

<논 문>

워핑을 고려한 일축 대칭단면을 갖는 Timoshenko보의 휨-비틀림 연성진동

Coupled Flexural-Torsional Vibrations of Timoshenko Beams of Monosymmetric Cross-Section including Warping

이병구* · 오상진** · 진태기*** · 이종국***

Byoung Koo Lee, Sang Jin Oh, Tae Ki Jin and Jong Kook Lee

(1999년 6월 23일 접수 : 1999년 7월 27일 심사완료)

Key Words : Coupled Flexural-Torsional Vibration(휨-비틀림 연성진동), Monosymmetric Crosssection(일축 대칭단면), Timoshenko Beam Theory(Timoshenko보 이론), Warping(워핑)

ABSTRACT

This paper deals with the coupled flexural-torsional vibrations of Timoshenko beams with monosymmetric cross-section. The governing differential equations for free vibration of such beams are derived and solved numerically to obtain frequencies and mode shapes. Numerical results are calculated for three specific examples of beams with free-free, clamped-free, hinged-hinged, clamped-hinged and clamped-clamped end constraints. The effect of warping stiffness on the natural frequencies and mode shapes is discussed and it is concluded that substantial error can be incurred if the effect is ignored.

1. 서 론

보는 대부분의 구조물에서 기본단위구조로 이용되고 있기 때문에 다양한 조건을 갖는 보의 동적거동, 특히 자유진동에 관한 많은 연구가 이루어지고 있다. 단면도심과 전단중심이 일치하는 이축 대칭단면을 갖는 보에서는 휨과 비틀림진동이 독립적으로 발생한다. 그러나 Fig. 1에 보인바와 같은 단면도심과 전단중심이 일정거리를 가지고 있는 일축 대칭단면을 갖는 보에서는 대칭축에 수직인 방향으로 발생하는 휨과 비틀림의 연성진동이 발생하기 때문에 복잡

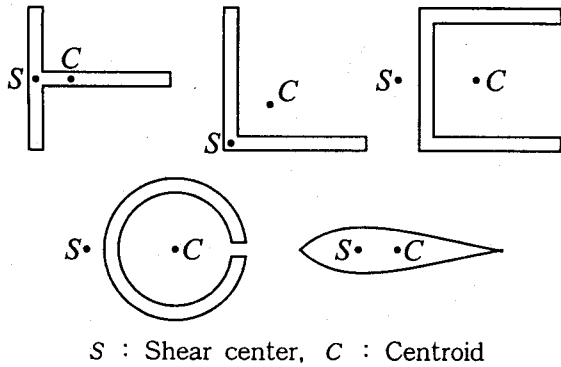
한 거동특성을 보인다.

일축 대칭단면을 갖는 보의 자유진동에 관한 연구 동향을 해석모형에 따라 구분하면 다음 세가지로 분류할 수 있다. 첫째는 회전관성과 전단변형의 영향을 무시한 Bernoulli-Euler보 이론을 적용한 연구이다. 이에 대한 최근 연구로서 Dokumaci⁽¹⁾와 Banerjee⁽²⁾는 워핑을 무시하고 일축 대칭단면 보의 자유진동에 대한 엄밀해를 산출하였으며, Bishop 등⁽³⁾은 워핑을 고려하여 Dokumaci의 연구결과를 확장하므로써 워핑이 일축 대칭단면 보의 자유진동에 미치는 영향이 매우 큼을 고찰하였다. Klausbruckner와 Pryputniewicz⁽⁴⁾는 레이저 사진기법을 이용한 실험방법으로 채널단면 보의 진동특성을 분석하였다. Banerjee 등⁽⁵⁾은 워핑을 고려하여 대상보의 자유진동에 대한 동적강성행렬(dynamic stiffness matrix)을 유도하였으며, 다양한 단부조건을 갖는 채널단면 보의 고유진동수를 산출

* 정회원, 원광대학교 공과대학 토목환경공학과

** 정회원, 담양대학 토목과

*** 원광대학교 대학원 토목환경공학과



S : Shear center, C : Centroid

Fig. 1 Example of beam cross-sections with non-coincident centroid and shear center

하였다.

