

웨이블렛의 공학적 응용

김 윤 영* · 이 남 용**

(*서울대학교 기계항공공학부 · **강원대학교 제어계측공학과)

1. 머리말

본 특집기사 중 첫 번째 글(이하 1부'라고 칭한다)에서는 웨이블렛이 무엇인지를 개략적으로 살펴보았다. 이 글에서는 웨이블렛이 공학분야에 어떻게 응용되고 있는지를 소개하고자 한다. 지금까지 웨이블렛이 가장 활발히 사용된 대표적인 응용분야 하나만을 들자면 아마도 영상압축 분야가 아닌가 생각한다. 이러한 관점에서 먼저 영상 압축에서의 응용 사례를 살펴보고, 저자들의 연구분야와 관련있는 의료진단, 이상진단, 적응 수치해석, 최적설계 분야에서의 응용 사례를 소개하고자 한다. 물론 이 글에서 소개하는 응용 사례 이외에도 다른 공학 분야와 자연과학 분야에서도 웨이블렛이 응용되고 있다는 사실을 볼 때, 향후 웨이블렛의 실용성이 매우 높을 것으로 기대된다. 1부와 달리 여기서는 복잡한 수식없이 개략적으로 응용 사례를 중심으로 설명해 나가고자 한다.

2. 웨이블렛 변환을 이용한 영상압축

현재의 멀티미디어 통신환경에서는 영상자료의 효과적 압축이 필수적이다. 현재의 압축기법은 주로 높은 압축비율을 얻기 위하여 다소의 오차, 즉, 원영상과 압축된 영상간의 차이를 허용하는 방법이 주종을 이루고 있다. 일반적인 압축과정은 주어진 영상을 어떤 변환을 적용하여 그 변환 결과에서 인간의 시각체계가 감지하기 힘든 구성요소를 압축을 위한 목적으로 제거하고 남겨진 부분만

을 저장한다. 이렇게 압축된 자료에 역변환을 취해서 영상을 복원하면, 복원된 영상은 원영상에 비해 적은 정보량(많은 구성요소를 제거하였기 때문에)을 갖고 있으며, 원영상과의 차이는 거의 식별하기 불가능(제거된 구성요소들이 인간의 시각체계로는 감지하기 힘들기 때문에)할 것이다. 그러므로 영상압축에 사용에 되어져야 할 변환은 높은 에너지 집중의 효과를 가져야 한다. 현재 ISO(International Standards Organization) 산하의 JPEG(Joint Photographic Experts Group)에서 정지영상에 대한 표준화 작업을 진행하고 있는데, 지금까지는 DCT(Discrete Cosine Transform)을 8×8 크기의 구역단위에 적용하는 방법을 사용해 왔다. 그러나, DCT를 구역단위로 적용하는 압축기법으로는 높은 압축비율을 얻을 수 없고(1:20 정도가 보통의 영상에 대해 한계로 알려져 있다), 구역단위로 적용하는데 따른 각 구역간의 불연속성은 심각한 영상의 결점 저하를 갖고 온다. 이러한 기존의 압축기법의 단점을 보완하기 위하여 JPEG 2000이라는 새로운 표준을 정하기 위하여 제안을 받고 있는 중인데, JPEG 2000의 가장 핵심은 웨이블렛 변환의 이용이다. 웨이블렛 변환이 영상압축의 표준의 하나로 채택되게된 가장 큰 이유는 높은 에너지 집중효과에 기인한다. 다음의 그림들은 DCT와 웨이블렛 변환이 얼마나 영상의 에너지를 집중시키는가를 비교하기 위해 제시하였다. 그림 1(a)은 8 비트 512×512 크기의 원영상으로 256 킬로바이트의 정보량을 가지고 있다. 그림 1(b)는 DCT를 이용해서 원영상을 1:64로 압축한 것이다. 그림 1(c)



그림 1(a) 원영상



그림 1(b) DCT를 이용하여 원영상을 1:64 비율로 압축한 결과



그림 1(c) 웨이블릿 변환을 이용하여 원영상을 1:64 비율로 압축한 결과

은 웨이블릿 변환을 이용해서 원영상을 1:64 로 압축한 결과이다. 그림 1 (b)와 그림 1 (c)의 비교를 통해 웨이블릿 변환의 에너지 집중 효과가 DCT의 그것에 비해 탁월함을 알 수 있다⁽¹⁾.

