

〈논 문〉

엄밀한 동적 요소를 이용한 프레임 구조물의 모델링 및 모드 해석

Modeling and Its Modal Analysis for Distributed Parameter Frame Structures using Exact Dynamic Elements

김 종 욱* · 홍 성 욱**

Jong-Wook Kim and Seong-Wook Hong

(1999년 5월 27일 접수 ; 1999년 7월 28일 심사완료)

Key Words : Exact Dynamic Element Matrix(엄밀한 동적 요소 행렬), Timoshenko Frame Structure(티 모센코 프레임 구조), Distributed Parameter System(연속계), Modal Parameters (모드 매개변수), Frequency Response Function(주파수 응답 함수)

ABSTRACT

This paper introduces modeling and its modal analysis procedure for exact and closed form solutions of in-plane vibrations of general Timoshenko frame structures using exact dynamic element method(EDEM). The derivation procedure of the exact system dynamic matrices for Timoshenko beam frames is described. A new modal analysis procedure is also proposed since the conventional modal analysis schemes are not adequate for the proposed, exact system dynamic matrix. The proposed method provides exact modal parameters as well as all kinds of closed form solutions for general frame structures. Two numerical examples are presented for validating and illustrating the proposed method. The numerical study proves that the proposed method is useful for dynamic analysis of frame structures.

1. 서 론

프레임 형태는 구조물의 기본 형태로서 토목, 건축이나 기계에서 다양하게 응용되고 있다. 따라서 프레임 형태의 구조물에 대한 진동은 오래 전부터 연구되어 왔으며 대체로 유한요소법 등을 중심으로 한 근사 해법이 많이 활용되어 오고 있다⁽¹⁻⁵⁾. 그러나 엄밀해가 갖는 유용성에도 불구하고 프레임 구조물의 엄밀해를 고려한 연구는 찾아보기 어렵다. 최

근 엄밀해를 얻는 방법이 제안되고 있지만 동강성행렬을 이용한 방법으로서 비감쇠인 경우로 국한하였으며 프레임의 결합부 특성을 포함한 일반적인 방법은 제안되지 않고 있다^(6,7). 본 연구에서는 엄밀한 동적 요소를 이용하여 균일하지 않는 단면 형상을 갖는 보로 이루어지며, 결합부 요소까지 포함되는 연속 보 프레임 구조물에 대해 엄밀한 모드 해석을 수행할 수 있는 해법을 제시하였다. 이를 위해 1차원 보 구조물에 적용되었던 엄밀한 동적 요소 행렬(Exact Dynamic Element Matrix: EDEM)⁽⁸⁾ 방법을 보로 이루어진 2차원 프레임 구조물 문제로 확장 적용하였다. 프레임 구조에 대한 모델링을 위해서는 보의 축방향 및 횡방향 진동을 모두 고려할 필요가

* 정희원, 금오공과대학교 대학원 기계공학부

** 정희원, 금오공과대학교 기계공학부

있다. 따라서 축방향 및 횡방향 모두에 대해 엄밀한 동적 요소 행렬을 유도하였다. 또한 보를 지지하거나 결합하는 결합부 등에 대해서도 라플라스 영역의 운동방정식으로부터 얻어지는 동특성 행렬을 유도하여 전체 계의 모델링에 사용하였다. 실제 구조물의 모델링에서는 유한요소법과 마찬가지로 전체를 요소로 나누어 만들어지는 각 요소 행렬들을 합성하여 전체 동특성 행렬을 구성하였다. 요소를 나눌 때에는 균일한 부분을 길이나 폭 등에 상관없이 한 개의 요소로 처리함으로써 요소의 수를 크게 줄일 수 있지만 기존의 이산화 모델에 대한 해석 알고리즘을 그대로 사용할 수 없으며, 특히 고유치를 구하기 위해 비선형 방정식을 직접 풀어야 한다.

본 연구에서는 평면 프레임 구조물에서의 면내 진동(in-plane vibration)을 중심으로 이론과 수치예제를 기술하였으나 면외 진동(out-of-plane vibration)이나 3차원 프레임 구조물에서도 같은 방법을 적용할 수 있다. 본 연구에서 제시한 방법에서도 구조물을 유한 개수의 요소로 나누지만 유한요소법 등의 근사 해법과는 달리 엄밀해를 제공하게 된다. 또한 균일한 보를 한 개의 요소로 모델링 함으로서 전체 모델의 크기를 크게 줄일 수 있을 뿐만 아니라 설계 변경 등에 따른 해석이 매우 유리할 것으로 기대되고 있다. 한편 제안된 방법을 통해 구조물을 모델링 하면 유한 자유도로 표현되지만 얻어지는 동특성 행렬이 초월함수를 포함하므로 기존의 모드 해석 방법을 적용할 수 없다. 여기서는 급수형태인 닫힌 꼴의 해를 얻을 수 있는 일반화된 모드 해석 방법을 제안하였다. 또한 절점 사이에서의 응답을 표현할 수 있는 엄밀한 수식도 유도함으로써 연속해를 얻을 수 있도록 하였다. 제안된 방법의 검증을 위해 두 개의 수치예제를 도입하였다. 수치예제에서는 제안된 방법과 유한요소법을 비교하였고 제안된 방법의 응용성을 검토하였다.

