

〈논 문〉

## 크랙이 존재하는 복합재료 보의 동적 특성 연구

### A Study on the Dynamic Characteristics of a Composite Beam with a Transverse Open Crack

하 태 완\* · 송 오 섭\*\*

Tae-Wan Ha and Oh-Seop Song

(1999년 6월 25일 접수 : 1999년 9월 2일 심사완료)

**Key Words :** Transverse Open Crack(횡방향 개구형 크랙), Composite Beams(복합재료 보), Timoshenko Beam Theory(티모셴코 보 이론), Natural Frequency(고유진동수), NDE(비파괴 검사), Laplace Transform(라플라스 변환법)

#### ABSTRACT

Free vibration characteristics of cantilevered laminated composite beams with a transverse non-propagating open crack are investigated. In the present analysis a special ply-angle distribution referred to as asymmetric stiffness configuration inducing the elastic coupling between chord-wise bending and extension is considered. The open crack is modelled as an equivalent rotational spring whose spring constant is calculated on the basis of fracture mechanics of composite material structures. Governing equations of a composite beam with a open crack are derived via Hamilton's Principle and Timoshenko beam theory encompassing transverse shear and rotary inertia effect. The effects of various parameters such as the ply angle, fiber volume fraction, crack depth, crack position and transverse shear on the free vibration characteristics of the beam with a crack is highlighted. The numerical results show that the natural frequencies obtained from Timoshenko beam theory are always lower than those from Euler beam theory. The presence of intrinsic cracks in anisotropic composite beams modifies the flexibility and in turn free vibration characteristics of the structures. It is revealed that non-destructive crack detection is possible by analyzing the free vibration responses of a cracked beam.

#### 1. 서 론

크랙은 발생, 성장 과정을 거치면서 구조물의 불안정성을 증대시키고 구조물의 붕괴를 초래하는 요인으로 작용할 수 있다. 따라서 크랙의 존재를 사전에 감지하고 위험을 예방하고자 하는 다양한 연구가

진행되고 있으며 그 중에서도 구조물에 손상을 주지 않고 결함을 탐지해 낼 수 있는 비파괴적인 방법은 경제적으로나 편의성 측면에서 매우 효과적이다. 이러한 비파괴적인 방법 중의 하나가 구조물이나 시스템의 고유진동특성 변화를 측정하여 크랙의 존재, 위치 및 크기를 탐지하는 것이다. 연구결과에 따르면 구조물에 크랙 형태의 손상이 있을 경우 일반적으로 고유진동수는 감소하고 감쇠는 증가하며 모드형상의 변화가 발생한다<sup>(1)</sup>. 보다 정확한 해석을 위하여 크랙을 파괴역학적으로 접근하여 변형에너지

\* 국방과학연구소

\*\* 정회원, 충남대학교 공과대학 기계공학과

등을 산출하고 적절한 매개방법을 사용하여 운동방정식을 유도하여 해석하고 모드시험을 통하여 산출한 고유진동수나 모드형상으로부터 크랙의 위치와 크기를 예측하는 연구가 이루어지고 있다<sup>(2,3)</sup>. 그러나 이 분야의 연구는 대부분 금속과 같은 등방성 재료를 대상으로 하고 있으며 최근 복합재료의 사용증가로 인하여 복합재료에 대한 이 분야의 연구의 필요성이 증대되고 있다<sup>(4,5)</sup>. 복합재료와 같이  $E_1$ 에 비하여  $G_{13}$ ,  $G_{23}$ 가 상당히 작은 경우나 보의 길이가 단면치수에 비해 상대적으로 작은 경우에는 횡 전단 변형효과를 고려한 Timoshenko 보 모델을 적용하여야 정확한 해석결과를 얻을 수 있다. 또한 기하학적 특성에 따라 와핑구속효과나 회전관성효과를 고려하여 보다 정확한 해석 결과를 얻을 수가 있다<sup>(6)</sup>. 크랙 결함이 복합재료 구조물에 존재하는 경우에 구조물에 미치는 영향을 비파괴적인 방법으로 정확히 해석하고 산출해 내기 위해서는 복합재료의 동특성 해석에 적합한 운동방정식과 파괴역학이론을 적용하는 것이 필요하다.

본 논문에서는 모든 층(laminae)을 한 방향으로만 적층하여 횡 방향(chord-wise) 굽힘과 축 방향 인장운동이 연성되어 나타나는 복합재료 보에 횡 방향 개구형 크랙(transverse open crack)이 존재하는 경우에 대하여 고찰하였다. 자유진동해석이 가능하도록 파괴역학적 변수를 크랙위치에서의 스프링 상수로 변환하여 산출하고 전단변형 및 회전관성효과를 포함하여 해밀톤 원리로부터 일반적인 운동방정식 및 경계조건을 유도하였다. 그리고 이를 횡 방향 굽힘과 축 방향 인장운동이 연성되는 적층구조를 가진 외팔보에 대하여 운동방정식 및 경계조건을 특수화하고 엄밀해를 얻을 수 있는 해법인 라플라스 변환법을 사용하여 자유진동특성에 관한 해를 구하였다. 복합재료의 설계 변수로서 섬유체적비와 섬유각을 설정하고 크랙의 외형적 변수로서 크랙의 깊이 및 위치를 설정하여 이들 변수에 대한 고유진동수 및 모드형상의 변화 경향을 도출하여 이를 통한 크랙의 비파괴적인 검출 가능성을 제시하였다.

## 2. 크랙의 수학적 모델링

### 2.1 크랙선단에서의 탄성변형에너지

복합재료 보의 크랙선단에서의 응력-변형을 관계식 및 평면변형상태에서의 compliance  $b_{ij}$ , 그리고 적합조건을 고려한 복합재료의 특성방정식과 이 방

정식의 근  $\mu_1, \mu_2$ 로부터 x-z 평면상에서 크랙선단의 에너지분산률(energy release rate)을 구하면 다음과 같다.