3. 웨이블릿 변환을 이용한 의료영상에서의 잡음제거

의료진단을 목적으로 한 CT(Computerized Tomography), NMR(Nuclear Magnetic Resonance), PET(Positron Emission Tomography)등의



그림 2(a) 비트 512 × 512 크기의 미지의 단층영상

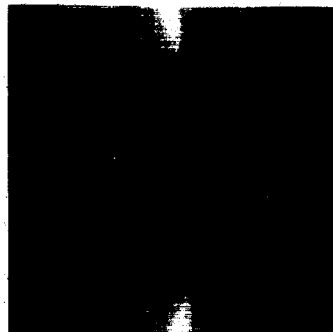


그림 2(b) 비파괴 측정에 의해 얻어진 자료



그림 2(c) 잡음에 대해 고려하지 않고 복원을 강행하여 얻은 결과



그림 2(d) 푸리에 변환을 이용한 FBP에 의한 잡음을 제거한 결과

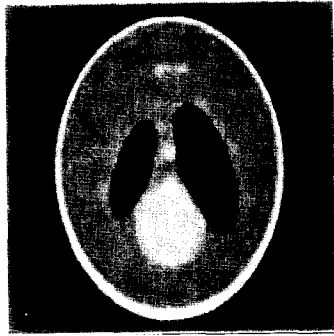


그림 2(e) 웨이블릿 축소를 이용하여 잡음을 제거한 결과

의료영상처리는 비파괴 측정에 의해 구해진 자료로부터 단층영상을 복원하는 것이다⁽²⁾. 이때 측정과정에서 발생한 관측오차, 즉 잡음은 복원과정에 의해 필연적으로 증폭되는데, 이것이 좋은 단층영상을 복원하는데 가장 큰 걸림돌이다^(2,3). 이 글에서는 구체적인 단층영상복원 과정^(2,3,4)은 지면상 생략하고, 1부의 5절에서 기술한 웨이블릿 변환을 이용한 잡음 제거 실험결과를 보였다. 또한 비교의 목적으로 푸리에 변환을 이용한 잡음제거 실험결과도 제시하였다. 먼저, 그림 2(a)는 미지의 단층영상으로 그림 2(b)의 비파괴 측정에서 얻어진 자료로부터 복원되어야 할 대상이다. 그림 2(b)의 자료는 비파괴 측정을 계산적으로 시뮬레이션 한 것으로 잡음이 없는 상태이다. 그러나, 보통의 의료영상처리는 관측오차를 수반한다. 만약, 잡음이 복원과정을 통해 증폭된다는 사실을 고려하지 않고 복원을 강행한다면 그림 2(c)에서와 같이 잡음에 의해 심하게 오염된 영상을 얻을 것이다. 그림 2(d)는 푸리에 변환을 이용한 FBP(Filtered Backprojection)에 의해서 얻었다. 그러나, 많은 잡음이 여전히 남아있고 고주파수 대역 정보에 작은 가중치를 사용함으로써 나타나는 경계가 무디어지는 현상을 발견할 수 있다. 그림 2(e)는 웨이블릿 축소를 이용하여 잡음을 제거하려 한 것으로 그림 2(d)에 비해 경계가 좀더 분명하게 복원되었으며 동시에 많은 잡음제거 효과를 얻었음을 알 수 있다^(3,5).

4. 과도 신호 분석 및 진단

기계 구조물이나 음향동공 문제에서는 발

생하는 과도 신호를 분석하여 시스템의 특성을 파악하거나 이상을 진단해야 하는 경우가 많이 있다. 이러한 과도 신호 중 짧은 시간에 넓은 대역의 넓은 대역의 주파수 성분이 급격하게 변화하는 특성을 갖는 신호를 시간-주파수 분석하는데는 단시간 푸리에 변환, 위그너-빌 분포⁽⁶⁾, 웨이블릿 변환 등이 사용될 수 있다. 그러나 1부에서 설명한 이유 때문에 단시간 푸리에 변환은 이러한 신호 분석에 적합하지 못하다. 만약 간섭이 없는 신호의 경우 위그너-빌 분포는 신호자체를 창문함수로 사용한 형태이기 때문에 단시간 푸리에 변환보다 보다 효과적으로 순간 주파수를 분석할 수 있다. 그러나, 결함 등에 의해 신호의 간섭이 발생하는 경우 Choi-William 커널⁽⁷⁾등을 이용하여 간섭 현상을 완화한다 하더라도 시간-주파수 분해능의 손실이 발생하는 문제점이 있다. 그러나 웨이블릿은 신