2. 일반적인 평면 프레임 구조물의 모델링

2.1 프레임 보 요소의 축 방향 모델링

Fig. 1과 같은 보의 축 방향 운동 방정식을 보의 종축 좌표(x)에 대한 상태 공간 형식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{EA} p \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

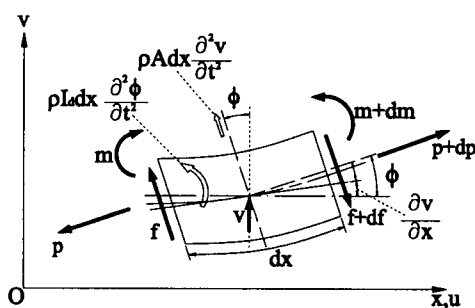


Fig. 1 Timoshenko beam model with axial deformation

여기서 u 는 축 방향 진동 변위이며, p 는 축 방향 힘, 그리고 ρ , EA 는 각각 밀도 및 축 방향 강성을 의미한다. 위 식을 시간에 대해 라플라스 변환하여 정리하면 다음과 같은 두 식을 얻는다.

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = B_1 \Psi_1 \quad (2)$$

여기서

$$\Psi_1 = \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & e \\ h & 0 \end{bmatrix}, \quad e = \frac{1}{EA}, \quad h = \rho A s^2$$

여기서 s 는 시간에 관한 라플라스 변수이며 상첨자 *는 해당 변수의 라플라스 변환 결과식이다.

식 (2)를 다시 공간 좌표 x 에 관하여 라플라스 변환하면 다음 식과 같다.

$$\lambda \hat{\Psi}_1(s, \lambda) - \Psi_1(s, 0) = B_1 \hat{\Psi}_1(s, \lambda)$$

또는

$$\hat{\Psi}_1(s, \lambda) = [\lambda I - B_1]^{-1} \Psi_1(s, 0) \quad (3)$$

여기서, λ 는 공간 좌표에 관한 라플라스 변수이며 ($\hat{\cdot}$)는 공간 좌표에 대해 라플라스 변환한 결과를 의미한다. 한편 $[\lambda I - B_1]^{-1}$ 는 다음과 같이 풀어 쓸 수 있다.

$$[\lambda I - B_1]^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - \gamma^2} \begin{bmatrix} \lambda & e \\ h & \lambda \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 $\gamma^2 = eh$ 이다.

식 (4)를 이용, 식 (3)을 공간 좌표에 대해 라플라스 역변환하면 다음 식을 얻는다.

$$\Psi_1(s, \xi) = C_1 \Psi_1(s, 0) \quad (5)$$

여기서,

$$C_1 = \begin{bmatrix} \cosh \gamma \xi & \frac{e}{\gamma} \sinh \gamma \xi \\ \frac{h}{\gamma} \sinh \gamma \xi & \cosh \gamma \xi \end{bmatrix}$$

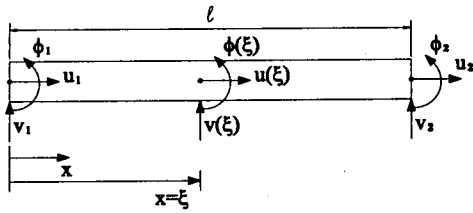


Fig. 2 Coordinates system for beam element

식 (5)를 Fig. 2와 같은 부호규약으로 경계값을 부가하고 변수를 재배치하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} p_1^* \\ p^*(\xi) \end{Bmatrix} = D^a(s, \xi) \begin{Bmatrix} u_1^* \\ u^*(\xi) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서

$$D^a(s, \xi) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{e} \frac{1}{\tanh \gamma \xi} & -\frac{\gamma}{e} \frac{1}{\sinh \gamma \xi} \\ -\frac{\gamma}{e} \frac{1}{\sinh \gamma \xi} & \frac{\gamma}{e} \frac{1}{\tanh \gamma \xi} \end{bmatrix}$$

식 (6)을 길이 l 인 균일 보 요소에 대해 요소방정식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} = D^a(s, l) \begin{Bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{Bmatrix} \quad (7)$$

이와 같이 얻어진 요소방정식은 디지털 모델링 기법에 의해 얻어진 엄밀한 동적요소행렬과 동일한 결과를 얻을 수 있다⁽⁹⁾.