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} [\sigma_z^{+0} u_z^{-0} + \tau_{xz}^{+0} u_x^{-0}] dx$$

$$= -\frac{b_{22}}{2} \text{Im} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right) K_I^2 + \frac{b_{11}}{2} \times \text{Im}(\mu_1 + \mu_2) K_{II}^2 + b_{11} \text{Im}(\mu_1 \mu_2) K_I K_{II}$$
 (1)

여기에서  $K_I, K_{II}$ 는 제 I, II 파괴모드의 응력확대계수(stress intensity factor)를 나타낸다. 따라서 탄성 변형에너지는 다음과 같이 나타내어진다<sup>(4)</sup>.

$$U_c = h \int G da$$

$$= \int_A \left[ D_1 \left( \sum_{n=1}^N K_{I_n} \right)^2 + D_2 \left( \sum_{n=1}^N K_{II_n} \right)^2 + D_{12} \sum_{n=1}^N K_{I_n} \sum_{n=1}^N K_{II_n} \right] dA$$
 (2)

여기에서  $a$ 는 크랙 길이,  $h$ 는 보의 단면 폭,  $N$ 은 보에 작용하는 독립적인 작용력의 수를 나타낸다.

$$D_1 = -\frac{b_{22}}{2} \text{Im} \left( \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right)$$

$$D_2 = \frac{b_{11}}{2} \text{Im}(\mu_1 + \mu_2)$$

$$D_{12} = b_{11} \text{Im}(\mu_1 \mu_2)$$
 (3)

Castigliano 정리에 의하여 변위와 compliance matrix는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i = \partial U_c / \partial P_i, \quad C_{ij} = \partial u_i / \partial P_j$$
 (4)

### 2.2 복합재료 시편의 직교이방성 보정<sup>(7)</sup>

복합재료 시편의 보정(rescaling) 기법은 이방성과 유한형상 사이의 상호관계를 도출하고 응력집중과 연계된 크랙, 직교이방성 시편의 효과적인 축소, 복합형태의 층상분리와 크랙변형 등을 연구하는데 사용된다. 먼저 평면응력상태에 있는 직교이방성 물체에 대하여 좌표축  $x$ 와  $z$ 를 직교이방성 재료의 주응력축 1과 2에 일치하도록 하면 앞의 특성방정식에서  $b_{16} = b_{26} = 0$  이므로 다음과 같은 식을 얻는다.

$$b_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + (2b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2} + b_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} = 0$$
 (5)

여기에서  $U$ 는 Airy 응력 함수를 나타내며 직교이방성 재료의 compliance matrix 성분으로부터  $b_{ij}$

값을 대입하고 다음의 변수를 정의한다.

$$\lambda = \frac{E_2}{E_1}, \quad \xi = \frac{(E_1 E_2)^{1/2}}{2G_{12}} - (\nu_{12} \nu_{21})^{1/2} \quad (6)$$

이들 변수들은 평면상에서 직교이방성의 정도를 나타낸다. 등방성 재료에서는  $\lambda = 1, \xi = 1$  이다. 평면응력상태에서 나타난  $\lambda$  와  $\xi$ 의 값은 평면변형상태에서 상응하는 값과 별 차이가 없는 것으로 알려졌다. 대부분의 복합재료는  $1/\lambda = 0 \sim 50, \xi = 0 \sim 5$  의 범위에 있다. 식 (5), (6)으로부터 다음 식을 유도한다.

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\xi\lambda^{1/2} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2} + \lambda \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} = 0 \quad (7)$$

x축을  $\xi = \lambda^{1/4} x$  로 치환하여 정리하면

$$\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4} + 2\xi \frac{\partial^4 U}{\partial \xi^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} = 0 \quad (8)$$

이 된다. 따라서  $\lambda$  는 하중과 기하학적 변수로 흡수되고,  $\xi$ -z 평면상의 경계치 문제는 재료상수  $\xi$  만을 갖게 된다.  $\xi = 1$  이면 이 지배방정식은 등방성 재료의 문제와 동일하게 된다. 보정된  $U$  값을 재정의 하면 다음과 같다.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad \lambda^{-1/2} \sigma_z = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \quad (9)$$

$$\lambda^{-1/4} \tau_{xz} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial z}$$

또한 x-z 평면에서 응력확대계수는 다음과 같다.

$$K_I \sim (2\pi x)^{1/2} \sigma_z, \quad K_{II} \sim (2\pi x)^{1/2} \tau_{xz} \quad (10)$$

따라서  $\xi$ -z 평면상에서 응력확대계수는

$$\lambda^{-3/8} K_I \sim (2\pi \xi)^{1/2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$$

$$\lambda^{-1/8} K_{II} \sim (2\pi \xi)^{1/2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial z} \quad (11)$$

이며 다음과 같이 재정의 될 수 있다.

$$K_i = \sigma_i \sqrt{\pi a} F(a/b, \lambda^{1/4} L/b, \xi) \quad (12)$$

여기에서 만일  $\lambda^{1/4} L/b \geq 2.0$  이면  $\lambda^{1/4} L/b$  의 효과는 무시할 수 있다. 근사적인 인수분해를 실시하면 각 파괴모드에서의 응력확대계수는 다음과 같다.

$$K_i = \sigma_i \sqrt{\pi a} F_i(a/b) Y_i(\xi) \quad (i=I,II) \quad (13)$$

여기에서  $\sigma_i$ 는 각 모드에 해당하는 응력을 나타내

며,  $F_i(a/b)$ 는 보의 유한크기에 따른 보정계수이고  $Y_i(\xi)$ 는 이방성 재료의 보정계수이다.

### 2.3 크랙선단에서의 Flexibility 및 스프링 상수

본 논문에서는 Fig. 1에서와 같이 보의 높이(b) 방향으로 비전파성 개구형 크랙이 있는 경우를 대상으로 하여 굽힘진동시 제 I, II 파괴모드가 모두 나타나고 이들의 연성된 효과도 동시에 고려하여 모델링하였다. 연속 보에서 크랙에 의한 국부적 연성(flexibility)의 증가는 불연속 구간을 발생하게 되어 크랙을 중심으로 별도의 운동방정식과 경계조건을 설정할 필요가 있다.