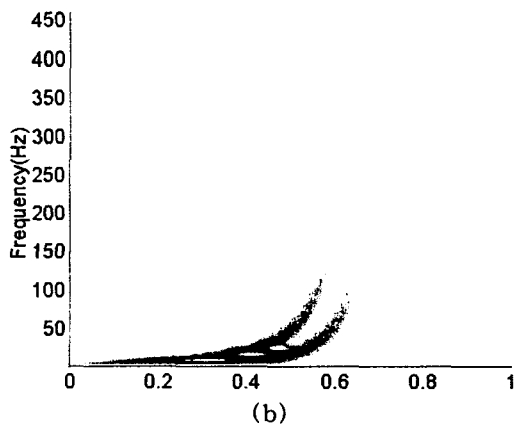
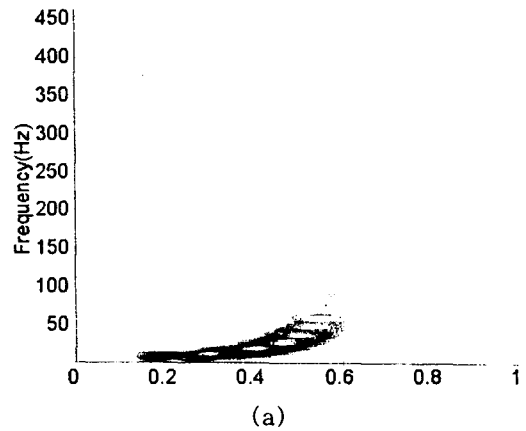
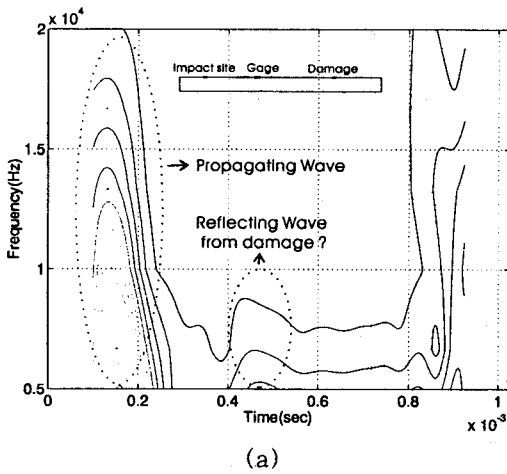
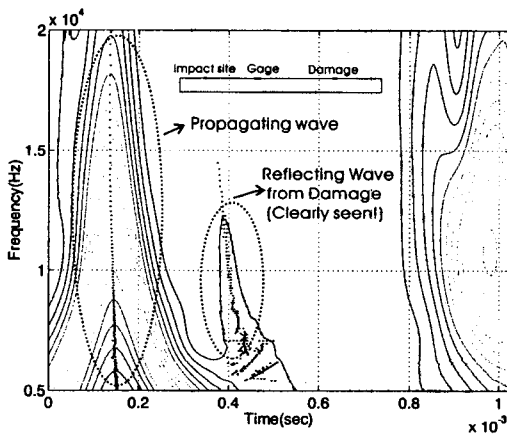


그림 3 2개의 쌍곡선 칩 신호에 대한 (a) 단시간 푸리에 변환, (b) 연속웨이블릿 변환

호의 주파수 성분의 고저에 따라 창문함수의 시간에 대한 지지영역이 바뀌게 됨으로써 급격히 변화하는 신호의 분석에 매우 유용하다. 그림 3은 2개의 쌍곡선 첨(hyperbolic chirp)으로 이루어진 신호에 대해 단시간 푸리에 변환(그림 3(a))과 연속웨이블렛 변환(Gabor 웨이블렛을 이용)을 수행한 결과로, 웨이블렛 변환은 주파수 성분이 급격히 변화하는 두 개의 신호를 잘 분석할 수 있음을 보여준다⁽⁸⁾. 실제로 연속웨이블렛을 이용하여 결함이 있는 보구조물의 이상진단을 수행한 결과는 그림 4에 나타나 있다⁽⁹⁾. 그림 4에서의 신호에는 가진점에서 계측점(Gage로 표시)에 처음 전파되는 파와 결함에서 돌아오는 반사파 등이 섞여 있다. 그림에서 알 수 있듯이 단시간 푸리에변환(그림 4(a))과



