른 방법에서는 다루기 힘든 구조물 간의 연결문제나 모드 영역에서 파악하기 힘든 비선형계의 진

동 해석 등에 응용될 수 있으며[2-7-5] 구조 변경의 양에 관계 없이 정확한 고유치 해석이 가능하다. 한편 식 (2-24)은 주파수 응답 함수를 모드 합(modal summation)으로 나타냈으므로 다른 모드 영역의 방법과 같이 충분히 많은 모드를 고려하여 모드 자름 오차를 줄일 때 정확한 해를 보장할 수 있다. 한편 식 (2-25)의 고유치 해석을 위해서는 행렬식 탐색 방법(determinant search method)이 사용되므로 계산량이 많은 단점이 있다. 따라서 이 방법은 비교적 결합부위의 자유도가 작은 간단한 구조변경에 적합하며 최적설계 보다는 수학적인 관점에서 구조 변경으로 인한 모드 변화의 경향을 연구하기 위해서 많이 사용되었다.

참 고 문 헌

Problem 1

1-1 수치적 방법을 이용한 고유치 해석

(1-1-1) Meirovitch, L., 1967, "Analytical Methods in Vibrations," The Macmillan Company.

(1-1-2) Bathe, K. J., 1982, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis," Prentice-Hall.

(1-1-3) Petyt, M., 1990, "Introduction to Finite Element Vibration Analysis," Cambridge University Press.

(1-1-4) Shah, V. N. and Raymund, M., 1982, "Analytical Selection of Masters for the Reduced Eigenvalue Problem," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, pp. 89~98.

1-2 해석적 방법을 이용한 고유치 해석

(1-2-1) Tzioufas, J., McFarland, D. M. and Bergman, L. A., 1994, "Vibration of Multiple-Point Connected Discrete-Distributed Structures," Journal of Sound and Vibration, Vol. 174, No. 1, pp. 1~22.

(1-2-2) Kaljevic, I., Saigal, S. and Broome, T. H., 1993, "Dynamical Analysis of a General Mass- Spring Arrangement in Beam Systems," Journal of Sound and Vibration, Vol. 163, No. 1, pp. 67~81.

(1-2-3) Bergman, L. A. and Nicholson, J. W., July 1985, "Forced Vibration of a Damped Combined Linear System," Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 107, pp. 275~281.

(1-2-4) Kukla, S., 1994, "Free Vibration of the System of Two Beams Connected by Many Translational Springs," Journal of Sound and Vibration, Vol. 172, No. 1, pp. 130~135.

(1-2-5) Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. and Yao, J., 1998, "A Continuous Cracked Beam Vibration Theory," Journal of Sound and Vibration, Vol. 215, No. 1, pp. 17~34.

(1-2-6) Bhat, R. B., 1985, "Natural Frequencies of Rectangular Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomials in Rayleigh-Ritz Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 102, No. 4, pp. 493~499.

(1-2-7) Liew, K. M., Hung, K. C. and Lam, K. Y., 1993, "On the Use of the Substructure Method for Vibration Analysis of Rectangular Plates with Discontinuous Boundary Conditions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 163, No. 3, pp. 451~462.

(1-2-8) Ingber, M. S., Pate, A. L. and Salazar, J. M., 1992, "Vibration of a Clamped Plate with Concentrated Mass and Spring Attachments, Journal of Sound and Vibration," Vol. 153, No. 1, pp. 143~166.

Problem 2

2-1 레이라이 지수법
(Rayleigh Quotient Method)

(2-1-1) Irons, B. and Ahmad, S., 1980, "Techniques of Finite Elements," Ellis Horwood Ltd., Chichester, England, pp. 360~361.

(2-1-2) Wang, B. P., and Pilkey, W. D., 1986, "Eigenvalue Reanalysis of Locally Modified Structures Using a Generalized Rayleigh's Method," AIAA Journal, Vol. 24, No. 6, pp. 983~990.

(2-1-3) Pilkey, W. D., and Schramm, U., 1995, "Reanalysis of Free Vibrations Considering the Frequency-Dependency of the Structural

Matrices," The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol.19, No. 1, pp. 53~68.

(2-1-4) Carne, T. G. and Dohrmann, C. R., 1998, "Support Conditions, Their Effect on Measured Modal Parameters," Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, pp. 477~483.

2-2 섭동법(Perturbation Method)

(2-2-1) Rayleigh, B., 1945, The Theory of Sound, Vol.1, Dover, New York, pp.109-118, pp. 214-217.

(2-2-2) Chen, J. C. and Wada, B. K., 1977, "Matrix Perturbation for Structural Dynamic Analysis," AIAA Journal, Vol. 15, No. 8, pp. 1095~1100.