둘째는 전단변형은 무시하고 회전관성만 고려한 Rayleigh보 이론을 적용한 연구로서 Friberg⁽⁶⁾와 Leung^(7,8)은 축하중을 고려하고 동적강성법을 이용하여 일축 대칭단면 보의 자유진동에 대한 연구를 수행하였다. 그리고 김⁽⁹⁾은 워핑을 고려하여 고정-자유 채널단면 보의 엄밀해를 산출하였다. 마지막으로 회전관성과 전단변형을 고려한 Timoshenko보 이론을 적용한 연구로서 Bishop 등^(10,11)은 워핑을 고려하여 채널단면 보의 휨-비틀림 연성진동에 관한 연구를 수행하였다. 그리고 Banerjee와 Williams⁽¹²⁾는 워핑을 무시한 Timoshenko보의 휨-비틀림 진동에 관한 연구를 수행하였지만 해석결과를 제시하지 않았다. Bercin과 Tanaka⁽¹³⁾는 워핑을 고려한 고정-자유 보의 고유진동수방정식을 유도하고, 회전관성, 전단변형 및 워핑이 고유진동수 및 진동형에 미치는 영향을 분석하였다.

본 연구에서는 정확한 고유진동수 및 진동형을 산출할 수 있는 수치해석 알고리즘을 이용하여 워핑을 고려한 일축대칭 단면을 갖는 Timoshenko보의 휨-비틀림 연성진동에 대한 고유진동수 및 진동형을 산출하고, 그 특성을 고찰하는데 목적이 있다. 해석대상보의 단면으로 세가지 단면형상을 택하였으며, 자유-자유, 고정-자유, 회전-회전, 고정-회전 및 고정-고정 보에 대한 해석결과를 고찰하였다.

2. 수학적 모형 및 해석방법

Fig. 2는 지간길이가 l 인 일축 대칭단면 보의 예를 나타낸 것이다. 이 그림에서 C 와 S 는 각각 단면도심과 전단중심이며, e 는 단면도심과 전단중심 사이의 거리이다. 그리고 Q , M 및 T 는 진동시 보단

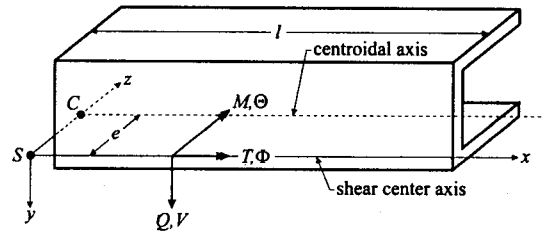


Fig. 2 Geometry of beams with monosymmetric cross-section

면에 발생하는 합응력으로 각각 보축상 임의점 x 에서의 전단력, 휨모멘트 및 비틀림모멘트이며, V , Θ 및 Φ 는 수직방향변위, 순수휨에 의한 단면회전각과 비틀림각이다.

진동시 보미소요소에 작용하는 합응력 및 관성력 사이의 동적평형방정식은 식 (1)~(3)과 같다⁽¹²⁾.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - m \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + Q - I_c \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} - I_s \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + em \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

위의 식들에서 m 은 보재료의 단위길이당 질량이며, I_c 와 I_s 는 각각 단위길이당 질량 관성모멘트 및 극관성모멘트이다.

부재단면에 발생하는 휨모멘트 M 은 식 (4)와 같으며, 워핑을 고려하는 경우 비틀림모멘트 T 는 식 (5)와 같다⁽¹⁴⁾.

$$M = EI \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad (4)$$

$$T = GJ \frac{\partial \Phi}{\partial x} - E\Gamma \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \quad (5)$$

위의 식들에서 EI 는 보단면의 휨강성, GJ 는 비틀림강성, $E\Gamma$ 는 워핑강성이다. 한편 전단변형을 고려하는 경우 전단력 Q 는 식 (6)과 같다⁽¹⁵⁾.

$$Q = kGA \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \Phi \right) \quad (6)$$

윗 식에서 k , G 및 A 는 단면형상에 따른 상수, 전단탄성계수 및 보단면의 단면적이다. 따라서 kGA 는 전단강성이다.

대상보가 조화진동을 한다고 가정하면 V , Θ 및 Φ 는 식 (7)~(9)와 같이 쓸 수 있다.

$$V(x, t) = v \sin(\omega_i t) \quad (7)$$

$$\Theta(x, t) = \theta \sin(\omega_i t) \quad (8)$$

$$\Phi(x, t) = \phi \sin(\omega_i t) \quad (9)$$

위의 식들에서 v , θ 및 ϕ 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며, ω_i 는 i 번째 고유각진동수(rad/sec), t 는 시간이다.