(a)

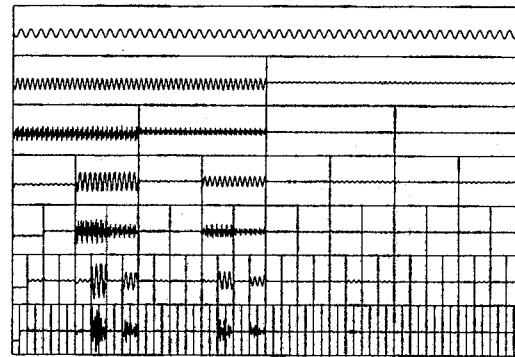


(b)

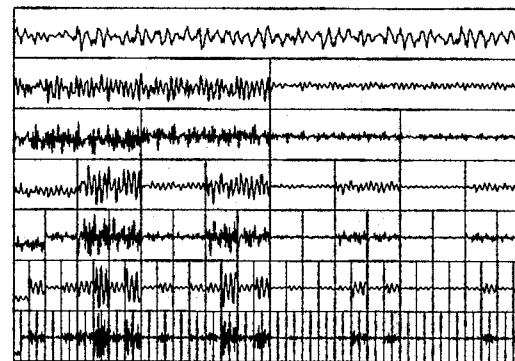
그림 4 결함이 있는 보에서의 탄성과 시간-주파수 분석 (a) 단시간 푸리에 변환, (b) 연속웨이블렛 변환

는 달리, 그림 4 (b)의 웨이블렛변환은 초기에 전파되는 파와, 결함에서 돌아오는 파를 잘 식별해주는 장점이 있음을 알 수 있다.

위에서 설명한 구조 결함 진단은 물론 공작기계 등과 같이 회전하는 기계류의 이상진단에도 웨이블렛이 효과적으로 사용될 수 있다. 최근 기계류에 발생하는 이상 신호의 특성(feature)을 규명하여 실시간 진단 기법을 개발하는데 웨이블렛 변환을 사용하려는 시도가 많아지고 있다^(10,11). 그림 5(a)와 (b)는 채터가 발생하기 전후의 드릴링 머신의 회전축 모터의 전류신호를 웨이블렛 패킷으로 분석한 결과이다. (사용된 웨이블렛은 2차 Daubechies 웨이블렛) 웨이블렛 패킷⁽¹²⁾은 웨이블렛에 요동하는 함수(oscillating function)를 곱한 형태로 신호의 급격한 변화는 웨이블렛으로, 정상적인 요동현상은 요동함수로 나타내도록 만든 함수로 볼 수 있다. 따라서 기



(a)



(b)

그림 5 드릴링 머신의 회전축 모터 신호의 웨이블렛 패킷 분석(그림의 상단에 있는 신호가 특정된 신호임). (a) 채터 발생전, (b) 채터 발생 후

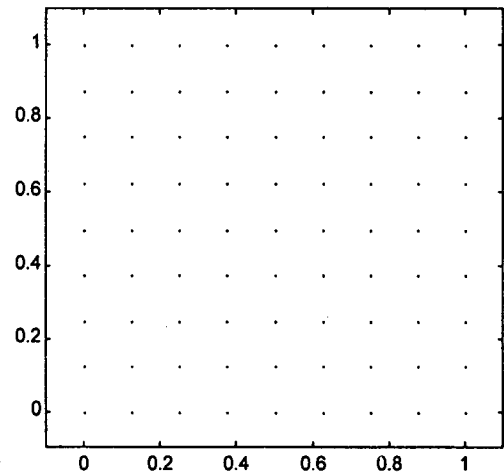
계류에서 발생하는 순간적인 이상에 의해 발생하는 신호와 유사한 형태의 웨이블릿 패킷을 선정하게 되면 기계의 이상을 매우 효율적으로 진단할 수 있다. 그림 5(a)와 (b)에서 알 수 있듯이 특정 위치에 있는 곳에서의 (즉 특정 시간과 특정 웨이블릿 패킷에 상응) 두 신호의 차이가 현저하기 때문에 실시간 이상진단 기법을 효율적으로 구축할 수 있게 된다.