2.2 프레임 보 요소의 횡방향 진동 모델링

Fig. 1에서 티모센코(Timoshenko) 보의 횡방향 운동 방정식을 보의 종축 좌표(x)에 대한 상태 공간 형식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \phi - \frac{f}{kAG} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{m}{EI_d} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial m}{\partial x} &= f + \rho I_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, v, ϕ 는 각각 보의 횡 변위 및 회전 변위이고, f, m 은 전단력 및 모멘트를 나타낸다. 또, ρ, G, E 는 보의 물성치로서 각각 밀도, 전단 강성 계수(shear modulus), 영률(Young's modulus)를 의미하며, A 는 단면적, k 는 단면 형상 보정계수(shape factor)이다. 또, I_d 는 직경 방향 단면 관성

모멘트(diametral area moment of inertia)를 의미한다. 앞 절에서와 마찬가지로 과정을 통해 식 (8)로부터 다음 결과를 얻을 수 있다⁽⁸⁾.

$$\begin{Bmatrix} f_1^* \\ m_1^* \\ f^*(\xi) \\ m^*(\xi) \end{Bmatrix} = D^b(s, \xi) \begin{Bmatrix} v_1^* \\ \phi_1^* \\ v^*(\xi) \\ \phi^*(\xi) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기서,

$$D^b(\xi) = \begin{bmatrix} D_{11}(\xi) & D_{12}(\xi) \\ D_{21}(\xi) & D_{22}(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1(\xi) & d_2(\xi) & d_4(\xi) & d_5(\xi) \\ d_2(\xi) & d_3(\xi) & -d_5(\xi) & d_6(\xi) \\ d_4(\xi) & -d_5(\xi) & d_1(\xi) & -d_2(\xi) \\ d_5(\xi) & d_6(\xi) & -d_2(\xi) & d_3(\xi) \end{bmatrix}$$

이때,

$$\Delta = \frac{1}{a^2 - \beta^2} \{ 2b(1 - \cosh a\xi \cosh \beta\xi) + \frac{ab}{c} (\mu^2 + \nu^2) \sinh a\xi \sinh \beta\xi \}$$

$$d_1 = \frac{1}{\Delta} \{ -\mu \sinh a\xi \cosh \beta\xi + \nu \sinh \beta\xi \cosh a\xi \}$$

$$d_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{(\beta\mu + a\nu)}{a^2 - \beta^2} \sinh a\xi \sinh \beta\xi - \frac{ab - cd}{a^2 - \beta^2} (1 - \cosh a\xi \cosh \beta\xi) \right\}$$

$$d_3 = \frac{1}{\Delta} \frac{a\beta}{bc} \{ \nu \sinh a\xi \cosh \beta\xi - \mu \sinh \beta\xi \cosh a\xi \}$$

$$d_4 = \frac{1}{\Delta} \{ \mu \sinh a\xi - \nu \sinh \beta\xi \}$$

$$d_5 = \frac{1}{\Delta} \{ \cosh a\xi - \cosh \beta\xi \}$$

$$d_6 = \frac{1}{\Delta} \frac{a\beta}{bc} \{ -\nu \sinh a\xi + \mu \sinh \beta\xi \}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2} \{ (ab + cd) + \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \} \\ \beta^2 &= \frac{1}{2} \{ (ab + cd) - \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \} \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{(cd - a^2)}{a}, \quad \nu = \frac{(cd - \beta^2)}{\beta}$$

$$a = \rho I_d s^2, \quad b = \frac{1}{EI_d}, \quad c = \rho A s^2, \quad d = \frac{1}{kAG}$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) + \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) - \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

식 (9)에 길이 l 인 균일 보 요소에 대해 Fig. 2와

같은 경계치의 값을 부가하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} f_1^* \\ m_1^* \\ f_2^* \\ m_2^* \end{Bmatrix} = D^b(s, \ell) \begin{Bmatrix} v_1^* \\ \phi_1^* \\ v_2^* \\ \phi_2^* \end{Bmatrix} \quad (10)$$

2.3 집중 질량 요소 및 결합부의 모델링

집중 질량 (또는 관성) 요소에 대한 라플라스 영역 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} p^* \\ f^* \\ m^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^c s^2 & 0 & 0 \\ 0 & m^c s^2 & 0 \\ 0 & 0 & J^c s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ \phi^* \end{Bmatrix} \quad (11)$$

여기서 m^c, J^c 는 각각 집중 질량체의 질량 및 질량 관성 모멘트이다. 한편 프레임 형성을 위한 보의 결합 요소를 스프링과 감쇠 요소로 표현하면 두 가지 형태의 운동 방정식을 얻을 수 있다. 먼저 보를 지지하는 형태의 결합부는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} p^* \\ f^* \\ m^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} sc^a + k^a & 0 & 0 \\ 0 & sc^t + k^t & 0 \\ 0 & 0 & sc^r + k^r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ \phi^* \end{Bmatrix} \quad (12)$$

여기서 $c^a, c^t, c^r, k^a, k^t, k^r$ 은 각각 두 방향 변위 및 각변위에 대한 감쇠, 강성계수를 의미한다. 또한 구조물과 구조물을 결합하는 결합부는 다음과 같이 구조물 양측에 관련된 좌표에 준하여 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{Bmatrix} p_i^* \\ f_i^* \\ m_i^* \\ p_j^* \\ f_j^* \\ m_j^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} sc^a + k^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sc^t + k^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sc^r + k^r & 0 & 0 & 0 \\ -(sc^a + k^a) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(sc^t + k^t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(sc^t + k^t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(sc^r + k^r) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ \phi_i^* \\ u_j^* \\ v_j^* \\ \phi_j^* \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서 i, j 는 각각 양 구조물이 결합된 위치에서의 좌표를 나타내는 지수이다.