식 (4)~(9)를 식 (1)~(3)에 대입하고 정리하면 식 (10)~(12)를 얻을 수 있으며, 이는 워핑을 고려한 일축 대칭단면을 갖는 Timoshenko보의 횡-비틀림 연성진동에 대한 지배미분방정식이다.

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{m\omega_i^2}{kGA} v + \frac{d\theta}{dx} + \frac{e\omega_i^2}{kGA} \phi \quad (10)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = \left(\frac{kGA}{EI} - \frac{I_c \omega_i^2}{EI} \right) \theta - \frac{kGA}{EI} \frac{dv}{dx} \quad (11)$$

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} = \frac{GJ}{EI} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{I_s \omega_i^2}{EI} \phi - \frac{e\omega_i^2}{EI} v \quad (12)$$

워핑을 고려하지 않는 경우 식 (12)는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{I_s \omega_i^2}{GJ} \phi + \frac{e\omega_i^2}{GJ} v \quad (13)$$

고정단, 회전단 및 자유단에 대한 경계조건식은 각각 식 (14)~(16)과 같다.

$$v=0, \theta=0, \phi=0, \frac{d\phi}{dx}=0 \quad (14a-d)$$

$$v=0, \frac{d\theta}{dx}=0, \phi=0, \frac{d^2 \phi}{dx^2}=0 \quad (15a-d)$$

$$\frac{d\theta}{dx}=0, \theta - \frac{dv}{dx}=0, \frac{GJ}{EI} \frac{d\phi}{dx} - \frac{d^3 \phi}{dx^3}=0,$$

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2}=0 \quad (16a-d)$$

워핑을 고려하지 않는 경우 고정단 및 회전단의 경계조건식은 식 (14)와 (15)에서 식 (14d) 및 (15d)를 제외시킨 결과와 같으며, 자유단인 경우에는 식 (16)에서 식 (16d)를 제외시키고 식 (16c)를 다음 식으로 교체한 것과 같다.

$$\frac{d\phi}{dx}=0 \quad (17)$$

본 연구에서는 Oh 등⁽¹⁶⁾이 아치의 자유진동을 해석하기 위하여 사용한 수치해석기법을 이용하여 대상보의 고유진동수 및 진동형을 산출하였으며, 이의

개략적인 내용은 다음과 같다. 식 (10)~(12)를 8개의 1계미분방정식으로 변환하고, 이들 식에 포함된 미지의 고유치 ω_i 항을 가정하여 대입한다. 식 (10)~(12)를 변환하여 얻은 8개의 1계미분방정식을 수치적분하기 위해서는 8개의 초기치가 결정되어야만 한다. 그러나 식 (14), (15) 또는 (16)에 나타낸 바와 같이 좌단에서 초기치는 4개씩만을 알고 있으므로, 기지의 초기치를 포함한 4조의 초기조건을 가정하여 좌단에서 우단까지 4회의 수치적분을 수행한다. 수치적분결과로서 보측상 모든 점에서 $v, dv/dx, \theta, d\theta/dx, \phi, d\phi/dx, d^2\phi/dx^2$ 및 $d^3\phi/dx^3$ 가 각각 4쌍씩 결정된다. 앞서 4조의 초기조건을 가정하여 각각 초기치문제로 형성하였으므로 4회의 수치적분결과 얻어진 결과들 사이에는 선형결합의 관계가 성립되며, 앞서 가정한 ω_i 값이 대상보에 대한 참고유치라면 우단에서 얻어진 선형결합의 결과들은 식 (14), (15) 또는 (16)의 경계조건식을 만족해야만 한다. 이 과정에서 행렬값탐사법을 이용하였으며, 행렬값탐사법을 적용하는 과정에서 참고유치 ω_i 를 찾기 위해서는 Regula-Falsi법을 이용하였다. 또한 미분방정식의 수치적분은 공학문제에서 많이 이용되고 있는 Runge-Kutta법을 이용하였다.

한편 워핑을 고려하지 않는 경우 식 (10), (11)과 (13)의 지배미분방정식은 6개의 1계미분방정식으로 변환된다. 따라서 이를 수치적분하기 위해서는 6개의 초기조건이 필요하다. 그러나 각 단부조건에 대한 경계조건은 3개씩만을 알고 있으므로 이들 기지의 초기치를 포함한 3조의 초기조건을 가정하여 위에서 설명한 바와 같은 방법으로 지배방정식을 해석하였다.