4. 적응 수치해석

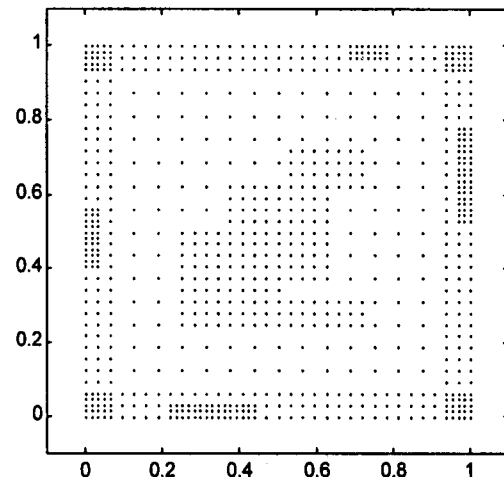
지금까지는 주로 신호(또는 영상)처리와 관련하여 웨이블릿의 응용사례를 살펴보았다. 이와 같이 웨이블릿이 새로운 수학적 도구로 자리잡던 초기에는 주로 신호(영상)처리 분야에서 활용되었는데, 최근에는 기존의 유한요소해석기법의 대안으로 웨이블릿을 이용하여 미분방정식의 해를 구하는 수치해석 기법들이 연구되고 있다. 기존에 상용되고 있는 유한요소해석 기법과 비교해 볼 때, 웨이블릿을 이용한 수치해석 기법은 다음과 같은 장점이 있다. 첫째 해석하고자 하는 영역을 요소로 나눌 필요가 없고, 둘째 적응기법(adaptive scheme)의 적용이 쉽고, 셋째 예조절 공액구배법(preconditioned conjugate gradient method)등과 같은 반복 수치기법이 적용하기 좋은 행렬을 얻게 된다는 것이다. 이 중에서 두 번째 특징은 웨이블릿이 다중분해 해석(multi-resolution analysis)을 가능하게 한다는 사실에 기인한다. 1부의 식 (3)에서 k 는 분해정도(resolution)를 나타내는 인덱스인데, 특정한 분해정도(즉 특정한 k)에서 시작하여 해가 수렴할 때까지 필요한 곳에만 분해정도를 점차적으로 높여감으로써 적응 다중분해해석이 가능하게 된다.

현재 웨이블릿을 수치해석에 사용하는 방법은 크게 웨이블릿-갈러킨(wavelet-Galerkin) 방법과 웨이블릿-콜로케이션(wavelet-collocation) 방법으로 나눌 수 있다. 초기에는 단일스케일에 의한 해석을 중심으로 연구가 진행되다가⁽¹³⁾ 최근에는 적응해석 기법에 대한 이론적 토대들이 잡혀가고 있다^(14~17). 현재까지 연구된 웨이블릿 수치해석법으로는 유한요소해석법처럼 임의의 경계를 자유롭게 다루기

어렵다. 그러나 그림 6에서 보듯이 적응 웨이블릿 기반 수치기법을 이용하면 유한요소에서 요구되는 요소망의 재구성없이 정밀한 해석이 필요하다고 판단되는 곳에만 절점을 추가할 수 있는 장점이 있다. 그림 7은 1차원 영역의 문제에 대해 웨이블릿 적응수치해석시 분해정도에 따른 절점의 분포가 어떻게 변화해 나가는지를 개략적으로 보여주고 있다. 분해정도가 높아짐에 따라 높은 정도가 요구되는 곳에는 새로운 절점을 추가하고, 불필요한 경우 이미 있던 절점을 제거하여, 수치해석을 위해 구성되는 전체 행렬의 크기를 크게 증가시키지 않고도 정밀한 해를



(a)



(b)