2.4 전체 시스템 행렬의 구성

전체 구조에 대한 운동방정식을 얻기 위해 요소 동특성 행렬을 이용하여 전체 시스템에 대해 요소 행렬을 조합할 필요가 있다. 즉, 주어진 모델의 균일한 보 부분을 한 개의 요소로 고려한 이산화를 하여 각 요소에 대한 행렬을 구한 후 조합하고 집중 질량 요소나 결합부 요소의 행렬을 조합한다. 보 요소에 대한 요소 행렬은 모두 보 요소에 관한 부분 좌표계에 대해 얻어진 것이므로 전체 좌표계로 다시 표현할 필요가 있다. Fig. 3과 같은 보 요소를 갖는 2차원 평면 프레임 구조에서의 면내 진동으로 국한하면 전체 좌표계에서 표현하기 위해 다음과 같은 좌표 변환이 필요하다.

$$\begin{Bmatrix} u_1^* \\ v_1^* \\ \phi_1^* \\ u_2^* \\ v_2^* \\ \phi_2^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

여기서 $(\hat{\quad})$ 는 전체 좌표계에서 표현된 변위를 의미한다. 보 요소의 조합에 있어 식 (14)의 좌표변환을 적용하여 전체 좌표계로 표현된 운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F^*(s) = D(s) q^*(s) \quad (15)$$

여기서, q^* 는 전역 변위 좌표 벡터의 라플라스 변환이며 F^* 는 이 좌표에 대응되는 힘벡터의 라플라스 변환으로서 편의상 $(\hat{\quad})$ 는 표시하지 않았다. 식 (15)는 주어진 시스템에 대한 라플라스 영역에서의 운동방정식을 나타내게 되며 $D(s)$ 는 시스템 동특성 행렬을 의미하게 된다. 3차원 프레임 구조도 마찬가지로 방식으로 전체 계에 대한 운동 방정식을 유도할 수 있다.

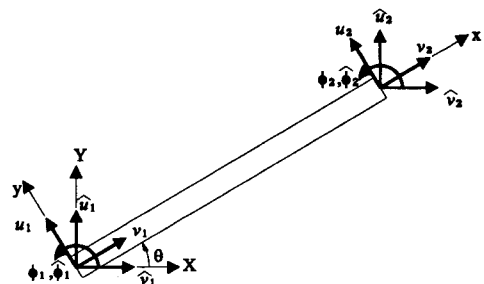


Fig. 3 Relation between local and global coordinate systems

3. 모드 해석

3.1 고유치 문제

식 (15)로부터 주어진 시스템에 대한 고유치 문제는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D(s)q^*(s) = 0 \quad (16)$$

따라서 고유치는 $D(s)$ 에 대한 행렬식이 0이 된다는 조건식으로부터 고유치를 구할 수 있으며 계산된 고유치를 식 (16)에 대입하여 고유벡터를 구할 수 있다.

식 (16)은 s 에 관한 초월함수를 포함하므로 기존의 고유치 계산방법들을 사용할 수 없다. 본 논문에서는 참고문헌 (8)과 (9)에서 적용하였던 수정된 축차 이분법을 적용하였다. 초기 구간 결정을 위해 직접계산법으로부터 전달 함수를 계산, 응답의 피크 점을 찾아 이로부터 일정 간격을 두고 축차이분법 적용을 위한 구간을 설정하였다. 이렇게 얻어진 고유치와 고유벡터는 다음과 같은 직교 조건을 만족한다^(10,11).

$$q_i^t \left\{ \frac{D(s_i) - D(s_k)}{s_i - s_k} \right\} q_k = 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, \infty \quad (17)$$

또한 고유벡터는 다음과 같은 조건을 이용하여 정규화하는 것이 편리하다^(9,10).

$$q_i^t \left\{ \frac{dD(s)}{ds} \right\}_{s=s_i} q_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad (18)$$

식 (18)의 미분식은 앞에서 얻은 요소 행렬들을 미분하여 조합함으로써 얻을 수 있다. 식 (17)과 (18)은 모드확장에 의한 응답식을 유도하는데 활용된다^(9~11).