또한 운동방정식을 유도하는데 적절한 동역학적 시스템으로 전환해야 하며, 해석하고자 하는 운동의 형태에 따라 적합한 스프링 요소로 변환한다<sup>(2,4)</sup>. 본 논문에서는 복합재료 보의 굽힘진동에 관심을 가지고 이 운동형태에 적합하도록 크랙을 회전스프링으로 변환하였다. 먼저 크랙선단에서의 연성을 구하기 위해 식 (2), (4)로부터 등가 하중개념을 도입하여 다음과 같이 크랙의 길이 및 위치를 무차원화 하여 연성을 구하였다.

$$\bar{a} = a/b, \quad c = l_1/L$$

$$C_{mm} = \frac{\partial^2 U_c}{\partial M^2} = \frac{72\pi D_1}{hb^2} T_1 + \frac{2\pi D_2}{hL^2(1-c)^2} T_2$$

$$+ \frac{12\pi D_{12}}{hbL(1-c)} T_3 \quad (14)$$

여기에서  $M$ 은 보의 자유단에 작용하는 굽힘 모멘트이다. 그리고

$$T_1 = \int_0^{\bar{a}} [\bar{a} Y_I(\xi)^2 F_I(\bar{a})^2] d\bar{a}$$

$$T_2 = \int_0^{\bar{a}} [\bar{a} Y_{II}(\xi)^2 F_{II}(\bar{a})^2] d\bar{a}$$

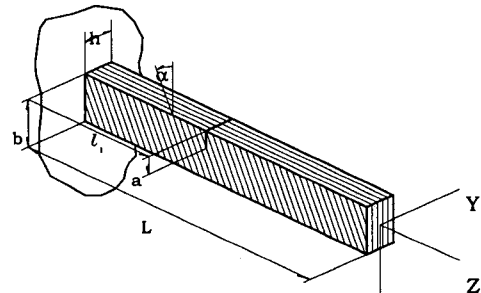


Fig. 1 Configuration of a cantilevered composite beam with a transverse open crack

$$T_3 = \int_0^{\bar{a}} [\bar{a}Y_I(\xi)Y_{II}(\xi)F_I(\bar{a})F_{II}(\bar{a})]d\bar{a} \quad (15)$$

따라서 크랙선단에서의 부가되는 연성을 등가의 회전스프링 상수로 나타내면 다음과 같다.

$$K_R = \frac{1}{C_{mm}} \quad (16)$$

### 3. 운동방정식 및 경계조건

#### 3.1 기본가정

복합재료 보의 각 층은 동일한 두께를 가진 직교 이방성 재료이며, 선형 탄성적이며, 서로 완벽하게 접착되어 있는 것으로 가정한다. 그리고 단면의 축 방향 변위는 선형적으로 변화하는 것으로 가정하며, 횡전단변형은 축 방향 좌표만의 함수로 가정한다. 일반적으로 적층 복합재료 구조물은 적층방법에 따라 모든 방향의 운동이 연성되어 나타날 수 있으나 본 논문에서는 모든 층을 한 방향으로 적층하여 횡 방향 굽힘과 축 방향 인장운동이 연성되어 나타나는 복합재료 보를 대상으로 하였다.

#### 3.2 변위장

Fig. 1의 좌표계를 기준으로 FSDT (First Order Shear Deformable Theory)에 의한 변위장은 다음과 같다<sup>(6)</sup>.

$$u(x, y, z, t) = u_0(z, t) - y\phi(z, t)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(z, t) + x\phi(z, t)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(z, t) + y\theta_x(z, t) + x\theta_y(z, t)$$

$$\text{여기에서 } \theta_x(z, t) = \gamma_{yz}(z, t) - v_0'(z, t)$$

$$\theta_y(z, t) = \gamma_{xz}(z, t) - u_0'(z, t) \quad (17)$$

여기에서  $u_0, v_0, w_0$  는 각각  $x, y, z$  방향의 병진 변위(translation)를 나타내고  $\theta_x, \theta_y, \phi$  는  $x, y, z$  축 중심의 보 단면의 회전각(rotation)을 나타낸다.  $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  는  $y-z$  평면과  $x-z$  평면에서의 횡전단변형을 나타내며  $t$  는 시간을 나타낸다.

#### 3.3 구성방정식

Fig. 1에서 일반적인 직교이방성 복합재료의 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (18)$$

여기에서  $\bar{Q}_{ij}$ 는 축소변환 강성행렬이다. 또한 Stress resultants와 stress couples는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} N_{zz} \\ N_{xz} \\ L_{zz} \\ L_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \\ K_{41} & K_{42} \\ K_{51} & K_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (19)$$

여기에서  $K_{ij}$ 는 A, B, C행렬의 요소들로 표현되는 수정강성계수들이다.

#### 3.4 운동방정식 및 경계조건

Fig. 1의 복합재료 외팔보의  $x-z$  평면내에서의 횡 방향 굽힘과 축 방향 인장의 연성운동에 관한 운동방정식과 경계조건을 유도한다. 크랙은 회전스프링이 존재하는 불연속면으로 고려하여 크랙을 기준으로 보의 고정단 방향을 제 1구간, 자유단 방향을 제 2구간으로 설정하고 해밀톤 원리를 이용하여 운동방정식과 경계조건을 유도한다.

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (\delta U - \delta K - \delta W_{nc}) dt = 0, \quad (20)$$

$$\delta v_0 = \delta \theta_x = \delta \phi = 0 \quad \text{at } t = t_0, t_1$$

여기에서 탄성에너지의 변분은 다음과 같다.

$$\delta U = \delta \left[ \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\tau \right] = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\tau \quad (21)$$

운동에너지의 변분은

$$\delta K = - \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) \rho dy dx dz \quad (22)$$

이며, 자유진동문제에서 비보존력에 의한 가상일  $\delta W_{nc} = 0$  이다. 크랙을 등가의 회전스프링 상수  $K_R$ 로 전환하면 크랙에 의한 부가적인 변형에너지 및 그 변분은 다음과 같다.

$$U_s = - \frac{1}{2} K_R [\theta_{y,2}(l_1) - \theta_{y,1}(l_1)]^2$$

$$\delta U_s = - K_R [\theta_{y,2}(l_1) - \theta_{y,1}(l_1)] \delta \theta_{y,2}(l_1) + K_R [\theta_{y,2}(l_1) - \theta_{y,1}(l_1)] \delta \theta_{y,1}(l_1) \quad (23)$$

보의 전 구간에서의 변형에너지와 운동에너지의 변분은 다음과 같다.