그림 6 (a) 낮은 분해 단계에서의 절점 분포, (b) 높은 분해 단계에서의 적응 절점 분포

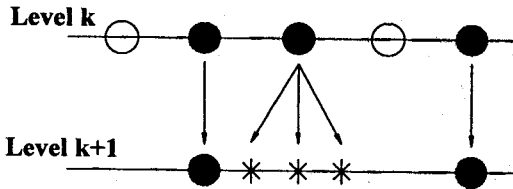


그림 7 적응 알고리즘 (분해 단계가 높아짐에 따라 필요없는 절점은 소거하고 필요한 곳만 절점을 증가함)

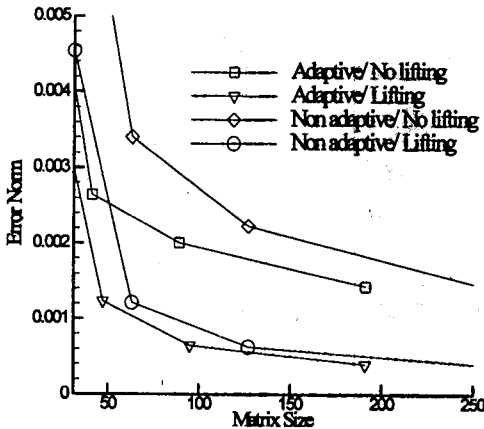


그림 8 절점 수(또는 행렬의 크기)에 따라 오차의 norm

구할 수 있음을 알 수 있다. 그림 8은 웨이블릿-콜로케이션 기법을 1차원 문제 적용했을 때, 전체 사용된 자유도(행렬의 크기)에 따라 오차가 어떻게 감소하는지를 보여주고 있다. 이 경우에는 Donoho의 보간 웨이블릿⁽¹⁸⁾을 사용하였는데, 적응해석기법을 적용하게 되면 그렇지 않은 경우에 비해 해의 수렴성이 크게 향상되는 것을 알 수 있다. 또한 Donoho의 보간 웨이블릿에 Sweldens의 수정 기법(lifting scheme)⁽¹⁹⁾을 적용하여 소멸모멘트를 갖도록 만들게 되면 해의 수렴속도 더욱 향상됨을 알 수 있다⁽²⁰⁾. 현재의 추세대로 관련 연구가 진행된다면 유한요소해석에 버금가거나 이를 대체할 수도 있는 해석기법으로 발전될 가능성이 매우 크다.

5. 다중스케일-다중분해 최적설계

최근 웨이블릿이 갖는 다중분해해석 특성을 위상 최적설계에 적용하게 되면 새로운 개념의 설계기법이 가능하다는 것이 제안된 바 있다⁽²¹⁾. 다중-스케일 다중분해 설계는 최

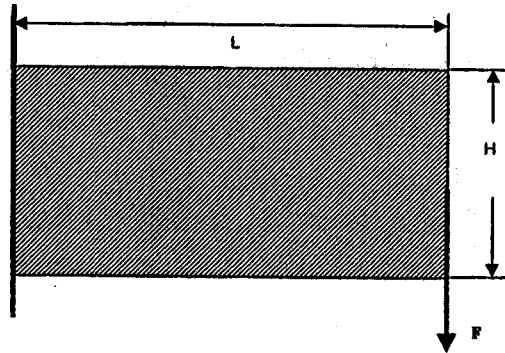


그림 9 위상최적설계 영역과 경계조건

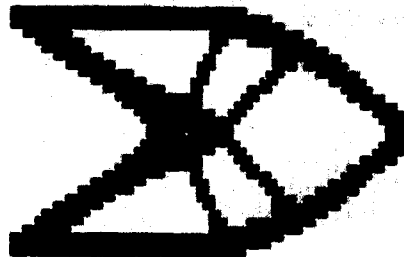
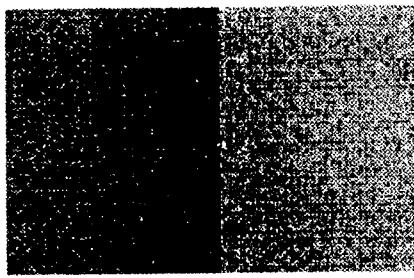