3.2 모드 합성

식 (17)과 (18)을 이용하면 다음과 같이 전달 함수 행렬을 전개할 수 있다^(10,11).

$$H(s) = \{D(s)\}^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i}{s - s_i} \quad (19)$$

여기서

$$P_i = q_i q_i^t, \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad (20)$$

따라서 주파수 응답 함수 행렬은 다음과 같이 계산되어 질 수 있다.

$$H(j\omega) = \{D(j\omega)\}^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i}{j\omega - s_i} \quad (21)$$

이와 같이 계산된 주파수 응답 행렬은 닫힌 꼴

(closed form)의 형태를 갖게 되므로 직접 계산 방식에 의해 계산하는 것 보다 큰 장점을 갖게 된다. 한편 시간 응답도 식 (21)을 역 라플라스 변환하여 얻어지는 충격응답함수행렬을 이용한 중합적분으로부터 손쉽게 계산할 수 있다. 예컨대, 초기조건을 무시한 경우 외력에 의한 시간응답은 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} q(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t P_i e^{s_i \tau} f(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} q_i \int_0^t e^{s_i \tau} q_i^t f(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (22)$$

따라서 모드별 응답을 계산하여 합산함으로써 손쉽게 시간응답을 계산할 수 있다.

4. 수치예제 및 토의

4.1 예제 1 : 수직 지지 보를 갖는 교량 형상의 프레임 구조물

본 예제에서는 제안된 방법의 타당성을 검증하기 위해 수직 지지 보를 갖는 교량 형상의 프레임 구조물에 대해 유한요소법과 비교를 하였다. Fig. 4에 보인 바와 같이 길이 20 m인 보가 길이 10 m인 세 개의 수직 지지 보에 의해 지지되어 있는 경우이다. Table 1에는 고려한 시스템의 사양이 정리되어 있다. 제안된 방법에서는 균일한 단면을 가지는 부분

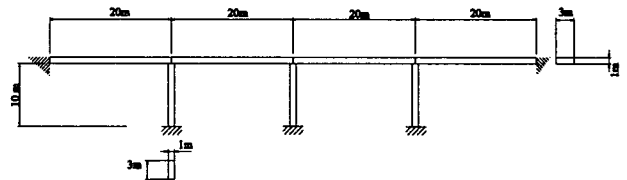


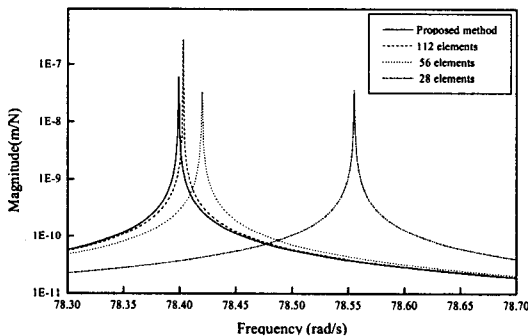
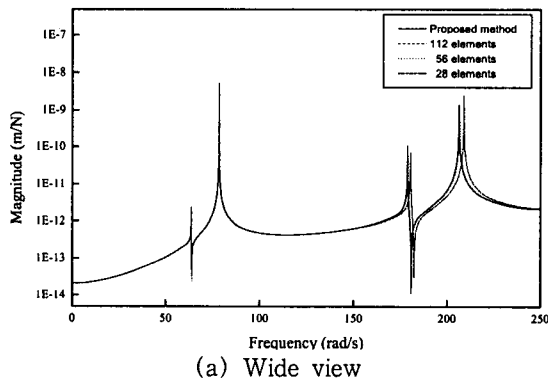
Fig. 4 Numerical model 1: a general frame system

Table 1 Specifications of numerical model 1

Property		Data
Length	Span	20 m
	Pillar	10 m
Thickness		1 m
Width		3 m
Young's modulus		200 GN/m ²
Poisson's ratio (ν)		0.3
Shape factor (k)		10(1+ν)/(12+11ν)
Density		8000 kg/m ³

Table 2 Comparison of natural frequencies from FEM and the proposed method for numerical model 1

Mode #	Natural frequency(rad/sec)			
	FEM (28 elements)	FEM (56 elements)	FEM (112 elements)	Proposed method (7 elements)
1	5.5026e+01	5.4980e+01	5.4974e+01	5.4972e+01
2	6.3829e+01	6.3757e+01	6.3748e+01	6.3746e+01
3	7.3931e+01	7.3819e+01	7.3805e+01	7.3801e+01
4	7.8555e+01	7.8420e+01	7.8403e+01	7.8399e+01
5	1.6243e+02	1.6146e+02	1.6133e+02	1.6130e+02
6	1.8044e+02	1.7905e+02	1.7887e+02	1.7883e+02
7	1.8056e+02	1.8028e+02	1.8022e+02	1.8021e+02
8	2.0071e+02	1.9877e+02	1.9851e+02	1.9845e+02
9	2.0892e+02	2.0664e+02	2.0634e+02	2.0627e+02
10	2.6193e+02	2.6046e+02	2.6024e+02	2.6018e+02



(a) Wide view
(b) Zoomed view in the vicinity of the second mode
Fig. 5 Comparison of driving point FRFs at node 1 by the proposed method and FEM

을 한 개의 요소로 모델링 하였으며 본 예제에서는 7개의 보가 서로 결합되고 있으므로 7개의 요소로 모델링 하였다. 제안한 방법과의 비교를 위해 유한