본 연구에서는 이상의 수치해석과정을 컴퓨터 프로그램화하여 최저차 4개의 고유진동수 $f_i = \omega_i / (2\pi)$ 및 진동형을 산출하였다.

3. 해석에 및 고찰

본 연구에서는 워핑이 대상보의 고유진동수 및 진동형에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 Fig. 3에 나타낸 세가지 단면을 갖는 보를 택하였으며, 단부조건으로는 자유-자유, 고정-자유, 회전-회전, 고정-회전 및 고정-고정의 단부조건을 고려하였다. Table 1은 해석예에서 택한 보의 구조적 특성값을 나타낸 것이다.

첫번째 해석예는 Fig. 3(a)에 나타낸 채널단면 보

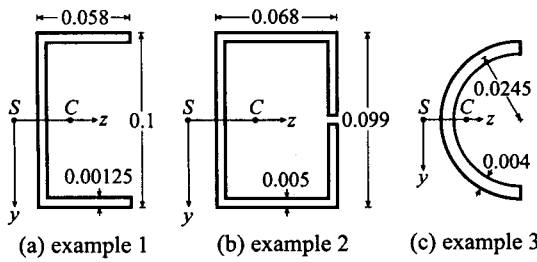


Fig. 3 Cross-section and dimension (in meters) of the beams considered in the examples

Table 1 Properties of the three beams considered in the examples

Properties	Example 1	Example 2	Example 3
EI ($N \cdot m^2$)	9.74×10^4	14.36×10^4	6380
GJ ($N \cdot m^2$)	11.21	346.71	43.46
kGA (N)	7.93×10^6	20.81×10^6	4.081×10^6
EI_c ($N \cdot m^4$)	35.4	536.51	0.10473
I_c ($kg \cdot m$)	7.25×10^{-1}	3.17×10^{-2}	0.501×10^{-3}
I_c ($kg \cdot m$)	3.53×10^{-1}	5.65×10^{-3}	0.251×10^{-3}
m (kg/m)	2.095	4.256	0.835
l (m)	1.28	2.7	0.82
e (m)	0.03771	0.0735	0.0155

로서 이에 대한 구조적 특성값은 Table 1에 나타낸 바와 같다. 워핑을 고려한 경우와 고려하지 않은 경우 Timoshenko보 이론에 의한 고유진동수 및 Banerjee 등⁽⁵⁾이 워핑을 고려하여 Bernoulli-Euler보 이론으로 산출한 고유진동수를 Table 2에 수록하였으며, 워핑을 고려하지 않은 경우 발생하는 고유진동수 오차를 Fig. 4에 나타내었다.

Table 2에서 워핑을 고려한 고정-자유 보의 고유진동수는 본 연구와 Bishop 등⁽¹¹⁾의 결과가 잘 근접함을 알 수 있다. Table 2와 Fig. 4에 나타낸 결과에서 예견된 바와 같이 워핑을 고려하지 않은 경우 고유진동수 오차는 항상 커짐을 알 수 있으며, 자유-자유인 경우 제 1모드를 제외한 모든 보에 대하여 70%이상의 큰 차이를 나타냄을 알 수 있다. 한편 자유-자유 단부조건을 제외한 나머지 단부조건에서는 단부강성이 큰 순서로 즉 고정-고정, 고정-회전, 회전-회전, 고정-자유의 순서로 워핑의 영향이 큼을 알 수 있다.

한편 이 표에서 워핑을 고려한 경우 Timoshenko보 이론과 Banerjee 등⁽⁵⁾이 Bernoulli-Euler보이론을 적용하여 산출한 결과의 차이 즉 회전관성 및 전단변형의 영향은 회전-회전(4.2%) 및 고정-고정(16.7%)인