(2-2-3) Ravi, S. S. A., Kundra, T. K. and Nakra, B. C., 1998, "Reanalysis of Damped Structures Using the Single Step Perturbation Method," Journal of Sound and Vibration," Vol. 211, No. 3, pp. 355~363.

(2-2-4) Eldred, M. S., Lerner, P. B., and Anderson, W. J., 1992, "Higher Order Eigenpair Perturbations," AIAA Journal, Vol. 30, No. 7, pp. 1870~1876.

(2-2-5) Chen, J. Y., Liu, J. K., and Zhao, L. C., 1995, "An Improved Perturbation Method for Free Vibration Analysis," Journal of Sound and Vibration, Vol. 180, No. 3, pp. 519~523.

(2-2-6) Zhenhua, L. and Zhendong, F., 1988, "The Optimal Structural Modification Principle for The Maximum Shifts of Natural Vibration Frequencies," Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference, pp.1107~1111.

(2-2-7) Kelly, W. J., and Stevens, K. K., 1989, "Application of Perturbation Techniques to the Modal Analysis of a Shaft With Added Viscoelastic Damping," Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, pp. 45~51.

(2-2-8) Kim, K. O., Anderson, W. J. and Sandstrom, R. E., 1983, "Nonlinear Inverse Perturbation Method in Dynamic Analysis," AIAA Journal, Vol. 21, No. 9, pp. 1310~1316.

2-3 민감도 해석법 (Sensitivity Analysis Method)

<u>Original Formulations</u>

(2-3-1) Fox, R. L. and Kapoor, M. P., 1968, "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors," AIAA Journal, Vol. 6, No. 12, pp. 2426~2429.

(2-3-2) Rogers, L. C., 1970, "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors," AIAA Journal, Vol. 8, No. 5, pp. 943~944.

(2-3-3) Rudisill, C. S., 1974, "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors for a General Matrix," AIAA Journal, Vol. 12, No. 5, pp. 721~722.

(2-3-4) Haug, E. J. and Choi, K. K., 1984, "Structural Design Sensitivity Analysis with Generalized Global Stiffness and Mass Matrices," AIAA Journal, Vol, 22, No. 9, pp.1299~1303.

(2-3-5) Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V., 1986, "Design Sensitivity Analysis of Structural System," Academic Press.

(2-3-6) Yoon, B. G. and Belegundu, A. D., 1988, "Iterative Methods for Design Sensitivity Analysis," AIAA Journal, Vol. 26, No. 11, pp. 1413~1415.

<u>Higher Order Sensitivity</u>

(2-3-7) Belle, H. V., 1982, "Higher Order Sensitivities in Structural Systems," AIAA Journal , Vol. 20, No. 2, pp. 286~288.

(2-3-8) Jankovic, M. S., 1988, "Analytical Solutions for the Nth Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors for a Nonlinear Eigenvalue Problem," AIAA Journal, Vol. 26, No. 2, pp. 204~205.

(2-3-9) Brandon, J. A., 1991, "Second-Order Design Sensitivities to Assess the Applicability of Sensitivity Analysis," AIAA Journal, Vol. 29, No. 1, pp. 135~139.

(2-3-10) Zeng, X., Zhang, K., and Yang, J., 1998, "A New Dynamic Reanalysis Method for Large Structure Modification," Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference, pp. 1598~1601.

Eigenvector Sensitivity

(2-3-11) Nelson, R. B., 1976, "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives," AIAA Journal, Vol. 14, No. 9, pp. 1201~1205.

(2-3-12) Lim, K. B., Juang, J. N. and Ghaemmaghami, P., 1989, "Eigenvector Derivatives of Repeated Eigenvalues Using Singular Value Decomposition," Journal of Guidance, Vol. 12, No. 2, pp. 282~283.

(2-3-13) Wang, B. P., 1991, "Improved Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics," AIAA Journal, Vol. 29, No. 6, pp.1018~1020.

(2-3-14) Sutter, T.R., Camarda, C. J., Walsh, J. L. and Adelman, H. M., 1988, "Comparison of Several Methods for Calculation Vibration Mode Shape Derivatives," AIAA Journal, Vol. 26, No. 12, pp. 1506~1511.

(2-3-15) Alvin, K. F., 1997, "Efficient Computation of Eigenvector Sensitivities for Structural Dynamics," AIAA Journal, Vol. 35, No. 11, pp. 1760~1766.

(2-3-16) Zhang, D. W. and Wei, F. S., 1997, "Efficient Computation of Many Eigenvector Derivatives Using Dynamic Flexibility Method," AIAA Journal, Vol. 35, No. 4, pp.712~718.

(2-3-17) Zhang, O. and Zerva, A., 1997, "Accelerated Iterative Procedure for Calculating Eigenvector Derivatives," AIAA Journal, Vol. 35, No. 2, pp. 340~348.