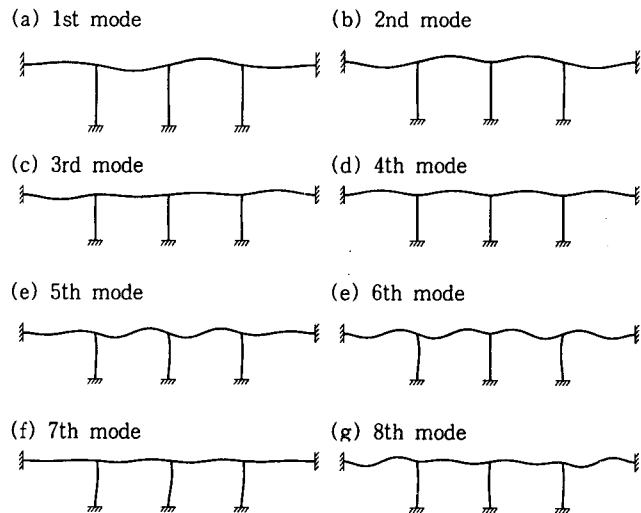
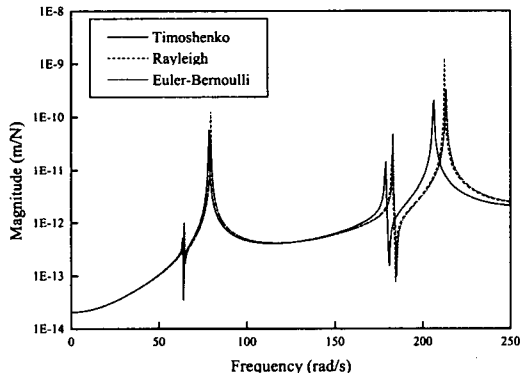


Fig. 6 Mode shapes for first 8 modes

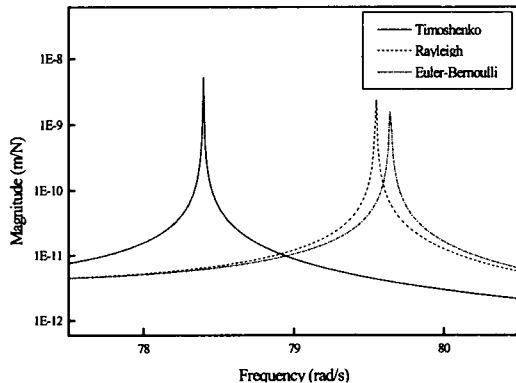
요소법에서 보의 길이를 등간격으로 나누는 방식으로 요소 수를 증가시키면서 모델링한 경우의 고유치를 비교하였다.

Table 2는 제안된 방법으로 계산된 고유치와 유한 요소법으로 계산된 고유진동수를 비교해서 보여주고 있다. 유한요소법에 의해 계산된 결과가 요소 수를 증가시키기에 따라서 제안된 방법으로 계산된 결과에 접근해감을 알 수 있다. 특히, 제안한 방법으로 계산된 고유치가 유한요소법에 의해 계산한 결과에 비해 항상 낮은 값을 보이고 있으며 이는 제안된 방법이

엄밀해를 제공하고 있음을 의미한다. 한편 이와 같은 결과를 시각적으로 확인할 수 있도록 주파수 응답 함수를 계산하여 비교하였다. 주파수 응답 함수 계산에는 직접 계산법을 이용하였다. Fig. 5는 계산 결과를 보여주고 있다. 유한요소법으로 모델링 한 것이 요소 수를 증가시킬수록 제안된 방법으로 계산한 주파수 응답 함수에 접근함을 볼 수 있다. Fig. 6은 각 모드에 대한 모드 형상을 보여주고 있다. 그림에서 보여주고 있는 모드형상은 기존의 이산화 방법과는 달리 식 (6)과 (13)을 이용하여 절점사이의 값도 엄밀하게 계산하여 그려진 것이다. 제안된 방법에서는 티모센코 보 이론에 근간을 두고 있으나 오일러-베르누이(Euler-Bernoulli) 보나 레일레이(Rayleigh) 보도 손쉽게 고려할 수 있다. Fig. 7은 제안된 모델에서 a, d 를 0으로 둔 오일러-베르누이 모델 및 a 를 0으로 둔 레일레이 이론을 사용한 결과를 비교해서 보여주고 있다. 이 두 결과가 티모센코 보 이론을 적용한 결과로 접근함을 볼 수 있다. 특히 본 예제의 경우, 오일러-베르누이 모델과 레일



(a) Wide view



(b) Zoomed view in the vicinity of the second mode

Fig. 7 Comparison of driving point FRFs at node 1 for different theoretical models

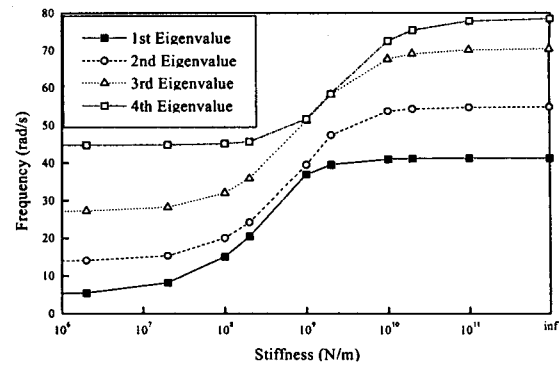


Fig. 8 Variation of natural frequencies due to stiffness change of supporting joints

레이 모델 간의 차이는 크지 않으나 티모센코 모델과의 차이가 비교적 크게 나타나고 있어 전단변형 효과를 고려하는 것이 바람직함을 알 수 있다.