Table 2 Natural Frequencies (in Hz) of beams considered in example 1

End condition	i	Model 1*	Model 2			
		With warp	With warp		Without warp	
		Ref. [A]**	This study	Ref. [B]	This study	Ref.
Free †	1	22.04	21.947	-	19.823	-
	2	152.08	151.71	-	30.691	-
	3	412.23	408.72	-	46.273	-
	4	-	578.78	-	61.422	-
Clamped	1	25.37	25.344	24.93	7.6635	-
	2	98.57	96.623	95.81	22.992	-
	3	149.40	147.76	145.3	38.379	-
	4	-	405.62	397.4	53.735	-
Hinged	1	67.13	67.001	-	15.341	-
	2	263.67	261.79	-	30.709	-
	3	275.80	264.63	-	46.071	-
	4	-	581.74	-	61.431	-
Clamped	1	-	103.04	-	15.352	-
	2	-	328.63	-	30.710	-
	3	-	391.54	-	46.071	-
	4	-	676.57	-	61.431	-
Clamped	1	149.39	148.08	-	15.356	-
	2	410.56	402.60	-	30.714	-
	3	624.60	534.12	-	46.071	-
	4	-	778.21	-	61.432	-

† Rigid-body mode in free-free ends is discounted

* Model 1 : Bernoulli-Euler beam theory.

Model 2 : Timoshenko beam theory

** Ref. [A] : Banerjee et al. (1996),

Ref. [B] : Bishop et al. (1985)

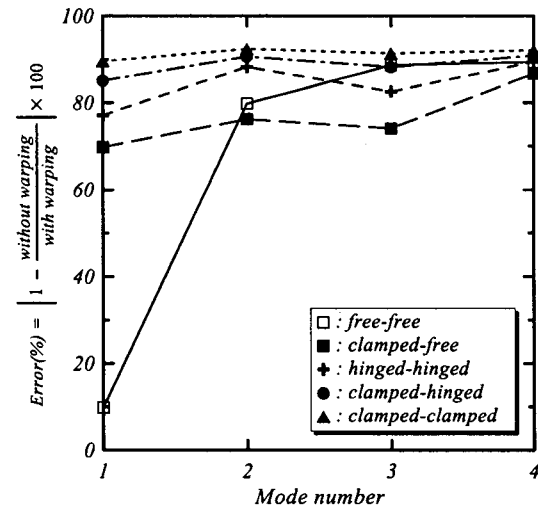


Fig. 4 Percentage errors of frequencies of the channel section beams

경우 제 3모드를 제외하고는 모두 2%이하의 차이를 나타냄을 알 수 있다.

Fig. 5는 Table 2에 수록된 고정-자유 보의 고유

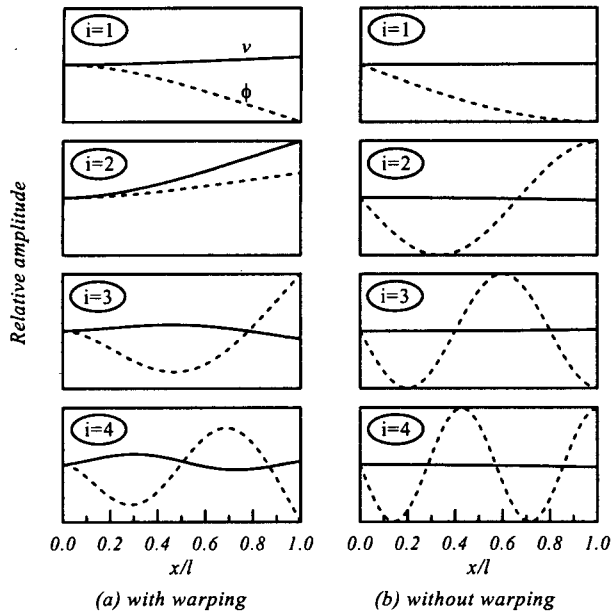


Fig. 5 The mode shapes of the channel section beam with clamped-free ends

Table 3 Natural Frequencies (in Hz) of beams considered in example 2

End condition	i	Model 1*		Model 2		
		With warp		With warp	Without warp	
		Ref.**	This study	Ref.	This study	Ref.
Free - free	1	-	40.208	-	35.888	-
	2	-	60.383	-	58.304	-
	3	-	153.02	-	76.136	-
	4	-	213.03	-	96.313	-
Clamped - free	1	11.03	11.006	11.01	8.3076	8.30
	2	39.02	38.934	38.93	23.837	23.79
	3	58.19	57.824	57.82	36.625	36.63
	4	152.39	150.52	150.51	47.265	47.21
Hinged - hinged	1	-	26.754	-	17.785	-
	2	-	95.417	-	37.876	-
	3	-	97.669	-	57.498	-
	4	-	213.68	-	76.987	-
Clamped - hinged	1	-	39.380	-	18.704	-
	2	-	121.60	-	37.998	-
	3	-	142.98	-	57.524	-
	4	-	248.11	-	76.990	-
Clamped - clamped	1	-	55.219	-	19.037	-
	2	-	148.16	-	38.369	-
	3	-	202.59	-	57.530	-
	4	-	284.80	-	77.049	-

† : See Table 2.