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_s + \delta U_2, \quad \delta K = \delta K_1 + \delta K_2 \quad (24)$$

식 (20)으로부터 x-z 평면상에서 각 구간별 운동방정식을 구하면 다음과 같다. ( $j=1,2$ )

$$\delta u_{oj}; a_{44}(\theta_{yj} + u_{oj}') - b_1 \ddot{u}_{oj} = 0 \quad (25)$$

$$\delta \theta_{yj}; a_{22}\theta_{yj}' - a_{44}(\theta_{yj} + u_{oj}') - b_5 \ddot{\theta}_{yj} = 0 \quad (26)$$

여기에서

$$a_{22} = \int_{-b/2}^{b/2} K_{11}x^2 dx, \quad a_{44} = \int_{-b/2}^{b/2} K_{22} dx$$

$$b_1 = \int_{-b/2}^{b/2} \rho h dx, \quad b_5 = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 \rho h dx \quad (27)$$

그리고 외팔보의 고정단, 자유단, 크랙위치에서의 경계조건 및 적합조건은 다음과 같다.

$$\text{at } z=0, \quad u_{o1} = \theta_{y1} = 0 \quad (28)$$

$$\text{at } z=l_1, \quad \text{i) } u_{o1} = u_{o2}$$

$$\text{ii) } \theta_{y2} - \theta_{y1} = \frac{a_{22}}{K_R} \theta_{y2}' \quad (29)$$

$$\text{iii) } \theta_{y2} + u_{o2}' = \theta_{y1} + u_{o1}'$$

$$\text{iv) } \theta_{y1}' = \theta_{y2}'$$

$$\text{at } z=L, \quad \theta_{y2} + u_{o2}' = \theta_{y2}' = 0 \quad (30)$$

#### 4. 수치해석(엄밀해)

연속 보의 경우에는 근사적인 수치해석 방법의 적용이 용이하나 불연속면인 크랙이 존재하는 경우에는 근사해의 적용이 쉽지 않다. 따라서 본 논문에서는 라플라스 변환에 의한 엄밀해를 구하는 방법을 사용하였다. 크랙이 있는 보의 1, 2 구간에서 운동방정식과 경계조건식에 대하여 다음과 같은 동기운동(synchronous motion)의 해를 가정한다. ( $j=1,2$ )

$$[u_{oj}(z, t), \theta_{yj}(z, t)] = [U_j(z), Y_j(z)]e^{i\omega t} \quad (31)$$

그리고 다음과 같이 무차원양을 정의한다.

$$\eta \equiv \frac{z}{L}, \quad c \equiv \frac{l_1}{L} \quad (32)$$

$$[u_{oj}(\eta, t), \theta_{yj}(\eta, t)] = [U_j(\eta), Y_j(\eta)]e^{i\omega t} \quad (33)$$

식 (25)~(30)을 무차원화하면 다음과 같다. ( $j=1,2$ )

$$Y_j' + U_j'' + \omega^2 f_1 U_j = 0 \quad (34)$$

$$Y_j'' - f_2(Y_j + U_j') + \omega^2 f_3 Y_j = 0 \quad (35)$$

경계조건 및 적합조건

$$\text{at } \eta=0, \quad U_1 = Y_1 = 0 \quad (36)$$

$$\text{at } \eta=c, \quad U_1 = U_2$$

$$Y_2 - Y_1 = \frac{a_{22}}{K_R L} Y_2'$$

$$Y_1 + U_1' = Y_2 + U_2'$$

$$Y_1' = Y_2' \quad (37)$$

$$\text{at } \eta=1, \quad Y_2 + U_2' = Y_2' = 0 \quad (38)$$

여기에서

$$f_1 = \frac{b_1}{a_{44}} L^2, \quad f_2 = \frac{a_{44}}{a_{22}} L^2, \quad f_3 = \frac{b_5}{a_{22}} L^2 \quad (39)$$

식 (34), (35)에서  $j=1$  인 경우에 대하여 라플라스 변환하고 이에  $\eta=0$  에서의 경계조건식 (36)을 대입하여 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_1(s) \\ \overline{Y}_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1o}' \\ Y_{1o}' \end{bmatrix} \quad (40)$$

여기에서

$$g_{11} = s^2 + \omega^2 f_1, \quad g_{12} = s,$$

$$g_{21} = -f_2 s, \quad g_{22} = s^2 - f_2 + \omega^2 f_3 \quad (41)$$

식 (34), (35)에서  $j=2$  인 경우에 대하여 라플라스 변환하여 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_2(s) \\ \overline{Y}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

여기에서

$$c_1 = sU_{2c} + U_{2c}' + Y_{2c}$$

$$c_2 = -f_2 U_{2c} + sY_{2c} + Y_{2c}' \quad (43)$$

식 (40), (42)식에서  $\overline{U}_1(s), \overline{Y}_1(s), \overline{U}_2(s), \overline{Y}_2(s)$ 를 구하고 라플라스 역변환을 취하여 각각  $U_1(\eta), Y_1(\eta), U_2(\eta), Y_2(\eta)$ 를 구한 후 크랙위치  $\eta=c$  에서의 적합

조건 및  $\eta=1$  에서의 경계조건 식 (38)에 대입하여 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1o}' \\ Y_{1o}' \\ U_{2c}' \\ Y_{2c}' \\ Y_{2c}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

또는  $[K]\{q\} = \{0\}$  (45)

식 (45)에서  $\det [K]=0$  을 만족하는  $\omega$ 의 값들이 고유진동수이며, 식 (45)의 벡터  $\{q\}$ 를 구하여  $U_1(\eta)$ ,  $Y_1(\eta)$ ,  $U_2(\eta)$ ,  $Y_2(\eta)$  식에 대입하면 모드형 상을 구할 수 있다.