Fig. 8은 기둥과 스펠 사이에 결합부의 수직 강성을 고려하여 구한 고유진동수의 변화추이를 보여주고 있다. 실제로 많은 프레임 구조물이 보와 보를 결합할 때 볼트, 너트 결합, 리벳 결합, 용접 등을 이용하고, 용도에 따라서는 방진이나 진동절연을 위한 삽입물이 사용되고 때문에 보 사이의 결합부에 의한 강성이 전체 구조의 고유진동수 변화에 영향을 미칠 가능성이 매우 크다. 따라서 본 연구에서 제시하고 있는 바와 같이 결합부에 대한 적절한 모델을 고려할 필요가 있다.

4.2 예제 2 : 임의의 각도로 결합된 프레임 구조물

본 예제에서는 제안된 방법을 Fig. 9와 같은 임의의 기울기를 가지는 형상의 프레임 구조물에 적용하였다. Table 3에 고려한 시스템의 사양이 정리되어 있다. Table 4는 제안된 방법으로 계산된 고유치와 유한요소법으로 계산된 고유치를 비교해서 보여주고

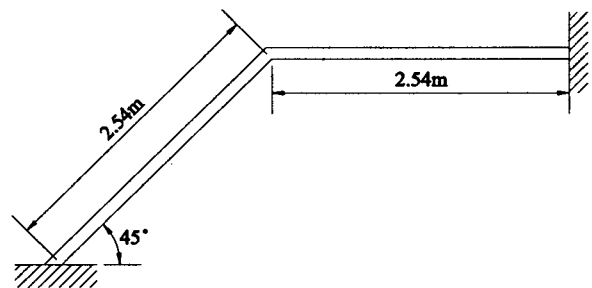


Fig. 9 A general angle frame system : numerical model 2

Table 3 Specifications of numerical model 2

Property	Data
Length	2.54 m
Area	0.00387096 m ²
Young's modulus	200 GN/m ²
Poisson's ratio(ν)	0.3
Shape factor(k)	$10(1+\nu)/(12+11\nu)$
Density	8000 kg/m ³

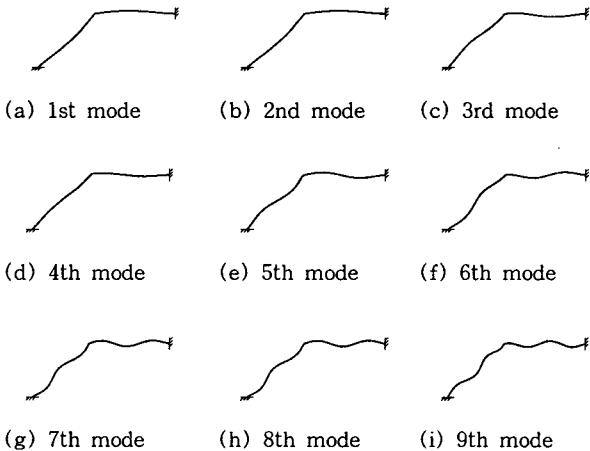


Fig. 10 Mode shapes for first 9 modes of numerical model 2

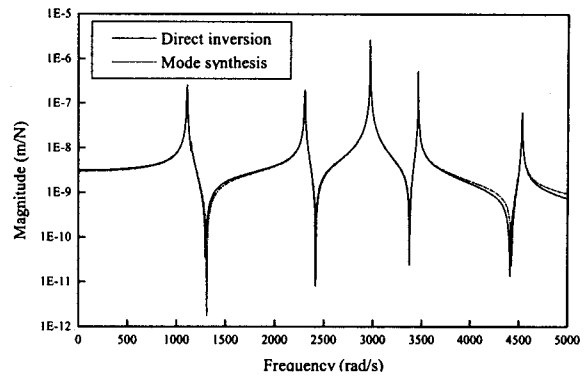


Fig. 11 Comparison of typical FRFs by the direct inversion method and the mode synthesis method for numerical model 2

있다. 앞의 예제에서 보여진 바와 같이 유한요소법에 의해 계산된 결과가 요소 수를 증가시키에 따라서 제안된 방법으로 계산된 결과에 접근해감을 알 수 있다. Fig. 10은 제안된 방법으로 구해진 9개의 모드형상을 보여주고 있다. 한편, Fig. 11은 직접계산법으로 계산된 결과와 모드합성법으로 계산된 결과를 비교하였다. 모드합성법에 의한 계산결과는 10개의 모드를 고려한 경우로서 두 주파수 응답 함수가 서로 잘 일치함을 알 수 있다. 이 결과는 식 (25)로 주어진 모드합성에 의한 주파수 응답 함수가 유효함을 보여준다.