Repeated Eigenvalue Sensitivity

(2-3-18) Chen, T. Y., 1993, "Design Sensitivity Analysis for Repeated Eigenvalues in Structural Design," AIAA Journal, Vol. 31, No.12, pp. 2347~2350.

Applications

(2-3-19) Raju, K. K., Rao, G. V. and Venugopal, N., 1989, "Use of Design Sensitivity Coefficients for Prediction of Structural Behavior after Design Modification," Computers & Structures, Vol. 33, No. 5, pp. 1329~1331.

(2-3-20) Rizai, M. N. and Bernard, J. E., 1987, "An Efficient Method to Predict the Effect of Design Modifications," Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 109, pp. 373~384.

(2-3-21) Patrick, G. B. and Wei, T. S., 1990, "Practical Sensitivity Analysis," Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, pp. 21-25.

(2-3-22) Ai-Qun, L., and De-bao, L., 1990, "Using Experimental Modal Analysis to A Shell Structural Dynamic Modification," Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, pp. 972~978.

(2-3-23) Wang, J., Heylen, W. and Sas, P., 1987, "Accuracy of Structural Modification Techniques," Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, pp. 65~71.

(2-3-24) Heo, J. H. and Ehmann, K. F., 1991, "A Method for Substructural Sensitivity Synthesis," Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 113, pp. 201~208.

2-4 모드 합성법 (Modal Synthesis Method)

Eigenvalue Upper Bound and Lower Bound

(2-4-1) Ram, Y. M., Braun, S. G. and Blech, J., 1988, "Structural Modifications in Truncated Systems by the Rayleigh-Ritz Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 125, No. 2, pp. 203~209.

(2-4-2) Ram, Y. M. and Braun, S. G., 1990, "Upper and Lower Bounds for the Natural Frequencies of Modified Structures Based on Truncated Modal Testing Results," Journal of Sound and Vibration, Vol. 137, No. 1, pp. 69~81.

(2-4-3) Tse, C. C. and Liao, J. Y., 1993, "A Comparison of Error Bounds for Eigenvalues in Structural Modification Problems," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 7, No. 3, pp. 273~279.

(2-4-4) Ram, Y. M. and Braun, S. G., 1993, "Eigenvector Error Bounds and Their Applications to Structural Modification," AIAA Journal, Vol. 31, No. 4, pp. 759~764.

Applications

(2-4-5) Wang, B. P., 1987, "Structural Dynamic Optimization Using Reanalysis Technique," The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 2, No. 1, pp. 50~58.

(2-4-6) Wang, W., Zhang, Q., Allemang, R. J. and Brown, D. L., 1990, "Optimization of Structural Redesign With Dynamic Constraints," Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, pp. 946~953.

(2-4-7) Ram, Y. M. and Braun, S., 1987, "On Structural Modifications in Truncated System," Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, pp. 1550~1556.

(2-4-8) Xiuqing, H. and Ku, C. H., 1992, "Modal Analysis and Structural Dynamics Modification for Vibration of Trial-Produce Vehicle," Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, pp. 863~869.

(2-4-9) Wallack, P., Skoog, P., and Richardson, M., 1989, "Comparison of Analytical and Experimental Rib Stiffener Modifications to A Structure," Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, pp. 965~973.

(2-4-10) Cafeo, J. A., Trethewey, M. W. and Sommer III, H. J., 1995, "Beam Element Structural Dynamics Modification Using Experimental Modal Rotational Data," Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 117, pp. 265~271.

2-5 Dual Modal Space Method (DMSM)

Applications

(2-5-1) Luk, Y. W. and Mitchell, L. D., 1983, "System Modeling and Modification Via Modal Analysis," Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference, pp. 423~429.

(2-5-2) Luk, Y. W. and Mitchell, L. D., 1984, "Implementation of the Dual Modal Space Structural Modification Method," Proceedings of the 2nd International Modal Analysis Conference, pp. 930~936.

(2-5-3) Luk, Y. W. and Mitchell, L. D., 1984, "Analytical and Geometric Substructuring via Dual Modal Space Structural Modification," Proceedings of the 2nd International Modal Analysis Conference2, pp. 50~57.

(2-5-4) Deel, J. C. and Luk, Y. W., 1985, "Modal Testing Considerations For Structural Modification Applications," Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference, pp. 46~52.

(2-5-5) Elliot, K. B., and Mitchell, L. D., 1985, "Realistic Structural Modification: Part I Theoretical Development," Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference, pp. 471~476.

Modal Truncation Error

(2-5-6) Elliott, K. B. and Mitchell, L. D., 1987, "The Effect of Modal Truncation on Modal Modification," Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, pp. 72~78.