### 5. 해석 및 고찰

#### 5.1 머리말

본 논문에서 참고문헌 (5)의 수치해석 예제에서 사용된 복합재료 Euler 보의 물성치와 구조 형상을 그대로 사용하여 본 논문에서 유도된 수식을 적용하여 얻어진 결과와 비교하여 상호 일치함을 확인하였고, 본 논문에서 Timoshenko 보 이론으로 해석한 결과와의 비교가 용이하도록 하였다. Graphite-fiber reinforced polyimide 복합재료의 물성치는 다음과 같다.

$$E_m = 2.756 \text{ Gpa}, E_f = 275.6 \text{ Gpa}, \nu_m = 0.33$$

$$\nu_f = 0.2, G_m = 1.036 \text{ Gpa}, G_f = 114.8 \text{ Gpa}$$

$$\rho_m = 1600 \text{ kg/m}^3, \rho_f = 1900 \text{ kg/m}^3$$

그리고 보의 길이  $L=1$  m, 단면의 폭  $h=0.05$  m, 높이  $b=0.025$  m 이다.

#### 5.2 크랙이 없는 경우

Figs. 2, 3은 섬유각 및 섬유체적비를 변화시키면서 Timoshenko 보와 Euler 보 이론에 따라 크랙이 없는 복합재료 보의 고유진동수를 구한 결과이다. 섬유각 및 섬유체적비의 증가에 따라 1, 2, 3차 고유진동수가 모두 증가하는 경향을 보이고 있으며 Timoshenko 보의 경우가 Euler 보에 비해서 모두 낮은 고유진동수를 갖는 것으로 나타났다. 이러한 경향은 고차의 고유진동수로 갈수록, 그리고 섬유각이  $90^\circ$ 에 가까워질수록 잘 나타난다. 이 결과를 수치적으로 비교할 수 있도록 Table 1에 나타내었다. Timoshenko와 Euler 보 이론의 차이는 진동 차수

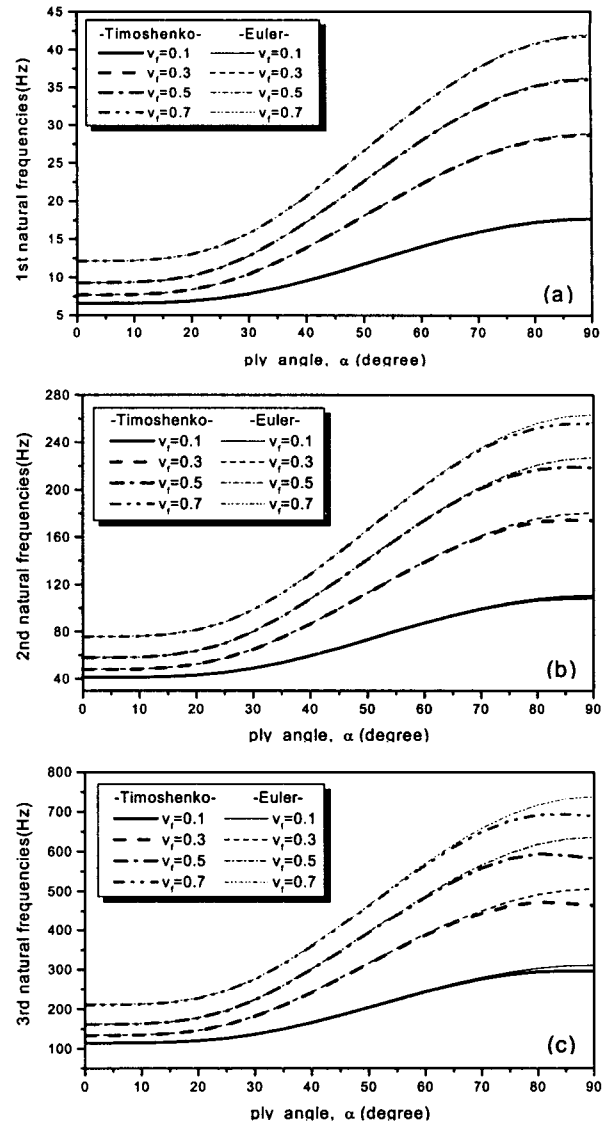


Fig. 2 Variation of the natural frequencies with ply angles for different  $v_f$ 's (without crack)

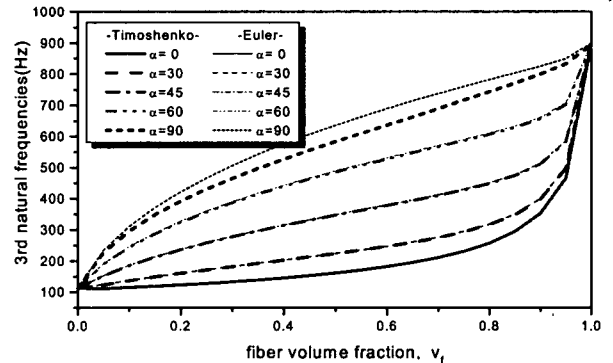


Fig. 3 Variation of the third natural frequency with fiber volume fraction (without crack)