지금까지 기술한 두 가지 예제로부터 제안된 방법을 이용하면 유한자유도의 모델로부터 엄밀한 동특성을 얻을 수 있음을 알 수 있다. 특히 주파수 응답이나 시간 응답을 계산하는데 있어 확장정리부터 얻

Table 4 Comparison of natural frequencies from FEM and the proposed method for numerical model 2

Mode #	Natural frequency (rad/s)			
	FEM (8 elements)	FEM (16 elements)	FEM (32 elements)	Proposed method (2 elements)
1	1.1111e+03	1.1086e+03	1.1081e+03	1.1079e+03
2	1.1512e+03	1.1484e+03	1.1477e+03	1.1475e+03
3	2.3289e+03	2.3086e+03	2.3042e+03	2.3028e+03
4	2.9982e+03	2.9773e+03	2.9723e+03	2.9706e+03
5	3.5413e+03	3.4791e+03	3.4651e+03	3.4606e+03
6	4.7011e+03	4.5696e+03	4.5382e+03	4.5280e+03
7	6.7451e+03	6.3816e+03	6.2882e+03	6.2580e+03
8	6.7567e+03	6.5086e+03	6.4466e+03	6.4263e+03

어지는 모드합성식을 이용하면 임의의 조건에 대한 응답을 간단히 계산할 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 보 요소에 대한 엄밀한 동적 요소를 이용하여 티모센코 프레임 구조물을 모델링하고 해석하는 방법을 제시하였다. 프레임 구조물에 대한 모델링을 위해 보요소에 대한 축방향, 횡방향에 대해 동특성 행렬을 유도하였고 이를 이용하여 전체 구조물의 동특성 행렬을 얻는 과정을 설명하였다. 또한 얻어진 동특성 행렬을 이용하여 구조물의 고유치 및 고유벡터를 구하거나 주파수 영역 해석 및 시간 영역 해석을 수행하는 방법에 대해 논의하였다. 그리고 평면 프레임 구조물의 면내 진동 해석에 관한 두 가지 예제를 통해 제안한 방법의 타당성 및 응용성을 보였다. 제안된 방법에 의하면 보의 균일한 부분은 한 개의 요소로 모델링 될 수 있으므로 구조물의 모델링에 편리하다. 특히, 프레임 구조물이 대부분 균일한 보들로 구성된다는 점을 고려할 때 자유도를 줄이게 되면서도 엄밀해를 얻는 모델을 만들 수 있다. 본 논문에서 고려한 대상은 평면 프레임 구조물의 면내 진동이지만 면외 진동이나 3차원 프레임 구조물의 진동 해석도 제안된 방법과 유사한 과정을 통해 모델링하고 해석할 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Paz, M., 1991, Structural Dynamics: Theory and Computation, Van Nostrand Reinhold.
 (2) Cheng, F. Y., 1970, "Vibrations of Timoshenko Beams and Frameworks," ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 96, No. 3, pp. 551~571.

(3) Levien, K. W. and Hartz, B. J., 1963, "Dynamic Flexibility Matrix Analysis of Frames," ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 89, No. 4, pp. 515~536.

(4) Wang, T. M. and Kinsman, T. A., 1971, "Vibrations of Frame Structures According to the Timoshenko Theory," Journal of Sound and Vibration, Vol. 14, No. 2, pp. 215~227.

(5) Capuani, D., Merli, M. and Savoia, M., 1996, "Dynamic Analysis of Coupled Shear Wall-Frame Systems," Journal of Sound and Vibration, Vol. 192, No. 4, pp. 867~883.

(6) Oguamanam, D. C. D., Hansen, J.S. and Heppler, G.R., 1998, "Vibration of Arbitrary Oriented Two-Member Open Frames with Tip Mass," Journal of Sound and Vibration, Vol. 209, No. 4, pp. 651~669.

(7) Wang, R.-T. and Lin, J.-S., 1998, "Vibration of Multi-Span Timoshenko Frames due to Moving Loads," Journal of Sound and Vibration, Vol. 212, No. 3, pp. 417~434.

(8) 홍성욱, 김종욱, 박종혁, 1998, "감쇠가 있는 일반적인 보 구조물을 위한 엄밀한 모드 해석," 한국정밀공학회지, 제 15 권, 제 12 호, pp. 202~211.

(9) 홍성욱, 조종환, 1999, "디지털 모델링 기법에 의한 1차원 연속계의 모드 해석," 한국소음진동공학회지, 제 9 권, 제 1 호, pp. 103~112.

(10) Lancaster, P., 1961, Lambda-Matrices and Vibrating Systems. Pergamon Press.

(11) Leung, A.Y.T., 1991, "Lambda Matrix Flexibility," Journal of Sound and Vibration, Vol. 148, No. 3, pp. 521~531.