** : Bercin and Tanaka(1997)

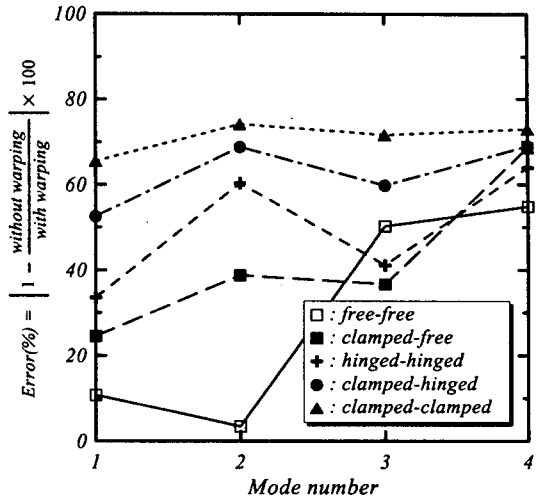


Fig. 6 Percentage errors of frequencies of the thin-walled box beams due to omission of the warping effect

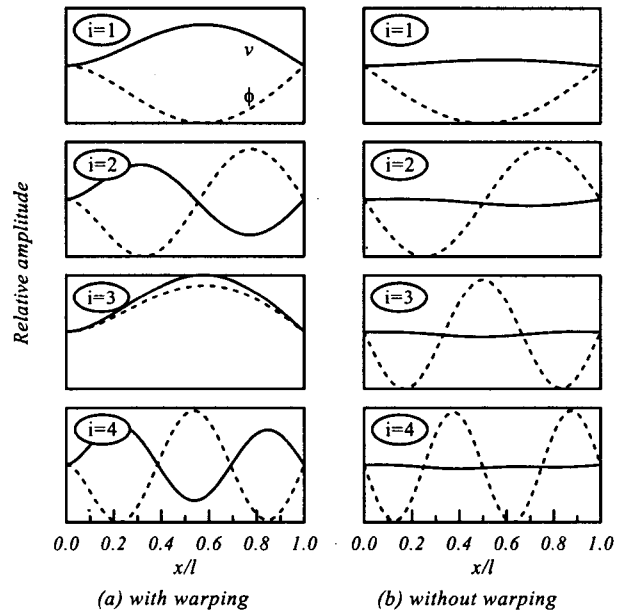


Fig. 7 The mode shapes of the thin-walled box beam with clamped-hinged ends

진동수에 대응하는 v 와 ϕ 의 진동형을 나타낸 것이다. 이 그림에서 워핑을 고려하지 않는 경우에는 순수 비틀림모드에 가까운 진동형을 나타내지만, 워핑을 고려하는 경우에는 휨과 비틀림의 강한 연성모드가 발생함을 알 수 있다. 4

두번째 해석예는 Table 1에 수록한 구조적 특성값을 갖는 Fig. 3(b)의 작은 틈을 가진 두께가 얇은 상자형단면 보로서 이에 대한 고유진동수를 Table 3에 수록하였으며, 워핑을 고려하지 않는 경우 발생

하는 고유진동수 오차를 Fig. 6에 나타내었다. 이 표에서 고정-자유 보에 대한 본 연구와 Bercin과 Tanaka⁽¹³⁾의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다.

Table 3과 Fig. 6에서 워핑을 고려하지 않는 경우 발생하는 고유진동수 오차는 몇 개의 모드를 제외하고 40~70%내외를 보임을 알 수 있다. 이러한 차이는 매우 큰 것이지만 워핑강성이 작은 Fig. 3(a)의 채널단면 보에 비해 상대적으로 작은 오차를 나타낼 수 있다. 이는 Fig. 3(a)의 채널단면이 얇은 두께의 열린 단면(thin-walled open cross-section)임에 비해 Fig. 3(b)의 단면은 작은 틈이 있지만 상자형단면(box shape cross-section)에 가깝기 때문인 것으로 판단된다. 한편 상자형단면 보에 대한 결과에서도 자유-자유 보를 제외하고는 일반적으로 단부강성이 클수록 워핑의 영향이 큼을 알 수 있다.