**Table 1** Comparison of the first three natural frequencies of the beam without crack ( $v_f=0.5$ )

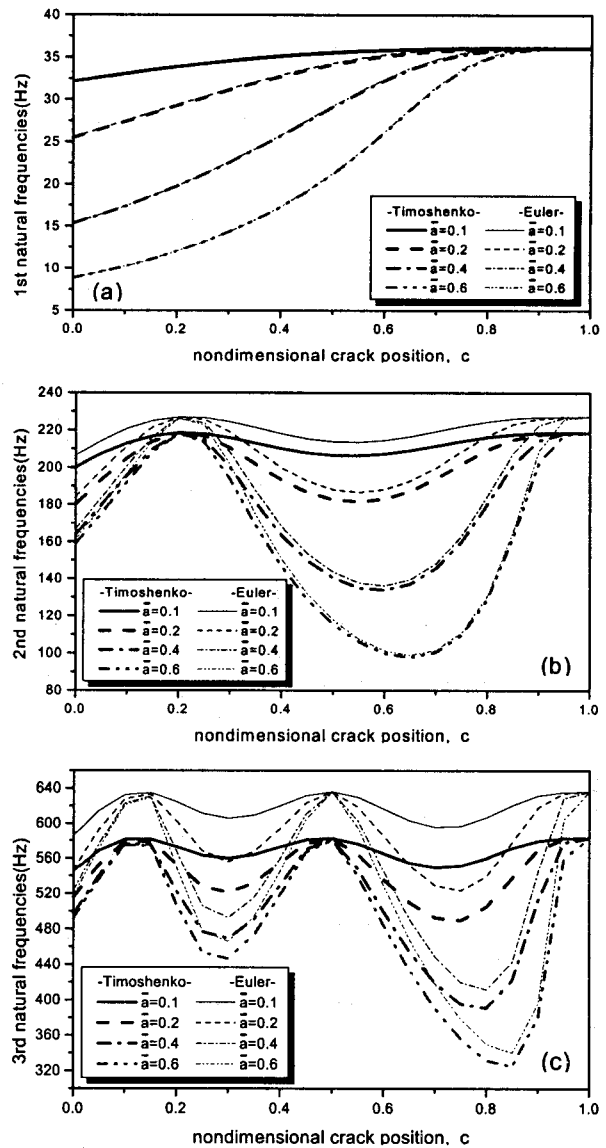
적층각 (°)	Timoshenko 보 (Hz)			Euler 보 (Hz)		
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
0	9.26419	57.88917	161.33921	9.26872	58.08606	162.64265
15	9.56825	59.88217	167.30763	9.57042	59.97680	167.93677
30	12.77065	79.93804	223.40475	12.77317	80.04811	224.13704
45	19.83117	124.08486	346.56578	19.83640	124.31258	348.07883
60	27.85932	174.08764	485.20226	27.87284	174.67611	489.09816
75	33.93046	210.82006	582.37096	33.97976	212.94751	596.25919
90	36.03436	218.52226	582.87158	36.24075	227.11687	635.93382

와 섬유각에 따라 그 차이가 다르며, 보의 길이에 대한 높이의 비( $b/L$ )가 커질수록 더욱 큰 차이가 나타난다.

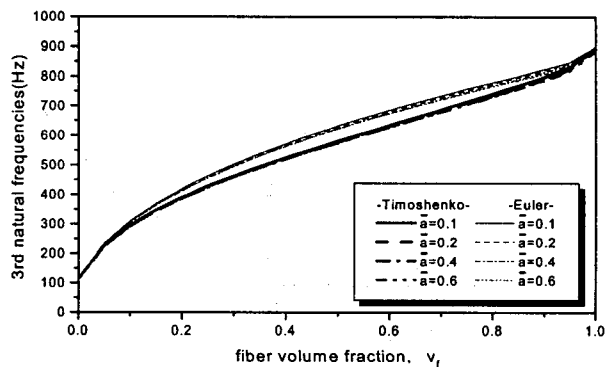
**5.3 크랙이 있는 경우**

Fig. 4에서 섬유각  $\alpha=90^\circ$  인 경우 한 개의 크랙이 있는 복합재료 보의 고유진동수를 크랙의 무차원 위치와 깊이를 합수로 하여 Timoshenko 보와 Euler 보 이론에 따른 차이를 비교하여 나타내었다. 크랙의 위치가 보의 끝단으로 접근하면 1차 고유진동수는 항상 증가하나 2, 3차 고유진동수는 증가 및 감소를 반복하며 그 증감회수는 3차의 경우가 2차의 경우보다 1회 더 많다. 동일한 크랙의 위치에서 크랙의 깊이가 증가하면 1, 2, 3차 모두 고유진동수가 감소함을 알 수 있으나 크랙의 위치에 따라 감소의 정도가 매우 다르게 나타나며, 이는 뒤에 설명하는 모드형상과 밀접한 관계가 있는 것으로 판단된다. 또한 Euler 보에 비해서 Timoshenko 보의 경우 모두 낮은 고유진동수를 갖는 것으로 나타났으며 이러한 경향은 3차 고유진동수에서 가장 크게 나타났다. 이와 같은 크랙 위치 및 깊이에 따른 각 차수의 고유진동수 특성변화를 이용하여 모드시험에 의한 비파괴검사(NDE)를 할 수 있는 이론적인 근거가 충분한 것으로 판단된다.

Fig. 5는 Timoshenko 보와 Euler 보 사이의 차이가 뚜렷한 섬유각  $\alpha=90^\circ$ , 크랙 위치  $c=0.1$  인 경우의 3차 고유진동수를 섬유체적비와 크랙깊이를 합수로 하여 두 보 이론의 차이를 비교한 것이다. 이 경우에도 Timoshenko 보의 고유진동수가 Euler 보에 비해서 낮게 나타났으며 섬유체적비가 0.3~0.8



**Fig. 4** Variation of the natural frequencies with crack position for several  $\bar{a}$ 's ( $\alpha=90^\circ$ ,  $v_f=0.5$ )