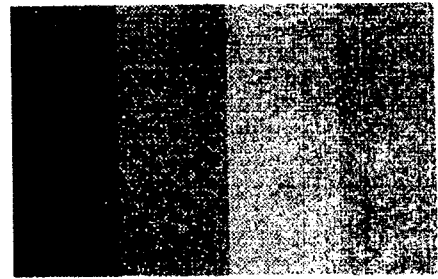
그림 10 기존의 위상 최적화 기법에 의한 해석 결과

적 설계를 거친 설계(coarse design)에서 상세설계로(refined design) 그 분해정도를 증가해가면서 점진적으로 구현하는 것으로 지금까지의 단일 분해정도에서 수행하는 설계와는 개념적으로 큰 차이가 있다. 물론 유한요소모형을 이용하는 경우 설계의 정도에 비례하여 유한요소의 크기를 줄임이는 것도 일종의 다중분해 해석이라 할 수 있다. 하지만 이 경우에는 각 분해단계 내에서 사용하는 요소 크기가 일정하기 때문에 각 단계별로 단일 스케일만을 사용하게 되는 셈이다. 그러나 웨이블릿을 이용하게 되면 각 단계에서 다중스케일로 분해되기 때문에 어떤 단계까지 설계가 이루어질 때, 그 전 단계까지 사용된 스케일에 다음 단계의 스케일이 추가되는 특징이 있다. 이렇게 함으로써, 새로운 단계에서는 그 전 단계와의 차이에 해당하는 설계변화에 초점을 맞출 수 있게 되어 설계를 효율적으로 수행할 수 있게 된다.

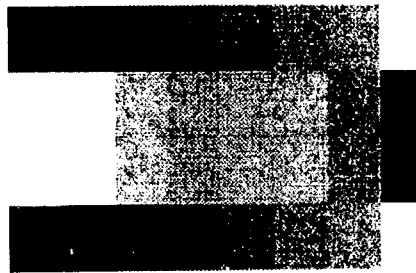
그림 9은 한 단이 고정이며 다른 한 단에서 집중하중을 받는 경우, 주어진 질량 조건을 만족시키는 고강성 구조물을 설계하는 위상최적화문제이다. 그림 10은 기존의 방법에 의해 얻을 수 있는 전형적인 결과이며 그림



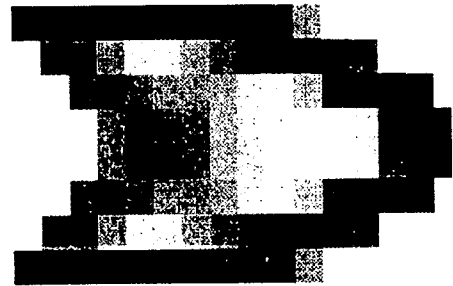
(a)



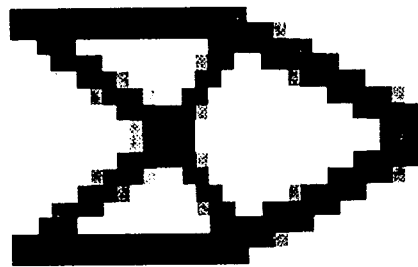
(d)



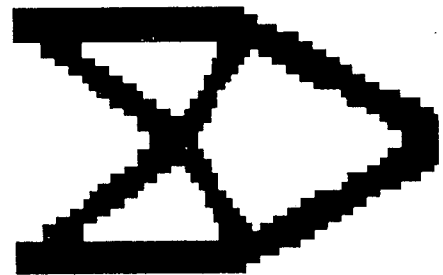
(b)



(e)



(c)



(f)

그림 11 다중스케일-다중분해 위상최적화에 의한 정도별 해석 결과

11은 웨이블릿을 이용한 다중스케일-다중 분해 설계기법을 적용하여 분해 단계별로 얻어진 결과를 보여주고 있다⁽²¹⁾. 다중스케일-다중분해 설계에 의해 얻어진 최종 결과인 그림 11(f)와 그림 10을 비교해보면 그림 11(f)의 설계는 그림 10과는 달리 상당히 간단한 위상을 갖는다. (위상이 간단하면 제작이 그만큼 간단해진다.) 여기서 소개하지 않은 다른 문제의 경우에도 기존의 방법으로 얻기 곤란한 형태의 최적설계를 구현할 수 있음이 밝혀졌다. 이와 같이 다중스케일-다중분해 설계라는 새로운 설계개념은 향후 다양한 최적화 문제에 응용될 수 있으리라 기대된다.