(2-5-7) Avitabile, P. and O'Callahan, J. C., 1991, "Understanding Structural Dynamic Modification and the Effects of Truncation," The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 6, No. 4, pp. 215~235.

2-6 국부 구조 변경법

(Localized Modification Method)

(2-6-1) Weissenburger, J. T., 1968, "Effect of Local Modifications on the Vibration Characteristics of Linear Systems," Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, pp.327~332.

(2-6-2) Pomazal, R. J. and Snyder, V. W., 1971, "Local Modifications of Damped Linear Systems," AIAA Journal, Vol. 9, No. 11, pp. 2216~2221.

(2-6-3) Hallquist, J. and Snyder, V. W., 1973, "Synthesis of Two Discrete Vibratory Systems Using Eigenvalue Modification," AIAA Journal, Vol. 11, No. 2, pp. 247~249.

(2-6-4) Hallquist, J. O. and Snyder, V. W., 1974, "On the Connection of Viscously Damped Continuous Vibratory Systems," Journal of Sound and Vibration, Vol. 32, No. 1, pp.131~142.

(2-6-5) Hallquist, J. and Snyder, V., 1973, "Synthesis of Two Discrete Vibratory Systems Using Eigenvalue Modification," AIAA Journal, Vol. 11, No. 2, pp. 247~249.

(2-6-6) Hallquist, J. O., 1976, "An Efficient Method for Determining the Effects of Mass Modifications in Damped Systems," Journal of Sound and Vibration, Vol. 44, No. 3, pp. 449~459.

(2-6-7) O'Callahan, J. C. and Chou, C. M., 1984, "Study of A Structural modification Procedure with Three Dimensional Beam Elements using A Local Eigenvalue Modification Procedure," Proceedings of the 2nd International Modal Analysis Conference, pp. 945~952.

(2-6-8) Ram, Y. M. and Blech, J. J., 1991, "The Dynamic Behavior of a Vibratory System after Modification," Journal of Sound and Vibration, Vol. 150, No. 3, pp. 357~370.

(2-6-9) Wang, B. P., 1985, "The Limitation of Local Structural Dynamic Modification," Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference, pp. 53~58.

(2-6-10) Kashiwagi, M., Hirai, I., Katayama, T. and Pilkey, W. D., 1993, "Sturm Sequence Recurrence Formula for Eigensolution of Locally Modified Systems," Finite Elements in Analysis and Design , Vol. 12, pp. 31~36.

(2-6-11) Kashiwagi, M., Hirai, I., Ohwaki, S. I. and Pilkey, W. D., 1991, "Stable Eigensolution of Locally Modified Systems Based on the Sturm Sequence Property," Finite Elements in Analysis and Design, Vol.9, pp. 133~139.

2-7 라그랑지 승수법 (Lagrange Multiplier Method)

(2-7-1) Dowell, E. H., 1971, "Free Vibrations of a Linear Structure with Arbitrary Support Conditions," Journal of Applied Mechanics, pp. 595~600.

(2-7-2) Dowell, E. H., 1972, "Free Vibrations of an Arbitrary Structure in Terms of Component Modes," Journal of Applied Mechanics, pp. 727~732.

(2-7-3) Dowell, E. H., 1979, "On Some General Properties of Combined Dynamical Systems, Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 206~209.

(2-7-4) Dowell, E. H., 1980, "Bounds on Modal Damping by a Component Modes Method Using Lagrange Multipliers," Journal of Applied Mechanics, Vol. 47, pp. 211~213.

(2-7-5) Tongue, B. H. and Dowell, E. H., 1983, "Component Mode Analysis of Nonlinear, Nonconservative Systems," Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 204~209.

(2-7-6) Dowell, E. H., 1987, "Theory and Application of Dynamic Decoupling in Structural Analysis: Another View," Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 3, pp. 119~125.

(2-7-7) Hallquist, J. and Snyder, V. W., 1973, "Linear Damped Vibratory Structures with Arbitrary Support Conditions," Journal of Applied Mechanics, pp. 312~313.

(2-7-8) Howell, L. J., 1975, "Effects of Constraint Modification on the Random Vibration of Damped Linear Structures," General Motors Corporation, Warren, Mich., pp. 685~687.

(2-7-9) Hu, L. J., Smith, I., and Chui, Y. H., 1994, "Vibration Analysis of Ribbed Plates with a Rigid Intermediate Line Support," Journal of Sound and Vibration, Vol. 178, No. 2, pp. 163~175.

(2-7-10) Zeng, Z., Huang, T. and Hamilton, J. F., 1990, "An Effective Approach to Determine Natural Frequencies and Mode Shapes of Constrained Beams Using Lagrange Multipliers," The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 5, No. 2, pp. 109~114.