**Fig. 5** Variation of the third natural frequencies with fiber volume fraction ( $\alpha=90^\circ$ ,  $c=0.1$ )

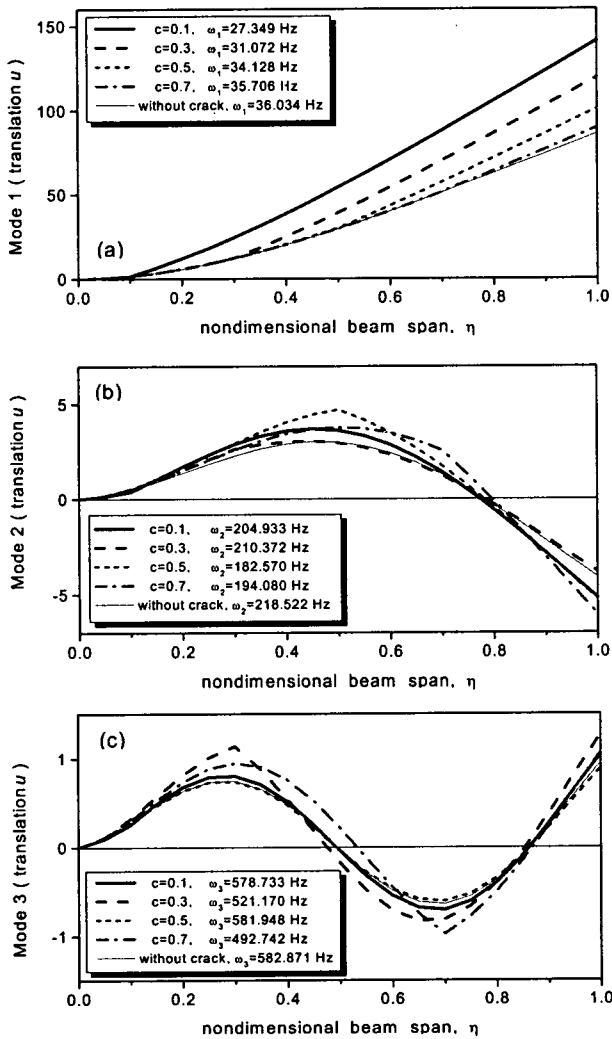
**Table 2** Comparison of the first three natural frequencies with a crack ( $\nu_f=0.5, \bar{a}=0.2, c=0.1$ )

섬유각 ( $^\circ$ )	Timoshenko 보 (Hz)			Euler 보 (Hz)		
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
0	9.20734	57.76005	161.27265	9.21180	57.95537	162.57311
15	9.49394	59.71247	167.21803	9.49573	59.80561	167.84572
30	12.51998	79.37244	223.10624	12.52103	79.47765	223.83460
45	18.58288	121.39985	345.17227	18.58221	121.60328	346.65801
60	23.92175	166.31908	481.31647	23.92135	166.80220	485.03844
75	26.66928	197.81743	576.48679	26.68682	199.42708	589.37956
90	27.34933	204.93331	578.73338	27.44205	211.24419	627.89382

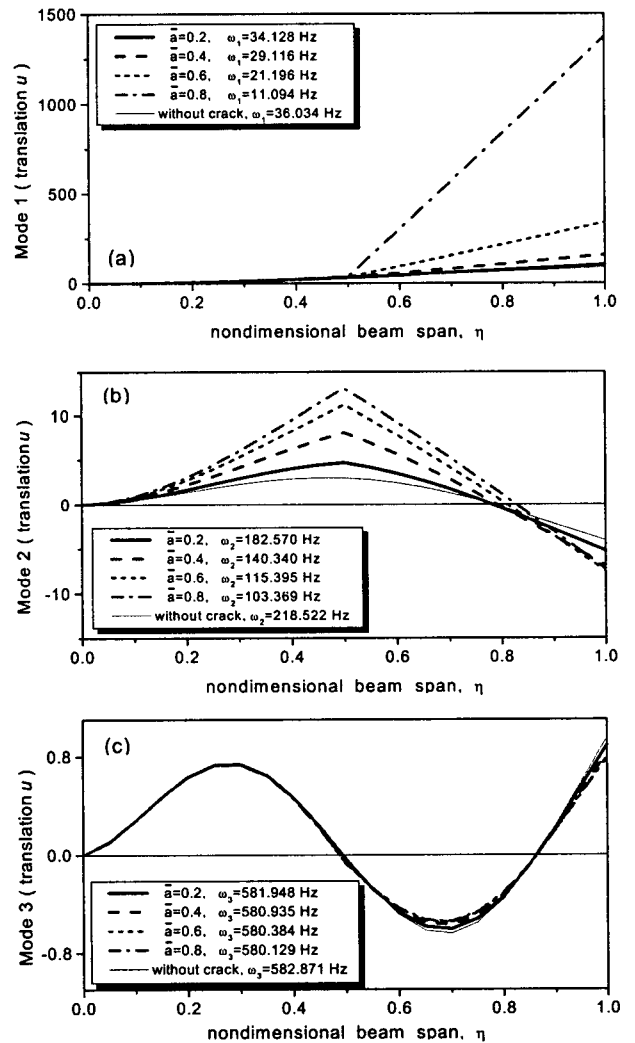
사이에서 그 차이를 뚜렷이 볼 수 있다. 그림으로 나타내지는 않았지만 이 조건에서 2, 3차의 고유진동수는 크랙의 깊이에 따라 큰 변화를 보이지 않았으나 1차 고유진동수가 깊이에 따라 가장 큰 변화를 보였다. 크랙이 있는 복합재료 보에 대한 두 이론의 차이를 수치적으로 Table 2에 나타내었다.

**5.4 모드형상**

Fig. 6에서 일정 크랙 깊이에 대하여 크랙의 위치를 변경시킬 때 굽힘 변위  $u$  의 1, 2, 3차 모드형상을 나타내었다. 크랙의 위치에서 모드형상의 경사각의 변화가 뚜렷이 감지된다. 동일한 크랙 깊이에서 모드형상의 진폭이 영이 되는 node와 진폭이 최대가 되는 antinode 에 크랙이 인접하는지의 여부에



**Fig. 6** Variation of the mode shapes for different crack positions ( $\nu_f=0.5, \alpha=90^\circ, \bar{a}=0.2$ )



**Fig. 7** Variation of the mode shapes for different crack depths ( $\nu_f=0.5, \alpha=90^\circ, c=0.5$ )



따라 각 차수의 모드형상이 다름을 알 수 있다. Fig. 7에서는 동일한 크랙의 위치에서 크랙의 깊이를 변화시켰을 때 굽힘 변위  $u$ 의 모드형상의 변화를 보여준다. 1, 2차 모드에서 크랙 깊이의 증가에 따라 모드형상의 경사각이 크게 변화하며 크랙 위치와 node가 일치하는 3차 모드에서는 크랙의 깊이에 따른 모드형상의 변화가 거의 나타나지 않았다. 이 결과들로부터 Fig. 4에서 나타난 고유진동수의 천이현상은 크랙 위치 및 깊이는 물론, 이에 따라 영향을 받는 모드형상과 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다.