참고 문헌

- (1) DeVore, R., Jawerth, B. and Lucier, B., 1992, "Image Compression through Wavelet Transform Coding", IEEE Transactions on Information Theory, Special Issue on Wavelet Transforms and Multiresolution Analysis, 38-2, pp. 719~746.
- (2) Kak, A. and Slaney, M., 1988, "Principles of Computerized Tomographic Imaging", IEEE Press.
- (3) Lee, N.-Y., 1997, "Wavelet -

Vaguelette Decompositions and Homogeneous Equations", Ph. D. Thesis, Purdue University.

(4) Donoho, D., 1995, "Nonlinear Solution of Linear Inverse Problems by Wavelet - Vaguelette Decompositions", Applied and Computational Harmonic Analysis, 2, pp. 613~627.

(5) Chambolle, A., DeVore, R., Lee, N.-Y. and Lucier, B., 1998, "Nonlinear Wavelet Image Processing : Variational Problems, Compression, and Noise Removal through Wavelet Shrinkage", IEEE Transactions on Image Processing, 7-3, pp. 319~335.

(6) Wigner, E. P., 1932, "On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium", Phys. Rev., 40, pp. 749~759.

(7) Choi, H. I. and Williams, W. J., 1989, "Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals using Exponential Kernels", IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Proc., 37-6, pp. 862~871.

(8) Mallat, S., 1998, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, New York.

(9) 김윤영, 김응훈, 1999, "웨이블렛과 위그너빌을 이용한 구조진단 기법", 한국소음진동공학회, 1999년도 춘계 학술대회 논문집, pp. 436~441.

(10) Wu, Y. and Du, R., 1996, "Feature Extraction and Assesment Using Wavelet Packets for Monitoring of Machining Processes", Mechanical Systems and Signal Processing, 10-1, pp. 29~53.

(11) Liu, B. and Ling, S.-F., 1999, "On the Selection of Informative Wavelets for Machinery Diagnosis", Mechanical Systems and Signal Processing, to Appear.

(12) Cofman, R. R., Meyer, Y. and Wickerhauser, M. V., 1992, "Wavelet Analysis and Signal Processing. In Wavelets

and Their Applications", pp. 153~178, Boston, Jones and Barlett, B. Ruskai et al. eds.

(13) Diaz, A. R., 1999, "A Wavelet-Galerkin Scheme for Analysis of Large-Scale Problems on Simple Domains", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 44, 1599~1616.

(14) Cohen, A. and Masson, R., 1999, "Wavelet Adaptive Methods for Elliptic Equations-Preconditioning and Adaptivity", Preprint, Lan, Universite Pierre et Marie Curie, Paris, to Appear in SIAM J. Sci. Comp.

(15) Dahlke, S., Dahmen, W., Hochmuth, R. and Schneider, R., 1997, "Stable Multi-Scale Bases and Local Error Estimation for Elliptic Problems", Applied Numerical Mathematics, 23, 21~47.

(16) Dahmen, W., 1997, "Wavelet and Multiscale Methods for Operator Equations", Acta Numerica, 6, 55~228, Cambridge University Press.

(17) Cohen, A., Dahmen, W. and DeVore, R., 1998, "Adaptive Wavelet Methods for Elliptic Operator Equations-Convergence Rates", RWTH Aachen, IGPM Preprint No. 165.

(18) Donoho, D. L., 1992, "Interpolating Wavelet Transforms", Technical Report, Department of Statistics, Stanford University.

(19) Sweldens, W., 1998, "The Lifting Scheme : A Construction of Second Generation Wavelets", SIAM J. MATH. ANAL, 29-2, 511~546.

(20) 김윤영, 김재은, 1999, "적응 웨이블렛-콜로케이션 기법을 위한 수정된 보간 웨이블렛", 대한기계학회 추계 학술대회 논문집 A.

(21) Kim, Y. Y. and Yoon, G. H., 1999, "Multi-Resolution Multi-Scale Topology Optimization - A New Paradigm", Int. J. Solids and Structures, to appear.