Fig. 7은 Table 3에 수록된 고정-회전 보의 고유진동수에 대응하는 v 와 ϕ 의 진동형을 나타낸 것이다. 이 그림에서 워핑을 고려하지 않는 경우에는 약한 휨-비틀림 연성모드를 보이지만, 워핑을 고려하

는 경우에는 강한 연성모드가 발생함을 알 수 있다.

마지막 해석에는 Table 1에 수록한 구조적 특성값을 갖는 Fig. 3(c)의 얇은 두께를 가진 반원형단면 보로서 이에 대한 고유진동수는 Table 4, 워핑을 고려하지 않는 경우 발생하는 고유진동수 오차는 Fig. 8에 나타내었다. Fig. 8에서는 Figs. 4와 6에 보인 결과에 비해 고유진동수 오차가 작음을 알 수 있는데 이는 앞서 다룬 두 단면에 비해 워핑강성이 작기 때문이다. Fig. 9는 Table 4에 수록된 고정-고정 보

Table 4 Natural Frequencies (in Hz) of beams considered in example 3

End condition	i	Model 1*		Model 2		
		With warp	With warp		Without warp	
			Ref.**	This study	Ref.	This study
Free † - free	1	-	233.55	-	230.28	-
	2	-	320.67	-	310.38	-
	3	-	572.12	-	519.67	-
	4	-	669.48	-	638.10	-
Clamped - free	1	63.79	63.507	63.51	62.344	63.39
	2	137.7	137.39	137.39	129.88	129.34
	3	278.4	275.82	275.82	259.22	259.22
	4	484.8	481.09	481.10	418.89	415.72
Hinged - hinged	1	-	149.66	-	148.15	-
	2	-	317.26	-	314.96	-
	3	-	364.02	-	343.11	-
	4	-	601.03	-	527.23	-
Clamped - hinged	1	-	177.80	-	166.86	-
	2	-	386.55	-	341.66	-
	3	-	441.99	-	436.51	-
	4	-	640.89	-	530.19	-
Clamped - clamped	1	-	197.73	-	173.39	-
	2	-	422.22	-	352.00	-
	3	-	589.20	-	517.76	-
	4	-	687.16	-	599.54	-

*† : See Table 2.

** : Bercin and Tanaka(1997)

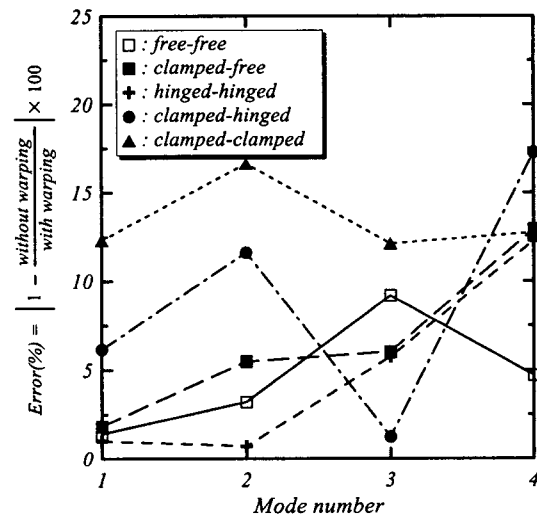


Fig. 8 Percentage errors of frequencies of the semi-circular section beams due to omission of the warping effect

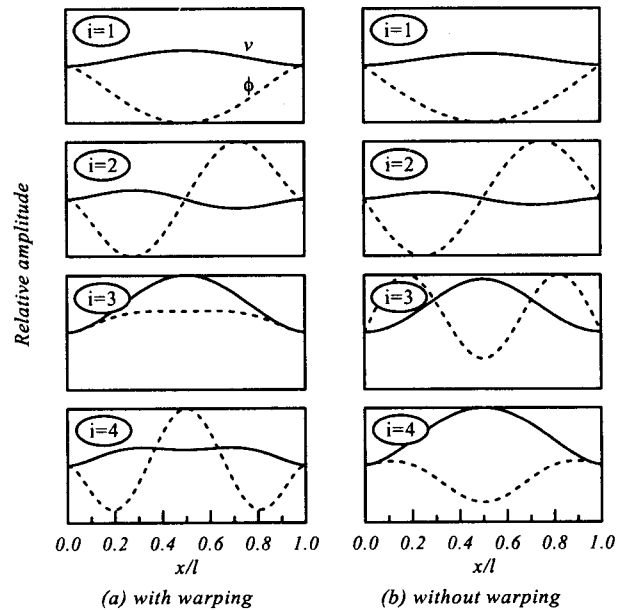


Fig. 9 The mode shapes of the semi-circular section beam with clamped-clamped ends