Fig. 8은 앞과 동일한 조건에서 크랙의 위치 및 깊이 변화에 따른 보 단면의 회전각  $\theta_y$ 에 관한 2차 모드형상을 나타낸다. 이 결과와 Figs. 6, 7의 2차 모드형상과 비교하여 보면 크랙의 위치나 깊이 변화에 따른 모드형상의 변화가 크랙 위치를 중심으로 더욱 뚜렷하게 나타난다.

본 연구를 통하여 얻어진 크랙에 의한 1, 2, 3차 고유진동수 및 1, 2, 3차 모드형상의 변화 경향을 기초로 하여, 비파괴 모드시험(modal testing)에 의하여 고유진동수 및 모드형상의 변화를 검출 또는 모니터링 하여 크랙의 존재 여부 및 크랙의 위치, 크

랙의 크기 그리고 크랙의 진전상황을 파악하여 구조물의 건전성을 판단하고 예측할 수 있다.

## 6. 결 론

횡 방향 개구형 크랙이 있는 복합재료 외팔보에 대하여 제 I 파괴모드 및 제 II 파괴모드를 고려한 파괴역학적 접근을 실시하였으며, 크랙을 등가의 회전스프링으로 전환하여 지배방정식을 유도하고 해석을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 크랙이 있는 복합재료 보에 대해서도 파괴역학 이론에 의한 크랙의 모델링과 Timoshenko 보 이론에 의한 운동방정식 및 경계조건의 유도가 가능함을 보였다.

(2) 동일 조건하에서는 크랙의 유무에 관계없이 Timoshenko 보에 의한 고유진동수가 Euler 보에 비해 모두 낮으며 그 경향 및 크기의 차이는 고차의 고유진동수에서 크게 나타난다. 또한 Timoshenko 보와 Euler 보의 고유진동수 차이는 섬유각과 섬유체적비에 따라 크게 영향을 받는다.

(3) 섬유각, 섬유체적비, 크랙의 위치 및 깊이에 따른 고유진동수 및 모드형상의 변화를 해석적으로 예측하였으며 본 연구의 해석 결과를 이용하여 복합재료 보 구조물의 크랙의 존재 여부 및 크랙의 위치, 크랙의 크기 그리고 크랙의 진전상황을 파악하여 구조물의 건전성을 판단하고 예측할 수 있는 비파괴검사(NDE)가 가능함을 보였다.

## 후 기

이 연구는 1997년도 학술진흥재단 학술연구비에 의하여 지원되었으며 이에 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- (1) Nikpour, K., 1990, "Buckling of Cracked Composite Columns", *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 26, No. 12, pp. 1371~1386.
- (2) Ostachowicz, W. M. and Krawczuk, M., 1990, "Vibration Analysis of a Cracked Beam", *Computers & Structures*, Vol. 36, No. 2, pp. 245~250.
- (3) Boltezar, M., Strancar, B. and Kuhelj, A., 1998, "Identification of Transverse Crack Location in Flexural Vibrations of Free-Free Beams", *Journal of Sound and Vibration*, 211(5), pp. 729~734.

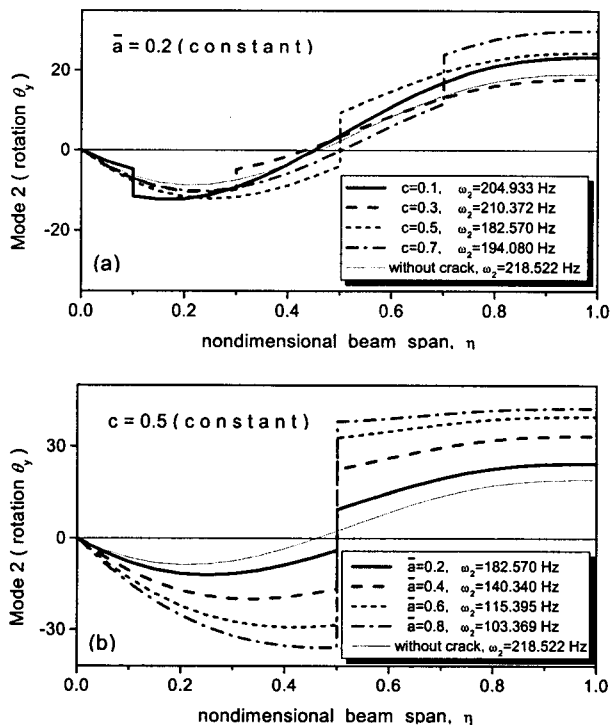


Fig. 8 Second mode shapes of cross-section rotation for different crack positions and depths ( $\nu_f = 0.5$ ,  $\alpha = 90^\circ$ )

(4) Nikpour, K. and Dimarogonas, A. D., 1988, "Local Compliance of Composite Cracked Bodies", *Journal of Composite Science and Technology*, 32, pp. 209~223.

(5) Krawczuk, M. and Ostachowicz, W. M., 1995, "Modelling and Vibration Analysis of a Cantilever Composite Beam with a Transverse Open Crack", *Journal of Sound and Vibration*, 183(1), pp. 69~89.

(6) Song, O., 1990, "Modelling and Response Analysis of Thin-Walled Beam Structures Constructed of Advanced Composite Materials", Ph. D. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University.

(7) Suo, Z., Bao, G., Fan, B. and Wang, T. C., 1991, "Orthotropy Rescaling and Implications for Fracture in Composites", *Int. J. Solids & Structures*, Vol. 28, No. 2, pp. 235~248.