의 고유진동수에 대응하는 ν 와 ϕ 의 진동형을 나타낸 것이다. 이 그림에서는 워핑의 고려여부에 관계없이 휨-비틀림 연성모드를 보임을 알 수 있다.

4. 요약 및 결론

본 연구에서는 일축 대칭단면을 갖는 Timoshenko 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 해석예에서는 채널단면, 작은 틈이 있는 상자형단면, 반원형단면을 갖는 자유-자유, 고정-자유, 회전-회전, 고정-회전 및 고정-고정 보에 대한 결과를 산출하였다. 수치해석결과로부터 워핑을 고려하는 경우 대칭축에 수직인 방향으로 발생하는 휨진동과 비틀림진동의 연성작용으로 고유진동수가 증가하며, 워핑을 무시하는 경우 고유진동수 및 진동형에 큰 차이가 발생할 수 있음을 알 수 있었다.

참고 문헌

- (1) Documaci, E., 1987, "An Exact Solution for Coupled Band Torsion Vibrations of Uniform Beams Having Single Cross-sectional Symmetry," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 119, pp. 443~449.
- (2) Banerjee, J. R., 1989, "Coupled Bending-Torsional Dynamic Stiffness Matrix for Beam Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 1283~1298.
- (3) Bishop, R. E. D. Cannon, S. M. and Miao, S., 1989, "On Coupled Bending and Torsional Vibration of Uniform Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 131, pp. 457~464.
- (4) Klausbruckner, M. J. and Pryputniewicz, R. J., 1995, "Theoretical and Experimental Study of Coupled Vibrations of Channel Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 183, pp. 239~252.
- (5) Banerjee, J. R., Guo, S. and Howson, W. P., 1996, "Exact Dynamic Stiffness Matrix of a Bending-Torsion Coupled Beam Including Warping," *Computers and Structures*, Vol. 59, pp. 613~621.
- (6) Friberg, P. O., 1985, "Beam Element Matrices Derived from Vlasov's Theory of Open Thin-Walled Elastic Beams," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 1205~1228.
- (7) Leung, A. Y. T., 1991, "Natural Shape Functions of Compressed Vlasov Element," *Thin Walled Structures*, Vol. 11, pp. 431~438.
- (8) Leung, A. Y. T., 1992, "Dynamic Stiffness Analysis of Thin-Walled Structures," *Thin Walled Structures*, Vol. 14, pp. 209~222.
- (9) 김상환, 1995, "휨과 비틀림이 연계된 채널보의 진동," *한국소음진동공학회지*, 제 5 권, 제 3 호, pp. 327~335.
- (10) Bishop, R. E. D. and Price, W. G., 1977, "Coupled Bending and Twisting of a Timoshenko Beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 50, pp. 469~477.
- (11) Bishop, R. E. D, Price, W. G. and Zhang, X. C., 1985, "A Note on the Dynamical Behaviour of Uniform Beams Having Open Channel Section," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 99, pp. 155~167.
- (12) Banerjee, J. R. and Williams, F. W., 1992, "Coupled Bending-Torsional Dynamic Stiffness Matrix for Timoshenko Beam Elements," *Computers and Structures*, Vol. 42, pp. 301~310.
- (13) Bercin, A. N. and Tanaka, M., 1997, "Coupled Flexural-Torsional Vibrations of Timoshenko Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 207, pp. 47~59.
- (14) Heins, C. P., 1975, *Bending and Torsional Design in Structural Members*, D.C. Heath and Company, Lexington.
- (15) Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, Jr., W., 1974, *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, New York.
- (16) Oh, S. J., Lee, B. K. and Lee, I. W., 1999, "Natural Frequencies of Noncircular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, No.1, pp. 23~33.